Université de M'sila
Faculté des mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques
$3^{ième}$ **année Mathématiques(2021-2022)**

Série N° 01(Equations différentielles)

N.B: Les questions $(*)$ sont hors **T.D.**

Exercice 1 *Dire si les fonctions données ci-dessous sont solutions des équations différentielles suivantes:*
1)$^{(*)}$ $xy' = 2y$ *et* $y = 5x^2$ 2) $y'' = x^2 + y^2$ *et* $y = \dfrac{1}{x}$
3)$^{(*)}$ $(x+y)\,dx + xdy = 0$ *avec* $y = \dfrac{c^2 - x^2}{2x}$
4)$^{(*)}$$y'' + y = 0$ *et* $y = 3\sin x - 4\cos x$ 5)$^{(*)}$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2)\,y' + \lambda_1\lambda_2 y = 0$ *et* $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_1 x}$.

Exercice 2 *Intégrer les équations différentielles, puis déterminer les solutions particulières si la condition initiale est donnée:*
1)$^{(*)}$ $(x-1)\,dy + (y-2)\,dx = 0$
2)$^{(*)}$$2x\,(1+y^2)\,dx - y\,(1+2x^2)\,dy = 0$
3)$y' - 2y = y^2$ *avec* $y = 3$ *pour* $x = 0$
4)$^{(*)}$ $(1+e^x)\,yy' = e^x$ *avec* $y\,(0) = 1$
5)$^{(*)}$ $(xy^2 + x)\,dx + (x^2 y - y)\,dy = 0$ *avec* $y\,(0) = 1$
6)$yy' + x = 0$ 7)$y' = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1$
8)$y' = \dfrac{x^2}{y\,(1+y)}$ 9) $(1+x^2)\,y' = \sqrt{1+y^2}$
10) $(x^2 - yx^2)\,y' + y^2 + xy^2 = 0$ 11)$y' \sin y.\cos y + xe^{x^2} = 0$
12)$xyy' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$.

Exercice 3 *Résoudre les équations différentielles suivantes:*
1) $y' = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 2)$^{(*)}$$y' = \dfrac{2xy + y^2}{2x^2}$ 3)$^{(*)}$$y' = \dfrac{x-y}{x+y}$
4) $(x-y)\,ydx - x^2dy = 0$ 5)$y' = \dfrac{2x+y-1}{4x+2y+5}$
6) $(x+y-3)\,dx - (x-y-1)\,dy = 0$

$7)y' = \sqrt{4x+3y+2}$ $\quad$ $8)^{(*)}y' = \dfrac{2x+y-3}{x+y-2}$

$9)^{(*)}y' = \dfrac{x-3y+2}{3x-9y-12}$ $\quad$ $10)^{(*)}\ (2x+2y-10)\,dx-(x+y+1)\,dy=0.$

Exercice 4 *Donner le type des équations différentielles suivantes, puis les intégrer:*

$1)\ y' - \dfrac{y}{x} = x$ $\quad$ $2)^{(*)}\dfrac{dy}{dx} = x^3 - \dfrac{y}{x}$ $\quad$ $3)y' - \dfrac{1+3x^2}{x\,(1+x^2)}y = \dfrac{x\,(1-x^2)}{1+x^2}$

$4)y' + \dfrac{y}{x} = ay^2\log x$ $\quad$ $5)y'.\,(x^2y^3+xy) = 1$

$6)^{(*)}\left(2x\ sh\dfrac{y}{x} + 3y\ ch\dfrac{y}{x}\right)dx - 3x\ ch\dfrac{y}{x}dy + \dfrac{3\,(xdy-ydx)}{x^2} = 0.$

Exercice 5 *1) Montrer que l'équation diférentielle suivante a une solution particulière* $y_1 = \cos x$*, puis trouver sa solution générale:*

$$y'\,(1-\sin x\cos x) + y^2\cos x - y + \sin x = 0.$$

2) Résoudre les équations différentielles suivantes:

$1)y' - \dfrac{1}{x}y = 2y^2 + \dfrac{1}{2x^2}$ $\quad$ $2)^{(*)}y' - \dfrac{1}{2x}y = \dfrac{1}{x}y^2 + 1$ $\quad$ $3)x^2y' + xy = -x^2y^2 + 1.$

Exercice 6 *1) Montrer que les équations suivantes sont des équations aux différentelles totales, puis trouver ses solutions générales:*

$1)\cos y dx + (2y - x\sin y)\,dy = 0$

$2)(e^{y^2}dx + 2xye^{y^2}dy) + (ye^x dx + e^x dy) = 0$

$3)^{(*)}\log(y^2+1)\,dx + \dfrac{2y\,(x-1)}{y^2+1}dy = 0.$

2) Résoudre les équations différentielles suivantes admettant un facteur intégrant :

$1)\ (x+y^2)\,dx - 2xydy = 0$ $\quad$ $2)^{(*)}y\,(1+xy)\,dx - xdy = 0$

$3)\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)\,dy = 0$

$4)\ (x\cos y - y\sin y)\,dy + (x\sin y + y\cos y)\,dx = 0$

$5)^{(*)}xdy - ydx + (x^2+y^2)\,tgydy = 0.$

Université de M'sila
Faculté des mathématiques et de l'Informatique
Département de Mathématiques
$3^{ième}$ **année Mathématiques(2021-2022)**

Série N° 02(Equations différentielles)

N.B: Les questions $(*)$ sont hors **T.D.**

Exercice 7 *a)*$^{(*)}$ *Vérifier que les fonctions suivantes satisfont la condition de Lipschitz sur l'intervalle indiqué et donner la constant de Lipschitz:*
1) $f(x,y) = 2yx^{-4}$ *pour* $x \in [1,\infty[$, 2) $f(x,y) = e^{-x^2}\arctan(y)$ *pour* $x \in [1,\infty[$, 3) $f(x,y) = 2y\left(1+e^{-|x|}\right)(1+y^2)$ *pour* $x \in \mathbb{R}$.
b) Vérifier que les problèmes de Cauchy suivants satisfont du théorème de Cauchy-Lipschitz, puis trouver ses solutions:
1) $\begin{cases} y' = \frac{\cos x}{1+e^y} \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$, 2)$^{(*)}$ $\begin{cases} y' = \sin y \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ 3)$^{(*)}$ $\begin{cases} y' = \exp(\cos x^2 y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$.
c) Donner les trois premières approximations successives des problèmes de Cauchy suivants:
1) $\begin{cases} y' = x + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$, 2)$^{(*)}$ $\begin{cases} y' = 2y - 2x^2 - 3 \\ y(0) = 2 \end{cases}$ 3)$^{(*)}$ $\begin{cases} y' = \cos y \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Exercice 8 $^{(*)}$ *On considère le problème de Cauchy suivant:*

$$\begin{cases} y' = \sqrt{y} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \text{(PC)}$$

1) *Vérifier que* $y = 0$ *est solution de PC.*
2) *Trouver une solution non nulle de classe* $\mathcal{C}^1$ *de ce problème.*
3) *Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique-t-il ici ? Pourquoi?*

Exercice 9 *Résoudre les équations différentielles suivantes:*
1)$^{(*)}$ $y = xy' - (y')^2$ 2) $y = x(1+y') + (y')^2$ 3)$^{(*)}$ $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$,
4)$^{(*)}$ $x = \dfrac{y}{y'} + \dfrac{1}{(y')^2}$, 5) $y = xy'^2 - \dfrac{1}{y'}$.

Exercice 10 *1) Intégrer les équation différentielles suvivantes:*

1) $y'' - \dfrac{y'x}{1+x^2} = 0,$ 2)$^{(*)}$ $y'' - \dfrac{y'}{(1+x^2)\arctan x} = 0,$

3)$y'' - \dfrac{y'^2 y}{(1+y^2)} = 0,$ 4)$^{(*)}$ $y''y = y^2y' + y'^2,$

5)$^{(*)}y'' + 2y' + y = e^{-x}\sin^2 x,$ 6)$y'' - 4y' + 4y = x^2,$

7)$^{(*)}y'' - y' - 6y = -16xe^{-x},$ 8)$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,$

9)$x^2y'' - 4xy' + 6y = x,$ 10)$^{(*)}x^2y'' - 2xy' + 2y = 2x^3e^x,$

11)$^{(*)}$ $(1+x)^2 y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3.$

2) A l'aid du développement d'une série entière, résoudre les équations différentielles suivantes:

1) $(x+x^2)y'' - 3(x-1)y' - y = 0,$ 2)$^{(*)}y'' - xy' - y = 0.$

Série N°01 (équations différentielles)

EX01 : facile

EX02 :

3) $\underbrace{y' - 2y = y^2}_{(3)}$ avec $y = 3$ pour $x = 0$

(3) $\Leftrightarrow y' = y^2 + 2y$ équation à variables séparés, car elle est sous la forme $y' = A(x)B(y)$ tqs $A(x) = 1$, $B(y) = y^2 + 2y$

(3) $\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2 + 2y} = \int dx \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y(y+2)} = \int dx$, $y \neq 0$ et $y \neq -2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln\left|\frac{y}{2+y}\right| = x + C \Leftrightarrow \boxed{\sqrt{\frac{y}{2+y}} = ke^x / k = e^C}$

ou $y = -2$

Pour $y(0) = 3$, on a $\boxed{k = \sqrt{\frac{3}{5}}}$

donc la solution particulière est $\boxed{\sqrt{\frac{y}{y+2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}\, e^x}$

6) $\underbrace{yy' + x = 0}_{(6)}$ équation à variables séparables.

(6) $\Leftrightarrow yy' = -x \Leftrightarrow y\frac{dy}{dx} = -x \Leftrightarrow \int y\,dy = -\int x\,dx$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \Leftrightarrow \boxed{y^2 + x^2 = K / K = 2C}$

est une fammille des cercles de centre $(0,0)$ et de rayon $r = \sqrt{|K|}$

(7) $y' = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \Leftrightarrow y' = x^2(y^2+1) + y^2+1$

$\Leftrightarrow y' = (x^2+1)(y^2+1)$ à variables séparés.

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y^2+1} = \int (x^2+1)\,dx$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{arctg}(y) = \frac{x^3}{3} + x + C$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = tg\left(x^3/3 + x + C\right)}$$

(8) $y' = \dfrac{x^2}{y(1+y)}$ équation à variables séparés.

$\Leftrightarrow \int y(1+y)dy = \int x^2 dx \Leftrightarrow \boxed{y^2/2 + y^3/3 = x^3/3 + C,\ C \in \mathbb{R}}$

(9) $(1+x^2)\,y' = \sqrt{1+y^2}$ à variables separables.

sa solution générale est $\boxed{\operatorname{arcsh}(y) = \operatorname{arctg}(x) + C,\ C \in \mathbb{R}}$

11) $y' \sin y . \cos y + x e^{x^2} = 0$ à variables separés

(11) $\Leftrightarrow \int \sin y \cos y\, dy = \int -x e^{x^2} dx.$

$$\Leftrightarrow \boxed{\sin^2 y = -e^{x^2} + C,\ C \in \mathbb{R}}$$

12) $xyy' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ à variables separables

(12) $\Leftrightarrow \int \dfrac{y}{1+y^2}dy = \int \dfrac{dx}{x(1+x^2)} \Leftrightarrow \ln(1+y^2) = 2\left(\ln x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\ln C\right)$

$$\Leftrightarrow \boxed{y = \sqrt{\frac{Cx^2}{1+x^2} - 1}}$$

Exercice 03 :

(1) $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$ sous la forme $y' = f(x,y)$ et on a.

$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2(x^2+y^2)} = \lambda^0 f(x,y)$, donc elle est homogène

on pose $y = xu \Rightarrow y' = u + xu'$, alors

(1) $\Leftrightarrow xu' = \frac{u}{1+u^2} - u \Leftrightarrow \int \frac{1+u^2}{u^3} du = \int -\frac{dx}{x}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}\frac{1}{u^2} + \ln u = -\ln x + C, \quad C \in \mathbb{R}$

donc la solution générale de (1) est (on a $u = \frac{y}{x}$)

$$-\frac{x^2}{2y^2} + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = -\ln x + C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ ou } y = 0 \text{ et } x \neq 0$$

(4) $\underbrace{(x-y)y}_{P(x,y)}dx \underbrace{-x^2}_{Q(x,y)}dy = 0$, on a $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 P(x,y)$ et $Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 Q(x,y)$

donc P et Q sont homogènes, alors (4) est homogène

on pose $y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$, alors

et $u' = \frac{du}{dx}$, $y' = \frac{dy}{dx}$

(4) $\Leftrightarrow -u^2x^2dx - x^3du = 0$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{x}dx = \frac{du}{u^2}, \quad u \neq 0, x \neq 0$

$\Leftrightarrow -\ln\left|\frac{x}{c}\right| = -\frac{1}{u} \Leftrightarrow u = \frac{1}{\ln\left|\frac{x}{c}\right|}$, Comme $u = \frac{y}{x}$

alors $y = \frac{x}{\ln\left|\frac{x}{c}\right|}$ ou $y = 0$

6) $(x+y-3)dx-(x-y-1)dy=0 \iff y'=\dfrac{x+y-3}{x-y-1}$

sous la forme $y'=f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$, alors

$\delta=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2\neq 0$ avec $f(x)=x$

donc on pose $x=u+\alpha$, $y=v+\beta$ et α, β sont les solutions du système : $\begin{cases}\alpha+\beta-3=0\\ \alpha-\beta-1=0\end{cases} \Rightarrow \alpha=2$ et $\beta=1$

$\begin{cases}x=u+2\\ y=v+1\end{cases} \Rightarrow y'=v'$, en remplaçant dans (6)

on obtient $v'=\dfrac{u+v}{u-v}$ (*) équation homogène

de u et v, on pose $z=\dfrac{v}{u} \Rightarrow v=zu \Rightarrow v'=z+z'u$

donc (*) $\iff \displaystyle\int \frac{1-z}{1+z^2}\,dz=\int\frac{du}{u}$

$\iff \operatorname{arctg}(z)-\frac{1}{2}\ln(1+z^2)=\ln\left|\frac{u}{c}\right|$

La solution générale de (6) est

$$\operatorname{arctg}\left(\frac{y-1}{x-2}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1+\left(\frac{y-1}{x-2}\right)^2\right)=\ln\left|\frac{x-2}{c}\right|$$

(7) $y' = \sqrt{4x+3y+2}$ sous la forme $y' = f(ax+by+c)$

tq : $f(x) = \sqrt{x}$, on pose $u = 4x+3y+2 = ax+by+c$

alors $u' = 4 + 3y' \Rightarrow y' = \dfrac{u'-4}{3}$, en remplaçant dans (7)

on a $u' = 3\sqrt{u} + 4 \Rightarrow \displaystyle\int \frac{du}{3\sqrt{u}+4} = \int dx$

Pour $\displaystyle\int \frac{du}{3\sqrt{u}+4} = I$, on pose $z = \sqrt{u} \Rightarrow z = u^2 \Rightarrow du = 2z\,dz$

$$I = \int \frac{2z\,dz}{3z+4} = \frac{2}{3}z - \frac{8}{9}\ln|3z+4| = \int dx = x + C$$

et on a $z = \sqrt{u} = \sqrt{4x+3y+2}$, donc la solution générale de (7) est

$$\frac{2}{3}\sqrt{4x+3y+2} - \frac{8}{9}\ln\left|3\sqrt{4x+3y+2}+4\right| = x + C,\ C \in \mathbb{R}$$

Exercice 04 :

(1) $y' - \frac{y}{x} = x$ sous la forme $y' - p(x)y = q(x)$

EDO linéaire du 1er ordre non homogène ; pour la résoudre on pose : $y = uv \Rightarrow y' = u'v + v'u$

en remplaçant dans (1), on a

$\underbrace{(u' + p(x)u)v + v'u = q(x)}_{(*)} \Leftrightarrow (u' - \frac{1}{x}u)v + v'u = x$

on exige $u' - \frac{1}{x}u = 0 \Rightarrow \boxed{u = x}$ لا نشغل الثوابت

on remplace dans (*), on obtient

$v'u = \varphi(x) \Rightarrow$ ~~...~~ $v'x = x \Rightarrow v' = 1$

$\Rightarrow v = x + c$, donc $y = uv = x(x+c)$, $c \in \mathbb{R}$

ou bien, on utilise la méthode d (MVC)

<u>Ex 5</u> : Soit l'équation :

$y'(1 - \sin x \cos x) + y^2 \cos x - y + \sin x = 0$ --- $(*)$

1) on vérifie que $y_1 = \cos x$ est une solution de $(*)$ (facile)

$(*) \Leftrightarrow y' + \dfrac{\cos x}{1 - \sin x \cos x} y^2 - \dfrac{1}{1 - \sin x \cos y} y = \dfrac{-\sin x}{1 - \sin x \cos x}$ --- $(**)$

sous la forme $y' + a(x) y + b(x) y^2 = c(x)$ est une équation de Ricatti

on pose $y = y_1 + z$ (Bernoulli) ou $y = y_1 + \frac{1}{z}$ (linéaire)

$y = \cos x + \frac{1}{z}$, on remplace dans $(**)$, on trouve

$z' + z \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x - 1} = - \dfrac{\cos x}{\sin x \cos x - 1}$ EDO linéaire de 1^{er} ordre

on pose $z = uv$, alors sa solution générale est

$z = uv = \dfrac{-\sin x + c}{\sin x \cos x - 1}$, donc la solution

générale de $(*)$ est $y = \cos x + \dfrac{\sin x \cos x - 1}{-\sin x + c}$, $c \in \mathbb{R}$

(2) (1) $y' - \frac{1}{x} y = 2y^2 + \frac{1}{2x^2}$ sous la forme

$y' + \frac{a}{x} y = b(x) y^2 + \frac{c}{x^2}$, on pose $y_p = \frac{\lambda}{x} \Rightarrow$

$y_p' = -\frac{\lambda}{x^2}$, on remplace dans (1), on obtient

$\frac{-4\lambda - 4\lambda^2 + 1}{2x^2} = 0 \Rightarrow -4\lambda^2 - 4\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{2}$

alors $y_p = \frac{-1}{2x}$ solution particulière de (2).

Pour résoudre (2), on pose $y = y_p + \frac{1}{z} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{z} \Rightarrow$

$y' = \frac{1}{2x^2} - z'/z^2$, en remplaçant dans (1), elle devient linéaire de premier ordre, nous savons à résoudre.

(3) $x^2 y' + xy = -x^2 y^2 + 1 \Rightarrow \boxed{y' + \frac{1}{x} y = -y^2 + \frac{1}{x^2}}$ — (*)

Ricatti sous la forme
$y' + \frac{a}{x} y = B(x) y^2 + \frac{c}{x^2}$

on pose $y_p = \frac{\lambda}{x}$

$y_p' = -\frac{\lambda}{x^2}$

on remplace dans (*), on obtient $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$

alors $y_p = \frac{1}{x}$ ou $y_p = -\frac{1}{x}$. solution particulière

on pose $y = y_p + \frac{1}{z} = \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2}$

on les met dans (*), alors (*) devient (EDO) linéaire du premier ordre, nous savons à résoudre.

Exo6 : 1] (1) $\underbrace{\cos y}_{P(x,y)}\,dx + (\underbrace{2y - x\sin y}_{\varphi(x,y)})\,dy = 0$

On montre que (1) est une équations aux différentielles totales : on a $\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, donc elle est aux diff totales, sa solution générale est $\boxed{F(x,y) = C}$

telle que : $F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \psi(y) = \int \cos y\,dx + \psi(y)$

$$\boxed{F(x,y) = x\cos y + \psi(y)}$$

et on a $\frac{\partial F}{\partial y} = \varphi(x,y) \Rightarrow \cancel{-x\sin y} + \psi'(y) = 2y - \cancel{x\sin y}$

$\Rightarrow \psi'(y) = 2y \Rightarrow \psi(y) = y^2 + k$, donc

$$\boxed{F(x,y) = x\cos y + y^2 + k}$$

(2) $(e^{y^2}dx + 2xy\,e^{y^2}dy) + (y e^x dx + e^x dy) = 0$

$\Leftrightarrow \underbrace{(e^{y^2} + y e^x)}_{P}\,dx + (\underbrace{2xy\,e^{y^2} + e^x}_{\varphi})\,dy = 0$

on a $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y e^{y^2} + e^x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$, donc (2) aux différentielles totales, sa solution générale est $F(x,y) = C$, tq $F(x,y) = \int P\,dx + \psi(y)$

même métho de précédente, on trouve

$$F(x,y) = x e^{y^2} + y e^{x} + K$$

<u>ou bien</u> : on a dans (2) :

$e^{y^2} dx + 2xy e^{y^2} dy = d(x e^{y^2})$ et

$y e^{x} dx + e^{x} dy = d(y e^{x})$, donc

$(2) \Leftrightarrow d(x e^{y^2} + y e^{x}) = 0$, d'où la solution générale de (2) est : $F(x,y) = x e^{y^2} + y e^{x} = C$

$\boxed{2}$ (1) . $\underbrace{(x+y^2)}_{P} dx - \underbrace{2xy}_{\varphi} dy = 0$, on a $\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \neq \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -2y$

donc (1) n'est pas aux diff totales.

on cherche sur un facteur intégrant en f^{ct} de x ($\mu(x)$)

on a $\mu = \exp\left(\int \underbrace{\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)}_{-2/x} dx\right)$ [Voir le cours]

$$\mu = \exp\left(\int -\frac{2}{x} dx\right) = 1/x^2$$, alors

$\mu(x) \times (1) \Leftrightarrow \frac{x+y^2}{x^2} dx - \frac{2y}{x} dy = 0$ —— (*)

(*) est une équation aux différentielles totales.

Sa solution générale est : $F(x,y) = \ln x - y^2/x + K$

Serie N° 2

Exo 1. b) On rappelle que : $D = \left\{ \begin{array}{l} (x,y) \in \mathbb{R}, x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \\ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b \\ \text{Pour } a, b \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$

1) $\left\{ \begin{array}{l} y' = \dfrac{\cos x}{1+e^y} \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$ ...... (PC) $(x_0, y_0) = (0; y_0)$

On montre que le pb (PC) vérifie le théorème de Cauchy

Lipschitz : ~~on a~~ on a $f(x,y) = \dfrac{\cos x}{1+e^y}$.

Alors : $\left| \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \left| -\dfrac{\cos(x) e^y}{(1+e^y)^2} \right| \leq \dfrac{e^y}{(1+e^y)^2} \leq 1$

donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est bornée sur D. D'où f est lipschitzienne

par rapport à y sur D, ~~d~~ alors (PC) admet une

solution unique sur D et théorème de Cauchy Lipschitz

est vérifiée. En plus, on a

$y' = \dfrac{\cos x}{1+e^y} \Rightarrow y + e^y = \sin x + C$ et on a $y(0) = y_0$

ce qui implique $C = y_0 + e^{y_0} \Rightarrow$ la solution unique

de (PC) est : $y + e^y = \sin x + y_0 + e^{y_0}$

c) Soit $\begin{cases} y' = x + y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ --- (PC_1) $(x_0, y_0) = (0,0)$

On montre que (PC_1) admet une solution unique sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, |x| \leq a$ et $|y| \leq b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$

$f(x,y) = x + y^2$, donc $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = |2y| \leq 2b$,

Donc f est lipschitzienne par rapport y sur D, alors (PC_1) admet une solution unique sur D.

* On donne les trois approximations successives du (PC_1) :

On a $y_{n+1} = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\,dt$ $(x_0 = 0, y_0 = 0)$

$(PC_1) \Leftrightarrow y_{n+1} = \int_0^x (t + y_n^2(t))\,dt$, donc

$\underline{\underline{n=0}}$ $y_1 = \int_0^x (t + y_0^2(t))\,dt = \int_0^x t\,dt = \boxed{\frac{1}{2}x^2 = y_1}$

$\underline{\underline{n=1}}$ $y_2 = \int_0^x (t + y_1^2(t))\,dt = \int_0^x \left(t + \frac{1}{4}t^4\right)dt = \boxed{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5 = y_2}$

$\underline{\underline{n=2}}$ $\boxed{y_3 = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{20}x^5 + \frac{x^{11}}{4400} + \frac{x^8}{160} = y_3}$.

Exercice 3 :

2) $y = x(1+y') + (y')^2$ est une équation de Lagrange :

sous la forme $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ tq :

$\varphi(x) = 1 + x$ et $\psi(x) = x^2$.

Pour résoudre (2), on pose $y' = t$, alors

(2) $\Leftrightarrow y = x(1+t) + t^2$ .... (*), En dérivant (*)

par rapport à x, on trouve,

$$y' = (1+t) + xt' + 2tt' \Leftrightarrow \overset{t}{y'} = (1+t) + t'(x+2t)$$

$$\Leftrightarrow -1 = t'(x+2t)$$

on a $\boxed{-1 \neq 0}$, donc $-1 = \frac{dt}{dx}(x+2t) \Leftrightarrow$

$$-\frac{dx}{dt} = (x+2t)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dx}{dt} + x = -2t \Leftrightarrow \underbrace{x' + x = -2t}_{(**)}$$

(**) EDO linéaire du 1er ordre et l'inconnue $x(t)$

Sa solution générale est $x = (2-2t) + Ce^t$.

donc la solution générale de (2) est une solution

paramétrique : $\begin{cases} y = x(1+t) + t^2 \\ x = (2-2t) + C_1 e^t \end{cases}$

3) $y = xy' + \sqrt{1+(y')^2}$ équation de Clairaut

sous la forme $y = xy' + f(y')$ tq $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.

on pose $y' = t$, donc (3) $\Leftrightarrow$ $\boxed{y = xt + \sqrt{1+t^2} \quad \text{---} (\Delta)}$

on dérive (Δ) par rapport à x, on obtient

$$t = y' = \cancel{t} + xt' + \frac{tt'}{\sqrt{1+t^2}} \Leftrightarrow t'\left(x + \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow t' = 0 \Rightarrow t = c$, en remplaçant dans (Δ), on a.

$y = xc + \sqrt{1+c^2}$ solution générale de (3)

ou bien, $x + \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}} = 0 \Rightarrow t = \pm \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

donc $y = \mp \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1+\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}$, $x \in]-1,1[$.

Solution singulière (3')

Exercice 04 :

1) $y'' - \frac{y'x}{1+x^2} = 0$ sous la forme $F(x, y', y'') = 0$

on pose $y' = p \Rightarrow y'' = p'$, donc

$(1) \Leftrightarrow p' - \frac{x}{1+x^2} p = 0$ EDO du 1er ordre à variables separables sa solution est $p = K\sqrt{1+x^2}$

et on a $y' = p$, donc $y' = K\sqrt{1+x^2} \Rightarrow \int dy = \underbrace{\int K\sqrt{1+x^2}\,dx}_{I}$

on pose $x = sh(t) \Rightarrow dx = ch(t)\,dt$, alors

$I = \int \sqrt{1+sh^2 t}\; ch(t)\,dt = \int ch^2(t)\,dt = \int \frac{1+ch(2t)}{2}\,dt$

$I = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}sh(2t) + C$ et on a $t = argsh(x)$

donc $y = K\left(\frac{1}{2}argsh(x) + \frac{1}{4}sh(2\,argsh\,x) + C_1\right)$

est La solution generale de (1).

(3) $y'' - \frac{y'^2 y}{(1+y^2)} = 0$ sous la forme $F(y, y', y'') = 0$

on pose $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p(y)\frac{dp}{dy}$, donc

$(3) \Leftrightarrow p\frac{dp}{dy} - \frac{p^2 y}{1+y^2} = 0$ (équation diff à variables separables par rapport p et y

$\Leftrightarrow \int \frac{dp}{p} = \int \frac{y}{1+y^2}\,dy \Leftrightarrow \ln\left|\frac{p}{c}\right| = \frac{1}{2}\ln(1+y^2)$

$\Leftrightarrow \boxed{p = c\sqrt{1+y^2}}$

et on a. $y' = p \Rightarrow y' = c\sqrt{1+y^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{1+y^2}} = \int c\,dx$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{argsh}(y) = cx + k}$ La solution générale de (3)

5) $y'' + 2y' + y = e^{-x}\sin^2 x$. (EDO linéaire d'ordre 2 avec second membre)

L'équation homogène : $y'' + 2y' + y = 0$ —— (H)

L'équation caractéristique : $r^2 + 2r + 1 = 0$

$r_1 = r_2 = -1$, donc $y_h = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$

On cherche y_p : on utilise la méthode de variation des constantes (M.V.C) : on pose $y_p = C_1(x) e^{-x} + C_2(x) x e^{-x}$

Soit le système suivant :

$$(S) \text{ —— } \begin{cases} C_1'(x)\, y_1 + C_2'(x)\, y_2 = 0 \\ C_1'(x)\, y_1' + C_2'(x)\, y_2' = e^{-x}\sin x \end{cases}$$

Tqs : $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = x e^{-x}$, $y_1' = -e^{-x}$, $y_2' = (1+x) e^{-x}$

On utilise la méthode de Cramer pour résoudre le système (S) : on a $\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{-x} & x e^{-x} \\ -e^{-x} & (1-x) e^{-x} \end{vmatrix}$

$$\Delta = e^{-2x} > 0$$

Ce qui implique :

$$C_1'(x) = \frac{\Delta_{C_1'}}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^{-x} \\ e^{-x}\sin^2 x & e^{-x}(1-x) \end{vmatrix}}{\Delta} = -x\sin^2 x = C_1'(x)$$

et $C_2'(x) = \dfrac{\Delta C_2'}{\Delta}$

$$= \frac{\begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & e^{-x}\sin x \end{vmatrix}}{e^{-2x}} = \sin^2 x = C_2'(x)$$

Cela donne : $C_1(x) = \int -x\sin^2 x \, dx = \int \left(-\frac{x}{2} + \frac{x\cos(2x)}{2}\right) dx$

$$C_1(x) = -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos(2x)$$

$$C_2(x) = \int \sin^2 x \, dx = \int \frac{1-\cos(2x)}{2} \, dx$$

$$C_2(x) = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)$$

donc $y_G = y_p + y_h = \underbrace{\left(-\frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}\cos(2x)\right)}_{C_1(x)} e^{-x}$

$$+ \; x\underbrace{\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\sin(2x)\right)}_{C_2(x)} e^{-x} + \underbrace{K_1 e^{-x} + K_2 x e^{-x}}_{y_h}$$

3)