Université de Mohammed Boudiaf, M'sila
Faculté des mathématiques
L2 (S3) : 2020/2021
Mr. Bougherara Brahim

Module : Topologie des espaces métriques

Table des matières

1 Espaces métriques

Soit E un ensemble non vide.

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1.1. Une distance d sur E est une application $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait pour tout $x, y, z \in E$:

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (Séparation)
2. $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire).

Le couple (E, d) s'appelle espace métrique.

☞ **Exemple 1.1.** L'exemple fondamental d'un espace métrique est l'espace $\mathbb{R}$ avec la distance définie par d(x,y) = |x-y|. Cette distance s'appelle distance usuelle sue $\mathbb{R}$.

☞ Il est facile de vérifie que d est une distance. En effet, on a pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$

1. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow |x - y| = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = |x - y| = |y - x| = d(y, x)$.
3. $d(x, y) = |x - y| = |x - z + z - y| \leq |x - z| + |z - y| = d(x, z) + d(z, y)$.

Deux propriétés importantes de la distance sont données par la proposition suivante :

Proposition 1.1. Soit (E, d) un espace métrique. Alors la distance d satisfait les deux propriétés suivantes :

a. La distance d est positive : $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in E$.
b. Pour tout $x, y, z \in E$:
$$\boxed{|d(x, z) - d(z, y)| \leq d(x, y)} \tag{1.1}$$

Démonstration. a. Soient $x, y \in E$. En utilisant successivement les propriétés 1, 2, 3, on obtient
$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$
D'où $d(x, y) \geq 0$.

b. Soient $x, y, z \in E$. On a d'après 2 :
$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$
d'où par 2, on obtient
$$d(x, z) - d(z, y) \leq d(x, y).$$

En changeant le rôle entre x et y et par $\boxed{2}$, on a

$$d(z,y) - d(x,z) \leq d(x,y).$$

On en déduit que

$$\boxed{|d(x,z) - d(z,y)| \leq d(x,y)}. \tag{1.2}$$

□

☞ Le nombre positive $d(x,y)$ s'appelle distance entre x et y ou distance de x à y.

☞ Pour vérifie que d est une distance, en générale seul, la propriété $\boxed{3}$ qui pose un difficulté (parfois grande) contrairement aux propriétés $\boxed{1}$ et $\boxed{2}$ qui sont faciles à vérifier .

☞ **Exemple 1.2.** Soit $d : E \times E \to \mathbb{R}$ une application définie par

$$\forall x, y \in E : d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$$

Montrons que d est une distance. Soient $x, y, z \in E$. On a

$\boxed{1}$ Si $x = y$ alors $d(x,y) = 0$ (par définition) et si $x \neq y$ alors $d(x,y) = 1 \neq 0$. D'où

$$d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y.$$

$\boxed{2}$ On a $d(y,x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad y \neq x \\ 0 & \text{si} \quad y = x \end{cases} = d(x,y)$

$\boxed{3}$ • Si $x = y$ alors

$$0 = d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z)}_{\geq 0} + \underbrace{d(x,z)}_{\geq 0}.$$

• Si $x \neq y$ alors $x \neq z$ ou $y \neq z$. D'où

$$1 = d(x,y) \leq \underbrace{d(x,z) + d(z,y)}_{=1 \vee 2}.$$

Dans les deux cas, on a : $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$.

Donc d est une distance sur E. Elle s'appelle distance discrète.

1.2 Exemples de distances fondamentales

1.2.1 Distances sur $\mathbb{R}^n$

☞ **Exemple 1.3.** La distance notée d_1, est défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d_1(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|} \tag{1.3}$$

où $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_N) \in \mathbb{R}^n$ Vérifions que d_1 est bien une distance. On a pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$:

1. On a

$$\begin{aligned} d_1(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad |x_i - y_i| = 0, \ \forall i = 1, ...n. \\ &\Longleftrightarrow \quad x_i = y_i, \ \forall i = 1, ..., n. \\ &\Longleftrightarrow \quad x = y \end{aligned}$$

2. Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a

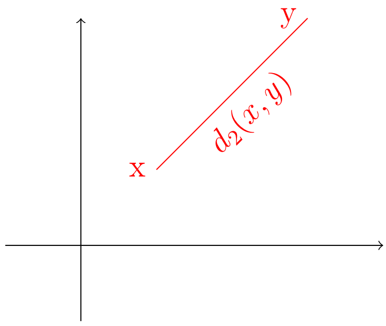
$$d_1(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i| = d_1(y,x).$$

3. Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Vérifions l'inégalité triangulaire. On a

$$\begin{aligned} d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &\leq \quad \sum_{i=1}^{n} (|x_i - z_i| + |x_i - y_i|) \\ &= \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| = d_1(x,z) + d_1(z,y). \end{aligned}$$

☞ **Exemple 1.4.** On définit sur $\mathbb{R}^n$ la distance usuelle (la distance euclidienne), notée d_2 par

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : d_2(x,y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \tag{1.4}$$



On vérifie que d_2 est une distance.

$\boxed{1}$ On a

$$d_2(x,y)=0 \iff \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}=0 \iff |x_i-y_i|^2=0,\ \forall i=1,...n.$$
$$\iff x_i=y_i,\ \forall i=1,...,n.$$
$$\iff x=y$$

$\boxed{2}$ Soient $x,y\in\mathbb{R}^n$. On a

$$d_2(x,y)\stackrel{\text{def}}{=}\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i-x_i|^2\right)^{1/2}=d_2(y,x).$$

$\boxed{3}$ Pour montrer l'inégalité triangulaire, on utilise l'inégalité de Minkowski suivant : Pour tout $a=(a_1,...,a_n)$, $b=(b_1,...,b_n)\in\mathbb{R}^n$:

$$\boxed{\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i+b_i|^2\right)^{1/2}\leq\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)^{1/2}} \tag{1.5}$$

On a pour tout $x,y,z\in\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}d_2(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2} &= \left(\sum_{i=1}^{n}|(x_i-z_i)+(z_i-y_i)|^2\right)^{1/2}\\ &\stackrel{(1.5)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2\right)^{1/2}+\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i-y_i|^2\right)^{1/2}\\ &= d_2(x,z)+d_2(z,y).\end{aligned}$$

☞ **Exemple 1.5.** La distance notée d_∞, est défini sur $\mathbb{R}^n$ par :

$$\boxed{\forall x,y\in\mathbb{R}^n : d_\infty(x,y)\stackrel{\text{def}}{=}\max_{i=1}|x_i-y_i|} \tag{1.6}$$

Vérifions que d_∞ est bien une distance. On a pour tout $x,y\in\mathbb{R}^n$:

$\boxed{1}$ On a

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) = 0 \Longleftrightarrow \max_{i=1} |x_i - y_i| = 0 &\Longleftrightarrow |x_i - y_i| = 0, \ \forall i = 1, ...n. \\ &\Longleftrightarrow x_i = y_i, \ \forall i = 1, ..., n. \\ &\Longleftrightarrow x = y \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. On a

$$d_\infty(x,y) \overset{\text{def}}{=} \max_{i=1} |x_i - y_i| = \max_{i=1} |x_i - y_i| = d_\infty(y,x).$$

$\boxed{3}$ Soient $x, y, z \in \mathbb{R}^n$. Vérifions l'inégalité triangulaire. On a

$$\begin{aligned} d_\infty(x,y) = \max_{i=1} |x_i - y_i| &= \max_{i=1} |x_i - z_i + z_i - y_i| \\ &\leq \max_{i=1} (|x_i - z_i| + |x_i - y_i|) \\ &\leq \max_{i=1} |x_i - z_i| + \max_{i=1} |z_i - y_i| = d_\infty(x,z) + d_\infty(z,y). \end{aligned}$$

1.2.2 Distances sur $\mathcal{C}([a,b];\mathbb{R})$

Notons que $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues sur l'intervalle borné $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On définit sur cette espace les trois distances suivantes

$$\boxed{d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x} \tag{1.7}$$

$$\boxed{d_2(f,g) = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{1/2}} \tag{1.8}$$

$$\boxed{d_\infty(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|} \tag{1.9}$$

pour tout $f, g \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. On vérifie que d_2 est une distance sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$. Les autres distances sont laissées à l'étudiant. Soient $f, g, h \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

$\boxed{1}$ On a :

$$\begin{aligned} d_2(f,g) = 0 \Longleftrightarrow \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 \mathrm{d}x = 0 &\Longleftrightarrow |f(x) - g(x)| = 0, \quad \forall x \in [a,b] \\ &\Longleftrightarrow f(x) = g(x) \quad \forall x \in [a,b] \\ &\Longleftrightarrow f = g. \end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Pour la symétrie, c'est évidente.

$\boxed{3}$ Pour l'inégalité triangulaire, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz suivant

$$\boxed{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2},\ \forall f,g,\in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}).} \tag{1.10}$$

On a

$$\begin{aligned}
\color{red}{d_2(f,g)^2} &= \int_a^b |f(x)-g(x)|^2\mathrm{d}x = \int_a^b |(f-h)+(h-g)|^2\mathrm{d}x \\
&\leq \int_a^b (|f-h|+|h-g|)^2\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b |f-g|^2\mathrm{d}x + \int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x + 2\int_a^b |f-h||h-g|\mathrm{d}x \\
&\overset{(1.10)}{\leq} \int_a^b |f-h|^2\mathrm{d}x + \int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x + 2\left(\int_a^b |f-h|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} \\
&= \left(\left(\int_a^b |f-h|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left(\int_a^b |h-g|^2\mathrm{d}x\right)^{1/2}\right)^2 \\
&= \color{red}{(d_2(f,h)+d_2(h,g))^2}
\end{aligned}$$

Exercice 1. Dans tous les cas suivants, est ce que l'application $d:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définit une distance sur $\mathbb{R}$?

$\boxed{1}$ $|d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|, \forall x,y\in\mathbb{R}$

$\boxed{2}$ $|d(x,y) = |x^2-y^2|, \forall x,y\in\mathbb{R}$

$\boxed{3}$ $d(x,y) = |\sin x - \sin y|, \forall x,y\in\mathbb{R}.$

Solution :

1. $d(x,y)=|\arctan x-\arctan y|$. On a pour tous $x,y,z\in\mathbb{R}$:
   - $d(x,y)=0 \Longleftrightarrow |\arctan x-\arctan y|=0 \Longleftrightarrow x=y$ (car $x\mapsto \arctan x$ est une application bijective et donc injective).
   - $d(x,y)=|\arctan x-\arctan y| = |\arctan y-\arctan x| = d(y,x)$.
   - Pour l'inégalité triangulaire, on a

   $$\begin{aligned}
   d(x,y) &= |\arctan x-\arctan z+\arctan z-\arctan y| \\
   &\leq |\arctan x-\arctan z|+|\arctan z-\arctan y| = d(x,z)+d(z,y).
   \end{aligned}$$

2. $d(x,y)=|x^2-y^2|$. d n'est une distance car l'implication $d(x,y)=0\Longrightarrow x=y$ n'est pas vrai pour tout $x,y\in\mathbb{R}$. En effet pour $x=1$ et $y=-1$ on a $d(x,y)=0$ mais $x\neq y$.

3. $d(x,y) = |\sin x - \sin y|$. d n'est pas une distance pour le même raison,. Il suffait de choisir $x = 0$ et $y = 2\pi$.

Exercice 2. Soit d une distance sur E. Posons $\delta = \frac{d}{1+d}$. Montrer que δ définit une distance sur E.

Solution : Soient $x, y, z \in E$. On a

1. $\delta(x,y) = 0 \iff \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$ car d est une distance.
2. $\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} = \frac{d(y,x}{1+d(y,x)} = \delta(y,x)$.
3. On montre l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned}
\delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} &= 1 - \frac{1}{1+d(x,y)} \\
&\leq 1 - \frac{1}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\
&= \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)+d(z,y)} + \frac{d(z,y)}{1+d(x,z)+d(z,y)} \\
&\leq \frac{d(x,z)}{1+d(x,z)} + \frac{d(z,y)}{1+d(z,y)} = \delta(x,z) + \delta(z,y).
\end{aligned}$$

Exercice 3. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application injective et soit d une distance sur F. On pose

$$\delta(x,y) := d(f(x), f(y)), \quad \forall x, y \in E.$$

Montrer que δ est une distance sur E.

Solution : Soient $x, y, z \in E$.

1. Pour la première condition, on a

$$\begin{aligned}
\delta(x,y) = 0 \iff d(f(x), f(y)) = 0 &\iff f(x) = f(y) \text{ car } d \text{ est une distance} \\
&\iff x = y \text{ car } f \text{ est une application injective}
\end{aligned}$$

2. Pour la symétrie, c'est évidente car grâce à la symétrie de d

$$\delta(x,y) := d(f(x), f(y)) = d(f(y), f(x)) = \delta(y,x).$$

3. Pour l'inégalité triangulaire, grâce à l'inégalité triangulaire appliqué sur d, on a

$$\delta(x,y) := d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(z)) + d(f(z), f(y)) = \delta(x,z) + \delta(z,y).$$

Exercice 4. Soit (E,d) un espace métrique. Soit $\varphi : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application croissante telle que

$$\varphi(0)=0, \varphi(t)>0,\ \forall t>0 \text{ et } \quad \forall t,s\geq 0 : \varphi(t+s)\leq \varphi(t)+\varphi(s),\ .$$

1 Démontrer que l'application $\varphi\circ d$ définit une distance sur E.

2 Déduire que les applications suivantes définissent des distances sur $\mathbb{R}$:

$$d^\alpha,\quad 0<\alpha\leq 1,\qquad \ln(1+d),\qquad \min\{1,d\}.$$

Solution :

1. Montrons que $\varphi\circ d$ est une distance. Soient $x,y,z\in E$. Tenant en compte le fait que d est une distance, on a
   - Pour la première condition,

     $$x=y\Longrightarrow d(x,y)=0\Longrightarrow \varphi(\underbrace{d(x,y)}_{=t})=0\Longrightarrow \varphi\circ d(x,y)=0$$

     et on a pour la deuxième implication

     $$x\neq y\Longrightarrow d(x,y)>0\Longrightarrow \varphi(\underbrace{d(x,y)}_{=t>0})>0\Longrightarrow \varphi\circ d(x,y)\neq 0.$$

     D'où $x=y\Longleftrightarrow \varphi\circ d(x,y)=0$.
   - Pour la symétrie, c'est immédiate.
   - Pour l'inégalité triangulaire, on a comme φ est croissante

     $$\begin{array}{rcl}\varphi\circ d(x,y)=\varphi(d(x,y)) & \leq & \varphi(d(x,z)+d(z,y)) \text{ car } d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)\\ & \leq & \varphi(d(x,z))+\varphi(d(z,y)) \text{ car } \varphi(t+s)\leq\varphi(t)+\varphi(s)\\ & = & \varphi\circ d(x,z)+\varphi\circ d(z,y).\end{array}$$

2. Montrons que les applications suivantes définissent des distances sur $\mathbb{R}$:

   $$d^\alpha,\quad 0<\alpha\leq 1,\qquad \ln(1+d),\qquad \min\{1,d\}.$$

   - Pour la première application, on a $d^\alpha=\varphi\circ d$ où $\varphi(t)=t^\alpha$, pour tout $t\geq 0$. Il suffit donc de vérifier que φ satisfait les mêmes hypothèse de la question 1. On a pour tout $t>0$: $\varphi'(t)=(\alpha-1)t^{\alpha-1}>0$, donc φ est croissante et on a $\varphi(0)=0$ et $\varphi(t)>0$ pour tout $t>0$ D'autre part, on a

     $$\varphi(s+t)=(s+t)^\alpha\leq s^\alpha+t^\alpha=\varphi(s)+\varphi(t) \text{ dès que } \alpha\in]0,1]$$

     Pour voir cela il suffit de vérifier que la fonction $f_s(t)=(t+s)^\alpha-s^\alpha+t^\alpha$, pour $t,s\geq 0$ est décroissante).

- Pour la deuxième application, on a $\ln(1+d) = \varphi \circ d$ où $\varphi(t) = \ln(1+t)$, pour tout $t \geq 0$. Il est claire que φ est croissante et $\varphi(0) = 0, \ : \varphi(t) > 0, \ \forall t > 0$. D'autre part on a pour tout $t, s \geq 0$

$$\begin{aligned} \varphi(s+t) = \ln(1+s+t) \leq \ln(1+s+t+st) &= \ln[(1+s)(1+t)] \\ &= \ln(s) + \ln(t) = \varphi(s) + \varphi(t). \end{aligned}$$

- Pour la troisième application, on a $\min\{1, d\} = \varphi \circ d$ où $\varphi(t) = \min\{1, t\}$, pour tout $t \geq 0$. On a $\varphi(0) = \min\{1, 0\} = 0$ et $\forall t > 0 : \varphi(t) = \min\{1, t\} > 0$ et on a pour la croissance : si $0 \leq s < t$, alors :
  Si $s \leq 1$ alors $\varphi(s) = \min\{1, s\} = s \leq \min\{1, t\} = \varphi(t)$.
  Si $s \geq 1$ alors $\varphi(s) = \min\{1, s\} = 1 \min\{1, t\} = \varphi(t)$ car $t > s > 1$.
  D'autre part, on a pour $s, t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \varphi(s+t) &= \min\{1, s+t\} \\ &= \min\{1, 1+s, 1+t, s+t\} \text{ car } 1+s \geq 1, 1+t \geq 1 \\ &= \min\{1, s\} + \min\{1, t\} \text{ car } \min A + B = \min A + \min B \\ &= \varphi(s) + \varphi(t). \end{aligned}$$

  CQFD.

1.3 Ouverts et fermés

1.3.1 Boule ouverte et fermée

On définit certains notions mathématiques, en s'inspirant de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace.

Définition 1.2. Soient (E, d) en espace métrique, $a \in E$, $r \geq 0$.

1. La boule ouverte de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\boxed{B(a, r) := \{x \in E : d(a, x) < r\}.}$$

2. La boule fermée de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\boxed{\overline{B}(a, r) := \{x \in E : d(a, x) \leq r\}.}$$

3. La sphère de centre a et de rayon r est l'ensemble :

$$\boxed{S(a, r) := \{x \in E : d(a, x) = r\}.}$$

☞ **Remarque 1.1.** Lorsque $r = 0$, alors

$$\boxed{B(a, 0) = \phi \text{ et } \overline{B}(a, 0) = S(a, 0) = \{a\}}$$

Exercice 5 (Très facile). *Montrer que* $\boxed{\overline{B}(a, r) = B(a, r) \cup S(a, r).}$ $\boxed{S(a, r) = \overline{B}(a, r) \setminus B(a, r).}$

☞ **Exemple 1.6.** 1. Soit $E = \mathbb{R}$, muni de la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$ On a montré que d est une distance sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} B(a, r) := \{x \in \mathbb{R} : d(a, x) < r\} &= \{x \in \mathbb{R} : |x - r| < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : -r < x - a < r\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\} \\ &=]a - r, a + r[\end{aligned}$$

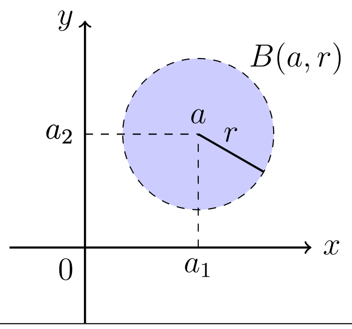
De la même façon, on obtient la boule fermée $\overline{B}(a, r) = [a - r, a + r]$. Pour la sphère, on a

$$S(a, r) = \overline{B}(a, r) \setminus B(a, r) = \{a - r, a + r\}.$$

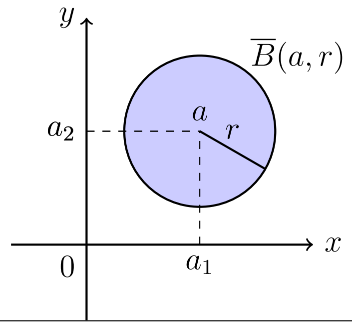
2. $E = \mathbb{R}^2$ avec la distance euclidienne $d_2(x, y) := ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$. (ici, on a $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.) Alors, on a pour $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$B(a, r) := \{x \in \mathbb{R}^2 : d_2(a, x) < r\} = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < r^2\}$$

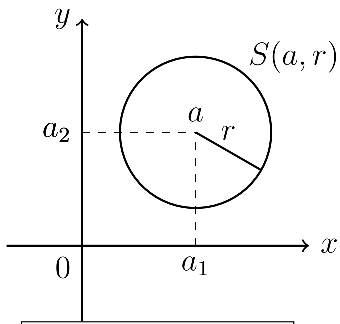
C'est le disque de centre a et de rayon r privée de sa frontière.



Boule ouverte $B(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$



Boule fermée $\overline{B}(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$

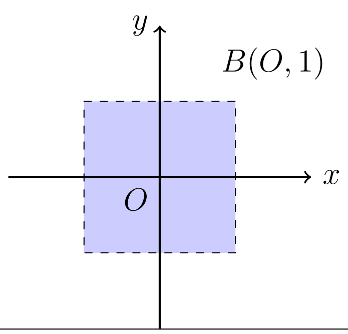


La sphère dans $\mathbb{R}^2$

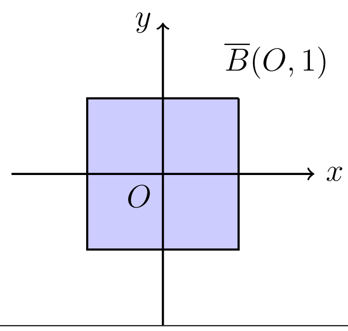
3 $E = \mathbb{R}^2$ avec la distance $d_\infty(x,y) := \max\{|x_1 - x_2|, |x_2 - y_2|\}$. Calculons la boule unité (de centre $O = (0,0)$ et de rayon 1).

$$\begin{aligned} B(O,1) &:= \{X = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x-0|, |y-0|\} < 1\} && (1.11) \\ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1 \wedge |y| < 1\} && (1.12) \end{aligned}$$

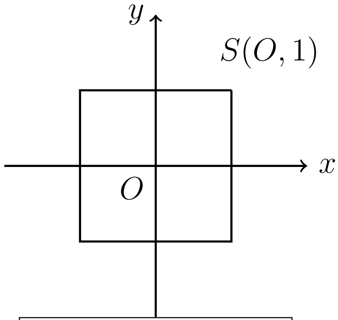
C'est le carré centré en O et de longueur de coté 2, comme la figure le montre :



Boule ouverte $B(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$



Boule fermée $\overline{B}(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$

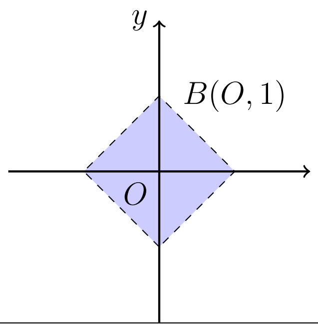


La sphère dans $\mathbb{R}^2$

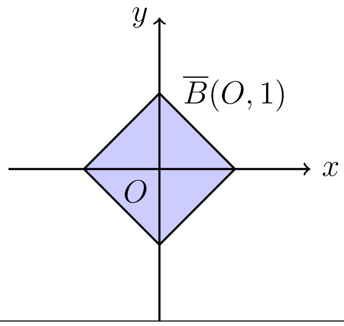
$\boxed{4}$ $E = \mathbb{R}^2$ avec la distance $d_1(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$. Calculons La boule unité (ouverte). On a

$$\begin{aligned} B(O,1) &:= \{(x,y) : |x-0| + |y-0| < 1\} = \{(x,y) : |x| + |y| < 1\} \\ &= \{(x,y) : x+y<1 \wedge x-y<1 \wedge -x+y<1 \wedge -x-y<1\}. \end{aligned}$$

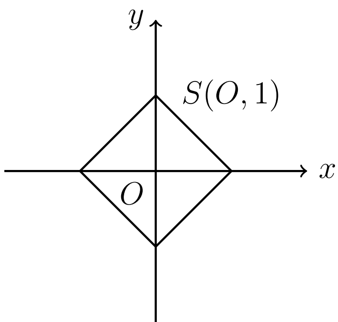
(ici, on a distingué les 4 cas : $x, y \geq 0$, $x \geq 0$, $y \leq 0$, $x \leq 0$, $y \geq 0$ et $x, y \leq 0$) On obtient donc un losange. et les figures suivantes montrent les boules ouverte et fermée et la sphère.



Boule ouverte $B(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$



Boule fermée $\overline{B}(a,r)$ dans $\mathbb{R}^2$



La sphère dans $\mathbb{R}^2$

Exercice 6. *Soit (E,d) un espace métrique. Trouver la boule ouverte, fermée et la sphère (de centre a et de rayon $r > 0$) par rapport aux distances suivantes.*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad x \neq y \\ 0 & si \quad x = y \end{cases}, \quad \delta(x,y) = \ln(1 + d(x,y)), \quad \delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}.$$

Solution : Soient $a \in E$ et $r > 0$.

$\boxed{1}$ Pour la distance $d(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$

- La boule ouverte

$$\begin{aligned} B(a,r) &:= \{x \in E : d(a,x) < r\} \\ &= \begin{cases} \{x \in E : d(a,x) = 0\} & \text{si} \quad 0 < r \leq 1 \\ \\ \{x \in E : d(a,x) = 0 \vee d(a,x) = 1\} & \text{si} \quad r > 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \{a\} & \text{si} \quad 0 < r \leq 1 \\ \\ E & \text{si} \quad r > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- La boule fermée

$$\begin{aligned} \overline{B}(a,r) &:= \{x \in E : d(a,x) < r\} \\ &= \begin{cases} \{x \in E : d(a,x) = 0\} & \text{si} \quad 0 < r < 1 \\ \\ \{x \in E : d(a,x) = 0 \vee d(a,x) = 1\} & \text{si} \quad r \geq 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \{a\} & \text{si} \quad 0 < r < 1 \\ E & \text{si} \quad r \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

- La sphère

$$S(a,r) := \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r) = \begin{cases} \phi & \text{si} \quad r \neq 1 \\ E \setminus \{a\} & \text{si} \quad r = 1 \end{cases}$$

$\boxed{2}$ Pour la distance $\delta(x,y) = \ln(1 + d(x,y))$.

- La boule ouverte

$$\begin{aligned} B(a,r) &:= \{x \in E : \delta(a,x) < r\} = \{x \in E : \ln(1 + d(a,x)) < r\} \\ &= \{x \in E : d(a,x) < e^r - 1\} \\ &= B_d(a, e^r - 1) \end{aligned}$$

- La boule fermée

$$\begin{aligned} \overline{B}(a,r) &:= \{x \in E : \delta(a,x) \leq r\} = \{x \in E : \ln(1 + d(a,x)) \leq r\} \\ &= \{x \in E : d(a,x) \leq e^r - 1\} \\ &= \overline{B}_d(a, e^r - 1) \end{aligned}$$

- La sphère

$$S(a,r) := \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r) = S_d(a,r).$$

- La boule ouverte

$$\begin{aligned}
B(a,r) &:= \{x \in E : \delta(a,x) < r\} = \{x \in E : \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < r\} \\
&= \{x \in E : (1-r)d(a,x) < r\} \\
&= \begin{cases} \{x \in E : d(a,x) < \frac{r}{1-r}\} & \text{si} \quad 0 < r < 1 \\ \{x \in E : d(a,x) \geq 0\} & \text{si} \quad r \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} B_d(a, \frac{r}{1-r}) & \text{si} \quad 0 < r < 1 \\ E & \text{si} \quad r \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

- La boule fermée

$$\begin{aligned}
\overline{B}(a,r) &:= \{x \in E : \delta(a,x) \leq r\} = \{x \in E : \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \leq r\} \\
&= \{x \in E : (1-r)d(a,x) \leq r\} \\
&= \begin{cases} \{x \in E : d(a,x) \leq \frac{r}{1-r}\} & \text{si} \quad 0 < r < 1 \\ \{x \in E : d(a,x) \geq 0\} & \text{si} \quad r \geq 1 \end{cases} \\
&= \begin{cases} \overline{B}_d(a, \frac{r}{1-r}) & \text{si} \quad 0 < r < 1 \\ E & \text{si} \quad r \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

- La sphère

$$S(a,r) := \overline{B}(a,r) \setminus B(a,r) = \begin{cases} S_d(a, \frac{r}{1-r}) & \text{si} \quad 0 < r < 1 \\ \phi & \text{si} \quad r \geq 1 \end{cases}$$

Proposition 1.2. *Soit (E,d) un espace métrique avec E est non vide.*

$\boxed{1}$ *Soient $a \in E$ et $r \geq 0$. Alors la boule ouverte $B(a,r)$ satisfait la propriété suivante :*

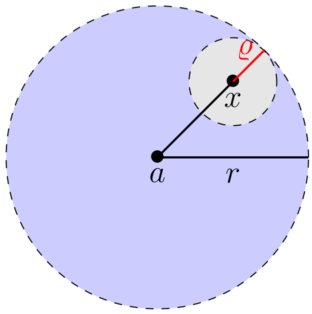
$$\forall x \in B(a,r), \exists \varrho > 0 : B(x,\varrho) \subset B(a,r). \tag{1.13}$$

(On accepte que l'ensemble vide $\phi := B(a,0)$ satisfait cette propriété).

$\boxed{2}$ *Soit $A \subset E$. Alors A est un réunion des boules ouvertes si et seulement si*

$$\forall x \in A, \exists \varrho > 0 : B(x,\varrho) \subset A. \tag{1.14}$$

Démonstration. 1 Soit $x \in B(a, r)$.



Il suffit de choisir $0 < \varrho \leq r - \delta(a, x)$. En effet, on vérifie que $B(x, \varrho) \subset B(a, r)$. Soit $y \in B(x, \varrho)$. Montrons que $y \in B(a, r)$. Il suffit de montrer que $d(a, y) < r$. On a par l'inégalité triangulaire

$$d(a, y) \leq d(a, x) + d(x, y) < d(a, x) + \varrho = r.$$

2 On démontre les deux implications.

$\Longrightarrow$) Supposons que A est réunion des boules ouvertes. Alors

$$A = \bigcup_{i \in I} B(x_i, r_i), \quad \text{où } I \text{ est un ensemble non vide.}$$

Montrons (1.14). Soit $x \in A$, Alors $\exists\, i \in I : x \in B(x_i, r_i) \subset A$ et d'après (1.13), $\exists\, \varrho > 0 : B(x, \varrho) \subset B(x_i, r_i)$. Par conséquent $B(x, \varrho) \subset A$.

$\Longleftarrow$) Supposons que (1.14) est satisfait et montrons que A est un réunion des boules ouvertes. D'après (1.14), $\forall x \in A : \exists\, r_x > 0 : B(x, r_x) \subset A$. D'où

$$\bigcup_{x \in A} B(x, r_x) \subset A.$$

D'autre part, on a

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subset \bigcup_{x \in A} B(x, r_x).$$

On en déduit que $A = \bigcup_{x \in A} B(x, r_x)$ (c'est un réunion des boules ouvertes). CQFD.

□

1.3.2 Ouverts et fermées, Adhérence, intérieur et frontière

La proposition précédente motive la définition suivante

Définition 1.3 (ouvert, fermé). Soit (E, d) un espace métrique et soit $A \subset E$.

a On dit que A est un ouvert s'il est réunion de boules ouvertes

b On dit que A est fermé si son complémentaire est ouvert.

☞ **Remarque 1.2.** D'après la proposition 1.13, un ensemble A est un ouvert s'il satisfait la propriété (1.14).

☞ **Exemple 1.7.** Soit (E, d) un espace métrique.

1 La boule ouverte est un ouvert (évidente).

2 L'ensemble vide est un ouvert car $\phi = B(a,0)$ (c'est la boule ouverte de rayon 0).

3 L'ensemble E est un ouvert, car on peut écrire E sous la forme

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B(a,n), \text{ avec } a \in E.$$

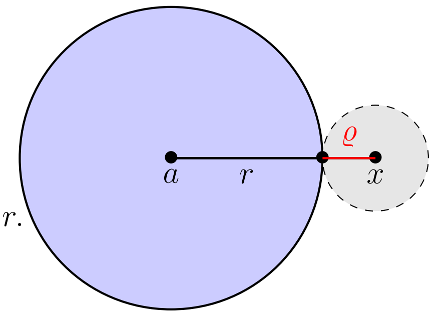
4 D'après ii) et iii), ϕ et E sont des ouverts et fermés à la fois.

5 La boule fermée est un fermé : En effet, il suffit de montrer que $C_E\overline{B}(a,r)$ est ouvert. Pour cela on montre que

$$\forall x \in C_E\overline{B}(a,r), \exists \varrho > 0 : B(x,\varrho) \subset C_E\overline{B}(a,r).$$

Soit $x \in C_E\overline{B}(a,r)$. Alors $d(x,a) > r$. Posons $\varrho = d(x,a) - r > 0$. On alors $B(x,\varrho) \subset C_E\overline{B}(a,r)$, car si $y \in B(x,\varrho)$, alors

$$\begin{aligned} d(a,y) &\geq |d(a,x) - d(x,y)| \\ &= |r + \varrho - \underbrace{d(x,y)}_{<\varrho}| > r + \varrho - \varrho = r. \end{aligned}$$



Donc $y \notin \overline{B}(a,r)$, i.e. $y \in C_E\overline{B}(a,r)$.

On a besoin de cette notion de distance entre un élément x et un ensemble A.

Définition 1.4. Soient (E,d) un espace métrique, $x \in E$ et A une partie non vide de E. On appelle distance de x à A le nombre positive

$$d(x,A) := \inf_{y\in A} d(x,y) := \inf\{d(x,y) : y \in A\}. \tag{1.15}$$

☞ **Remarque 1.3.** a En utilisant la caractérisation de la borne inférieur, on a

$$\alpha = d(x,A) \iff \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A : d(x,y) < \alpha + \varepsilon$$

et en particulier

$$\begin{aligned} d(x,A) = 0 &\iff \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A : d(x,y) < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 : A \cap B(x,\varepsilon) \neq \phi. \end{aligned}$$

b Si $x \in A$ alors $d(x,A) = 0$. En effet

$$0 \leq d(x,A) := \inf_{y\in A} d(x,y) \leq d(x,x) = 0.$$

c Si $A = \phi$, alors on prolonge la définition en posant $d(x,A) = +\infty$.

Exercice 7. Soit A un ensemble non vide d'un espace métrique (E, d). Montrer que

$$\forall x, y \in E : |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y). \tag{1.16}$$

Solution : Soient $x, y \in E$. On a

$$\begin{aligned} d(x, A) &:= \inf_{z \in A} d(x, z) \leq \inf_{z \in A}(d(x, y) + d(y, z)) \\ &\leq d(x, y) + \inf_{z \in A} d(y, z) = d(x, y) + d(y, A). \end{aligned}$$

D'où $d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$. Par symétrie, on en déduit que

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y).$$

Définition 1.5. Soient (E, d) un espace métrique et A une partie non vide de E.

1. L'adhérence de A, noté $\overline{A}$, est défini par

$$\boxed{\overline{A} := \{x \in E : d(x, A) = 0\}} \tag{1.17}$$

et un point de $\overline{A}$ s'appelle **point adhérent de A**.

2. L'intérieur de A, noté $\mathring{A}$, est l'ensemble défini par

$$\boxed{\mathring{A} := \{x \in A \ / \ \exists r > 0 : B(x, r) \subset A\}} \tag{1.18}$$

et un point x de $\mathring{A}$ s'appelle **point intérieur de** A et dans ce cas, on dit que A est **un voisinage** de x.

3. La frontière de A, noté $\mathsf{Fr}A$,est l'ensemble :

$$\boxed{\mathsf{Fr}A := \overline{A} \setminus \mathring{A}.} \tag{1.19}$$

☞ **Remarque 1.4.** *1. D'après les définition, il est claire que $\mathring{A} \subset A$ et $A \subset \overline{A}$.*

2. A est ouvert si et seulement si A est un voisinage de tous ses points.

☞ **Exemple 1.8.** a Si E est muni de la distance discrète $d(x, y) = 0$ si $x = y$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. Soit $A = \{a\} \subset E$. Calculons $\mathring{A}$ et $\overline{A}$. Pour $\mathring{A}$, on a $\mathring{A} \subset A$. Il suffit donc de tester si $a \in \mathring{A}$ ou pas. On a

$$B(a, 1/2) := \{x \in E : d(a, x) < 1/2\} = \{x \in E : d(a, x) = 0\} = \{a\}.$$

Par conséquent $a \in B(a, 1/2) \subset A$. Donc $\mathring{A} = \{a\} = A$. Pour $\overline{A}$, on a

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow d(x, A) = 0 \Longleftrightarrow d(x, a) = 0 \Longleftrightarrow x = a.$$

D'où $\overline{A} = \{a\} = A$.

$\boxed{b}$ Soit $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$. Posons $A = [0,1[$. Calculons $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$. Pour $\overset{\circ}{A}$, on a $\overset{\circ}{A} \subset A$. Soit $x \in A = [0,1[$. Si $x = 0$, alors pour tout $r > 0$: $B(0,r) =]-r, +r[\not\subset [0,1[$ et donc $x = 0 \notin \overset{\circ}{A}$. Si $x \in]0,1[$, alors $B(x,r) =]x-r, x+r[\subset [0,1[$, où $r = \min\{x, 1-x\}$. Donc $x \in \overset{\circ}{A}$. Par conséquent $\overset{\circ}{A} =]0,1[$. Pour $\overline{A}$. On a $A \subset \overline{A}$. Soit $x \in A^c$. Si $x = 1$ alors pour tout $y \in A$: $d(x,y) = 1-y$. D'où $d(1,A) = \inf_{y\in A} d(1,y) = \inf_{y\in A}(1-y) = 0$. Donc $1 \in \overline{A}$. Si $x < 0$ ou $x > 1$, alors

$$\begin{aligned}
\forall y \in A : d(x,y) = |x-y| &= \begin{cases} x-y & \text{si} \quad x > 1 \\ y-x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \\
&> \begin{cases} x-1 & \text{si} \quad x > 1 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \\
&\geq \min\{-x, x-1\} > 0
\end{aligned}$$

Donc $d(x,A) > 0$. Donc $x \notin \overline{A}$. Par conséquent $\overline{A} = [0,1]$.

La proposition suivante donne des propriétés très importantes à ces notions :

Proposition 1.3. Soient (E,d) un espace métrique et A est un ensemble non vide de de E. Alors :

$\boxed{1}$ $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.

$\boxed{2}$ $\overline{A}$ est fermé.

$\boxed{3}$ $\overline{A}^{\,c} = \overset{\circ}{A^c}$ (le complémentaire de l'adhérence est égale à l'intérieur de complémentaire).

$\boxed{4}$ $\overset{\circ}{A}$ est le plus grande ouvert inclus dans A.

$\boxed{5}$ $\overline{A}$ est le plus petit fermé qui contient A.

Démonstration. $\boxed{1}$ Montrons que $\overset{\circ}{A}$ est ouvert. c'est à dire on montre que

$$\forall x \in \overset{\circ}{A}, \exists r > 0 : B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}.$$

Soit $x \in \overset{\circ}{A}$. Alors, par définition, $\exists r > 0 : B(x,r) \subset A$. Montrons que $B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}$. Soit $y \in B(x,r)$, d'où d'après (1.13) $\exists\ \varrho > 0 : B(y,\varrho) \subset B(x,r) \subset A$ et donc $y \in \overset{\circ}{A}$. Par conséquent $B(x,r) \subset \overset{\circ}{A}$.

$\boxed{2}$ Il suffit de montrer que $(\overline{A})^c$ est ouvert. Soit $x \in (\overline{A})^c$. Alors $d(x,A) := r > 0$. c'est à dire

$$\forall y \in A : d(x,y) \geq d(x,A) = r \quad (\text{car } d(x,A) := \inf_{z\in A} d(x,z) \leq d(x,y)).$$

Ce qui implique $A \cap B(x,r) = \phi$. Montrons que $B(x,r) \subset (\overline{A})^c$. Soit $y \in B(x,r)$, alors d'après (1.13), $\exists\ \varrho > 0 : B(y,\varrho) \subset B(x,r)$. D'où $B(y,\varrho) \cap A = \phi$, c'est à dire

$$\forall z \in A : (y,z) \geq \varrho > 0.$$

Par conséquent $d(y,A) := \inf_{z \in A} d(y,z) \geq \varrho > 0$. D'où $y \notin \overline{A}$ et et donc $y \in (\overline{A})^c$. D'où $B(x,r) \subset (\overline{A})^c$. Donc $(\overline{A})^c$ est ouvert.

3 On a

$$\begin{aligned} x \in (\overline{A})^c \iff d(x,A) > 0 &\iff \inf_{y \in A} d(x,y) := r > 0 \\ &\iff \forall y \in A : d(x,y) \geq r \iff \forall y \in A : y \notin B(x,r) \\ &\iff A \cap B(x,r) = \phi \iff B(x,r) \subset A^c \\ &\iff x \in \mathring{A^c}. \end{aligned}$$

D'où $(\overline{A})^c = \mathring{A^c}$.

4 Soit B un ouvert inclus dans A. Montrons que $B \subset \mathring{A}$. Soit $x \in B$. Comme B est un ouvert alors $\exists r > 0 : B(x,r) \subset B \subset A$. Donc $x \in \mathring{A}$. Donc $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.

5 Soit F un fermé qui contient A. Montrons que $\overline{A} \subset F$. On a $F^c \subset A^c$ et comme F^c est ouvert, d'après les deux point précédents $F^c \subset \mathring{A^c} = (\overline{A})^c$. Donc $\overline{A} \subset F$.

□

Corollaire 1.4. Soient (E,d) un espace métrique et A est un ensemble non vide de de E. Alors :

1 $\boxed{\text{(A est fermé)} \iff A = \overline{A}.}$

2 $\boxed{\text{(A est ouvert)} \iff A = \mathring{A}.}$

3 $\boxed{x \in \overline{A} \iff \forall r > 0 : B(x,r) \cap A \neq \phi.}$

4 $\boxed{x \in \mathring{A} \iff \exists r > 0 : B(x,r) \subset A.}$

Démonstration. En exercice. □

Exercice 8. *Soit (E,d) un espace métrique, où d est la distance discrète.*

1. *Calculer la boule ouverte et la boule fermé de centre a et de rayon 1.*
2. *Calculer l'adhérence de $B(a,1)$.*
3. *Conclure.*

Solution :

1 D'après l'exercice 6, on a

$$B(a,r) = \{a\} \text{ et } \overline{B}(a,r) = E.$$

2 Calculons l'adhérence de $B(a,1)$. Soit $x \in E$. On a

$$x \in \overline{B(a,r)} \iff d(x, B(a,r)) = 0 \iff d(x,a) = 0 \iff x = a.$$

D'où $\overline{B(a,r)} = \{a\}$.

3 On observe que $\overline{B(a,r)} \neq \overline{B}(a,r)$. Donc, on déduit que l'adhérence de la boule ouverte et la boule fermée ne sont pas toujours égales.

Proposition 1.5. Soient (E,d) un espace métrique, A et B deux parties de E.

1 $\boxed{A \subset B \Longrightarrow (\mathring{A} \subset \mathring{B} \wedge \overline{A} \subset \overline{B}).}$

2 $\boxed{\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B},\ \mathring{A} \cup \mathring{B} \subset \overbrace{A \cup B}^{\circ}.}$

3 $\boxed{\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B},\ \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}.}$

Exercice 9. *Démontrer la proposition précédente*

Solution :

1 Supposons que $A \subset B$ et montrons que $(\mathring{A} \subset \mathring{B} \wedge \overline{A} \subset \overline{B})$. Soit $x \in \mathring{A}$. Alors, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset A$ et comme $A \subset B$, alors $B(x,r) \subset B$. D'où $x \in \mathring{B}$. Donc $\mathring{A} \subset \mathring{B}$. Soit maintenant $x \in \overline{A}$. Alors par définition $d(x,A) = 0$ et comme $A \subset B$, alors

$$0 = d(x,A) := \boxed{\inf_{y \in A} d(x,y) \geq \inf_{y \in B} d(x,y)} := d(x,B) \geq 0.$$

D'où $d(x,B) = 0$ et donc $x \in \overline{B}$. D'où $\overline{A} \subset \overline{B}$.

2 Montrons que $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Soit $\boxed{x \in \overbrace{A \cap B}^{\circ}}$, alors $\exists r > 0 : B(x,r) \subset A \cap B$. D'où $B(x,r) \subset A$ et $B(x,r) \subset B$, et donc $x \in \mathring{A}$ et $x \in \mathring{B}$. D'où $\boxed{x \in ocA \cap \mathring{B}}$. D'où $\overbrace{A \cap B}^{\circ} \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$. D'autre part, on a $\mathring{A} \subset A$ et $\mathring{B} \subset B$. D'où $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset A \cap B$. Comme $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert et $\overbrace{A \cap B}^{\circ}$ et le plus grand ouvert contenu dans $A \cap B$ (voir Proposition 1.3), alors on en déduit que $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subset \overbrace{A \cap B}^{\circ}$.

$\boxed{3}$ Montrons que $\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}}$. On sait que $A \subset \overline{A}$ et $B \subset \overline{B}$. D'où $A \cup B \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ qui est fermé et comme $\overline{A \cup B}$ et le plus petit fermé qui contient $A \cup B$ (voir Proposition 1.3), alors $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. D'autre part, on a $A \subset A \cup B$ et donc $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$, de même $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.

Exercice 10. Trouver les ouvert et les fermés de l'espace métrique (E, d) dans les cas suivants

1. $E = \mathbb{R}$ et d est la distance usuelle.
2. d est la distance discrète.

Solution : Il suffit de déterminer les boules ouvertes.

1. $E = \mathbb{R}$ et d est la distance usuelle. Alors, on sait que $B(a, r) =]a - r, a + r[$ et comme a et r sont quelconque, alors les boules ouvertes sont les intervalles ouverts de la forme $]a, b[$. Donc les ouvert sont les réunions des intervalles ouverts. Comme les fermés sont par définitions les complémentaires des ouverts, alors les parties fermées de E sont les intersections des intervalles fermées.
2. d est la distance discrète. Pour $0 < r < 1$, on sait que $B(a, r) = \{a\}$. Donc pour tout partie $A \subset E$, on a
$$A := \cup_{a \in A} \{a\} = \cup_{a \in A} B(a, r).$$
D'où A est réunion de boules ouvertes et donc c'est un ouvert. D'où les ouverts de E sont toutes les parties de E. Comme toute partie A est le complémentaire de $A^c \subset E$, alors A est aussi une partie fermée. D'où les fermés de E sont toute les parties de E.

Exercice 11. Soit (E, d) un espace métrique. Soit $a \in E$. On définit l'application d_a sur $E \times E$ par
$$d_a(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = y \\ d(a, x) + d(a, y) & \text{si} \quad x \neq y \end{cases}$$

1. Montrer que d_a est une distance sur E.
2. Calculer la boule ouverte $B_{d_a}(a, r)$ en fonction de $B_d(a, r)$.
3. Même question pour la boule ouverte $B_{d_a}(b, r)$ avec $b \neq a$.
4. Si $A \subset E$ et $a \notin A$, montrer que A est un ouvert de (E, d_a).
5. Si $A \subset E$ et $a \in A$, montrer que A est un ouvert de (E, d_a) si et seulement si A est un voisinage de a par rapport à d (i.e. $a \in \overset{\circ}{A}$).

Solution :

1. Montrons que d_a est une distance sur E. Soient $x, y, z \in E$

- Montrons que $d(x,y) \iff x = y$. On a

$$\boxed{x = y} \Longrightarrow \boxed{d_a(x,y) \overset{\text{def}}{=} 0}.$$

$$\begin{aligned}
\boxed{x \neq y} \Longrightarrow (x \neq a \vee y \neq a) \quad &\Longrightarrow \quad (d(a,x) > 0 \vee (a,y) > 0) \\
&\Longrightarrow \quad d_a(x,y) := d(a,x) + d(a,y) > 0 \\
&\Longrightarrow \quad \boxed{d_a(x,y) \neq 0}.
\end{aligned}$$

- Pour la symétrie c'est évident.
- Montrons l'inégalité triangulaire. Si $x = y$, alors $d_a(x,y) \overset{\text{def}}{=} 0$. Et on a $d_a(x,z) \geq 0$ et $d_a(z,y) \geq 0$. D'où

$$d_a(x,y) = 0 \leq d_a(x,z) + d_a(z,y).$$

Si $x \neq y$, alors $d_a(x,y) \overset{\text{def}}{=} \boxed{d(a,x) + d(a,y)}$ et on a

$$d_a(x,z) + d_a(z,y) = \begin{cases} \boxed{d(a,x) + d(a,y)} & \text{si} \quad z = x \wedge z \neq y \\ \boxed{d(a,x) + d(a,y)} & \text{si} \quad z \neq x \wedge z = y \\ \boxed{d(a,x) + d(a,y)} + 2d(a,z) & \text{si} \quad z \neq x \wedge z \neq y \end{cases}$$

Dans tous les cas, on remarque que $d_a(x,y) \leq d_a(x,z) + d_a(z,y)$.

2. Calculons la boule ouverte $B_{d_a}(a,r)$ en fonction de $B_d(a,r)$. On a

$$B_{d_a}(a,r) \overset{\text{def}}{=} \{x \in E : d_a(a,x) < r\}$$

et on a

$$\begin{aligned}
d_a(a,x) \quad &\overset{\text{def}}{=} \quad \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a = x \\ d(a,a) + d(a,x) & \text{si} \quad a \neq x \end{cases} \\
&= \quad \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a = x \\ d(a,x) & \text{si} \quad a \neq x \end{cases} \\
&= \quad d(a,x)
\end{aligned}$$

D'où

$$B_{d_a}(a,r) = \{x \in E : d(a,x) < r\} := B_d(a,r).$$

3. Calculons la boule ouverte $B_{d_a}(b,r)$ en fonction de $B_d(a,r)$ où $b \neq a$. On a

$$B_{d_a}(a,r) \overset{\text{def}}{=} \{x \in E : d_a(b,x) < r\}$$

Soit $x \in E$. On a

$$d_a(b,x) < r \iff \begin{cases} 0 < r \wedge x = b \\ \vee \\ d(a,b) + d(a,x) < r \wedge x \neq b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = b \\ \vee \\ d(a,x) < r - d(a,b) \quad \wedge \quad x \neq b \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = b \\ \vee \\ d(a,x) < r - d(a,b) \end{cases}$$

- Si $r \leq d(a,b)$ alors

$$d_a(b,x) < r \iff \begin{cases} x = b \\ \vee \\ d(a,x) < 0 \end{cases} \qquad \iff x = b.$$

  Donc $B_{d_a}(b,r) = \{b\}$.

- Si $r > d(a,b)$ alors

$$d_a(b,x) < r \iff \begin{cases} x = b \\ \vee \\ x \in B_d(a, r - d(a,b) \end{cases}$$

  Donc $B_{d_a}(b,r) = \{b\} \cup B_d(a,r)$.

4. Soit $A \subset E$ avec $a \notin A$. Montrons que A est un ouvert. Il suffit de montrer que A est un réunion de boules ouvertes. On a pour tout $b \in A : a \neq b$. Soit $0 < r < d(a,b)$. Alors d'après la question précédente $B_{d_a}(b,r) = \{b\}$. D'où

$$A := \cup_{b\in A}\{b\} = \cup_{b\in A} B_{d_a}(b,r).$$

   D'où A est un ouvert de (E, d_a).

5. On démontrer les deux implications.

$$\boxed{A \text{ est ouvert de } (E,d_a)} \iff \forall x \in A, \exists r > 0 : B_{d_a}(x,r) \subset A$$
$$\implies \text{Pour } x = a \in A, \exists r > 0 : B_{d_a}(a,r) \subset A$$
$$\overset{question2}{\implies} \exists r > 0 : B(a,r) = B_{d_a}(a,r) \subset A$$
$$\implies \boxed{A \text{ est un voisinage de } a \text{ dans } (E,d).}$$

$$\boxed{A \text{ est un voisinage de } a \text{ dans } (E,d).} \iff \exists r > 0 : B(a,r) = B_{d_a}(a,r) \subset A$$
$$\iff A = (A \setminus \{a\}) \cup B_{d_a}(a,r)$$
$$\implies \boxed{A \text{ est ouvert de } (E,d_a)}$$

   (car $A \setminus \{a\}$ et $B_{d_a}(a,r)$ sont des ouverts).

1.4 Suites et applications dans un espace métrique

1.4.1 Suites dans un espaces métriques

Rappelons la définition d'une suite de E. C'est une application de $\mathbb{N}$ vers E, qui à n associe $u_n \in E$. La définition naturelle de la convergence d'une suite dans un espace métrique (E, d) est comme suivant :

Définition 1.6. *Soient (E, d) un espace métrique, $(u_n)_n$ une suite de E et $u \in E$. On dit que la suite $(u_n)_n$ converge vers u si*

$$\lim_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0$$

et u s'appelle une limite de u.

☞ **Remarque 1.5.**

- Comme $d(u_n, u) \in \mathbb{R}$, alors il est bien connue que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow d(u_n, u) \leq \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow u_n \in B(u, \varepsilon)\end{aligned}$$

- La limite u de la suite $(u_n)_n$ est unique. En effet s'il y a une autre limite $v \in E$ alors

$$0 \leq d(u, v) \leq d(u, u_n) + d(u_n, v)$$

  et en passant à la limite quand $n \to \infty$, on obtient $0 \leq d(u, v) \leq 0$. Par conséquent $d(u, v) = 0$ et donc $u = v$.

- Une suite stationnaire est convergente dans tout espace métrique. En effet, si $(u_n)_n$ est stationnaire alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N : u_n = u \text{ (est constante) }.$$

  D'où $d(u_n, u) = 0$, $\forall n \geq N$. Par conséquent $\lim_{n\to\infty} d(u_n, u) = 0$

Définition 1.7. Soit $(u_n)_n$ une suite d'un espace métrique (E, d).

1. Une suite extraite (ou sous-suite) de $(u_n)_n$ est la suite $(u_{\varphi(n)})_n$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

2. On dit que $u \in E$ est une **valeur d'adhérence** de la suite $(u_n)_n$ s'il existe une sous-suite de $(u_n)_n$ convergente vers u.

La proposition suivante donne une caractérisation entre l'adhérence d'un ensemble via les suite.

Proposition 1.6. *Soit A une partie non vide d'un espace métrique (E, d). alors*

$$\boxed{\overline{A} = \{x \in E, \exists (x_n)_n \subset A : \lim_{n\to\infty} x_n = x\}.} \tag{1.20}$$

d'autre manière, on a

$$x \in \overline{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_n \subset A : \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} d(x,A) := \inf_{y\in A} d(x,y) = 0 \\ &\overset{\text{caractérisation de l'inf}}{\Longleftrightarrow} \forall \varepsilon > 0, \exists y \in A : d(x,y) < \varepsilon \\ &\Longleftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists y_n \in A : d(x,y_n) < \frac{1}{n} \\ &\Longleftrightarrow (y_n)_n \subset A \text{ et } x = \lim_{n\to\infty} y_n. \end{aligned}$$

□

☞ **Exemple 1.9.** Soit $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$. Considérons l'ensemble

$$A := \{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Calculons $\overline{A}$. On a $x \in \overline{A}$ si et seulement s'il existe une suite de A converge vers x. Une suite $(x_n)_n$ de A est définie par $x_n = \frac{1}{p_n}$, $p_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\Longleftrightarrow x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p_n} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} p_n} \\ &\Longleftrightarrow x = \left\{ \begin{array}{lll} 0 & \text{si} & p_n \to +\infty \\ 1/p & \text{si} & p_n \to p \in \mathbb{N}^* \end{array} \right. \end{aligned}$$

D'où $A = \{0\} \cup \{1/p,\ p \in \mathbb{N}^*\} = \{0\} \cup A$.

Corollaire 1.7. Soient (E,d) un espace métrique et A une partie de E. Alors

$$\boxed{(A \text{ est fermé }) \Longleftrightarrow (\text{ toute suite convergente } (a_n)_n \subset A,\ \text{sa limite appartient à A}).} \tag{1.21}$$

Exercice 12. Soit $(\mathbb{R},d)$ un espace métrique où d est la distance usuelle. Trouver l'adhérence et l'intérieur des ensemble suivantes

$$A := \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q},\ p,q \in \mathbb{N}^*\},\ B = \{\frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\}.$$

Solution :

1. Calculons l'intérieur de A. Soit $x \in A$. Supposons que $x \in \overset{\circ}{A}$. Alors $\exists r > 0$: $B(x,r) \subset A$, or $B(x,r) =]x-r, x+r[\not\subset A$, car $A \subset \mathbb{Q}$. Donc $x \notin \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{A} = \phi$.
2. Calculons l'adhérence de A. On utilise la caractérisation donnée par la proposition 1.20. Une suite convergente $(x_n)_n$ de A s'écrit sous la forme $x_n = \frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}$, avec $p_n, q_n \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Son perder de généralité, on peut supposer que les

suites $(\frac{1}{p_n})_n$, $(\frac{1}{q_n})_n$ sont convergentes (car si non, d'après les théorème de Bolzano-Weierstrass, on peut en extraire des sous suites convergentes). Alors

$$\begin{aligned} x \in \overline{A} &\iff \exists (x_n)_n \subset A : x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}) \\ &\iff x = \begin{cases} 0 & \text{si } \; q_n, p_n \to +\infty \\ 1/p & \text{si } \; p_n \to p \in \mathbb{N}^* \text{ et } q_n \to \infty \\ 1/p & \text{si } \; p_n \to \infty \text{ et } q_n \to p \in \mathbb{N}^* \\ 1/p + 1/q & \text{si } \; p_n \to p \in \mathbb{N}^* \text{ et } q_n \to q \in \mathbb{N}^* \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\boxed{\overline{A} = \{0\} \cup \{\frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}^*\} \cup \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q}, p, q \in \mathbb{N}^*\}.}$$

Pour l'ensemble B, on se procède de la même manière pour obtenir

$$\boxed{\overset{\circ}{B} = \phi, \quad \overline{B} := \{0\} \cup \{\frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}^*\}.}$$

Exercice 13. Soit (E, d) l'espace métrique discret (d est la distance discrète). Trouver toutes les suites convergente.

Solution : Soit $(u_n)_n$ une suite convergente vers u dans l'espace discret (E, d). Alors on a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : d(u_n, u) \leq \varepsilon.$$

Pour $\varepsilon = 1/2022$, il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N : d(u_n, u) \leq \frac{1}{2022} < 1.$$

Comme d est la distance discrète, alors $d(u_n, u) = 0 \vee 1$, on en déduit que $\forall n \geq N$: $d(u_n, u) = 0$ et donc $u_n = u$. D'où la suite $(u_n)_n$ est stationnaire. Inversement tout suite stationnaire est convergente. Donc les suite convergentes sont les suites stationnaires.

1.4.2 Notion de suite de Cauchy et espaces métrique complet

Soit (E, d) un espace métrique. Si la suite $(u_n)_n$ de E est convergente vers une certaine limite ℓ, alors $d(u_n, \ell) \to 0$ quand $n \to \infty$, et grâce à l'inégalité triangulaire $d(u_p, u_q) \to 0$, quand $p, q \to \infty$. C'est à dire les termes u_p et u_q s'approchent l'un de l'autre dès que p et q tendent vers $+\infty$. On dit dans ce cas que la suite est de Cauchy. On donne donc la définition suivante :

Définition 1.8. Une suite $(u_n)_n$ d'un espace métrique (E, d) est dite de Cauchy si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \in \mathbb{N} : q > p \geq N \Longrightarrow d(u_p, u_q) \leq \varepsilon.} \tag{1.22}$$

Autrement dit,

$$\lim_{p,q\to\infty} d(u_p, u_q) \longrightarrow 0.$$

☞ **Remarque 1.6.** Toute suite convergente est de Cauchy (ce n'est pas difficile à vérifier), mais le contraire n'est pas toujours vrai dans un espace métrique. Pour cela, on donne la définition suivante :

Définition 1.9. Un espace métrique (E, d) est dit complet si toute suite de Cauchy dans cet espace est convergente.

Proposition 1.8. Toute suite de Cauchy d'un espace métrique (E, d) est bornée. C'est à dire

$$\boxed{\exists a \in E,\ \exists M > 0 : d(a, u_n) \leq M, \forall n \in \mathbb{N}.}$$

Démonstration. En exercice. □

☞ **Exemple 1.10.** L'espace $\mathbb{R}$ avec la distance usuelle $d(x, y) = |x - y|$ est complet. En effet. Soit $(u_n)_n$ une suite de Cauchy. D'après la proposition précédente, elle est bornée. Il existe donc une sous-suite notée $(u_{k_n})_n$ convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$ (d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass). Montrons que la suite est convergente vers ℓ. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N} : \left\{ \begin{array}{rcll} q > p \geq N_1 & \Longrightarrow & d(u_p, u_q) \leq \varepsilon/2 & \text{car } (u_n)_n \text{ est de Cauchy} \\ n \geq N_2 & \Longrightarrow & d(u_{k_n}, \ell) \leq \varepsilon/2 & \text{car } u_{k_n} \longrightarrow \ell \\ n \geq N_3 & \Longrightarrow & k_n > N_1 & \text{car } k_n \to +\infty, \text{ (déf de sous-suite)} \end{array} \right.$$

D'où, pour $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$. On a

$$n \geq N \Longrightarrow d(u_n, \ell) \leq d(u_n, u_{k_n}) + d(u_{k_n}, \ell) \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Ce qui donne la convergence de $(u_n)_n$. Donc $(\mathbb{R}, d)$ est un espace complet.

☞ **Exemple 1.11.** L'espace $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$, n'est pas complet. En effet, on considère la suite de terme générale $u_n = n$. Montrons que $(u_n)_n$ est de Cauchy, mais elle n'est pas convergente. Soient $\varepsilon > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$ avec $q > p$. On a

$$d(u_p, u_q) = |\arctan p - \arctan q| = |\arctan \frac{p - q}{1 + pq}| \leq \arctan \frac{q}{pq} = \arctan 1/p.$$

et on a

$$\arctan \frac{1}{p} \leq \varepsilon \Longleftrightarrow \frac{1}{p} \leq \arctan \varepsilon \Longleftrightarrow p \geq \frac{1}{\arctan \varepsilon}$$

D'où, en choisissant $N := [1/\arctan \varepsilon] + 1 > 1/\arctan \varepsilon$, on obtient

$$q > p \geq N \Longrightarrow d(u_p, u_q) \leq 1/p \leq \varepsilon.$$

Donc $(u_n)_n$ est de Cauchy. Il reste à montrer que $(u_n)_n$ n'est pas convergente. Par absurde. S'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{n\to\infty} u_n = a$. Alors $\lim_{n\to\infty} d(n, a) = 0$. D'où $d(n, a) = \arctan \frac{n-a}{1+an} \to 0$ et donc $\frac{n-a}{1+an} \to 0$, quand $n \to \infty$. Mais $\frac{n-a}{1+an}$ tends vers $1/a$ si $a \neq 0$ et tends vers $+\infty$ si $a = 0$. Contradiction. Donc la suite n'est pas convergente et l'espace $(\mathbb{R}, d)$ n'est pas complet.

Exercice 14. Soit $E = \mathbb{N}^*$, $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application définie par

$$d(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p = q \\ |\frac{1}{p} - \frac{1}{q}| & \text{si} \quad p \neq q \end{cases}$$

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite de terme générale $u_n = n$, est de Cauchy.
3. Est elle convergente ?
4. Conclure.
5. Calculer $B(1,r)$ et $\overline{B}(1,r)$ avec $r > 0$.
6. Mêmes questions si $E =]0, +\infty[$

Solution :

1. Ce n'est pas difficile
2. Montrons que la suite $(u_n)_n$ est de Cauchy. On a $u_n = n$. Soient $\varepsilon > 0$, $p, q \in E := \mathbb{N}^*$ avec $q > p$. On a

$$d(u_p, u_q) := d(p,q) := |\frac{1}{p} - \frac{1}{q}| = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \leq \frac{1}{p}.$$

et on a $\frac{1}{p} \leq \varepsilon \Longleftrightarrow p \geq \frac{1}{\varepsilon}$. On choisit $N := [1/\varepsilon] + 1 > 1/\varepsilon$, on obtient

$$q > p \geq N \Longrightarrow p > \frac{1}{\varepsilon} \Longrightarrow d(u_p, u_q) \leq \frac{1}{p} \leq \varepsilon.$$

Donc $(u_n)_n$ est de Cauchy.

3. Si $(u_n)_n$ est convergente vers une certaine limite $p \in \mathbb{N}^*$, alors

$$0 = \lim_{n \to \infty} d(u_n, p) = \lim_{n \to \infty} |\frac{1}{n} - \frac{1}{p}| = \frac{1}{p}$$

ce qui est impossible. Donc la suite n'est pas convergente.

4. On conclut que l'espace (E, d) n'est pas complet.
5.

1.4.3 Applications continues

Définition 1.10 (Continuité en un point)**.** Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application, $a \in E$. On dit que $\ell \in F$ est la limite de $f(x)$ quand $x \longrightarrow a$ si

$$\delta(\ell, f(x)) \longrightarrow 0 \text{ quand } \ d(x,a) \longrightarrow 0.$$

Autrement dit, si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : 0 < d(a,x) < r \Longrightarrow \delta(\ell, f(x)) < \varepsilon.} \tag{1.23}$$

La proposition suivante donne une caractérisation de la limite de f en un point a par les suites.

Proposition 1.9. Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application, $a \in E$ et $\ell \in F$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$.
- Pour toute suite non stationnaire $(x_n)_n$ de E convergente vers a, la suite $(f(x_n))_n$ est convergente vers ℓ.

Démonstration. En exercice □

Définition 1.11. Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application, $a \in E$. On dit que f est continue en a si

$$\delta(f(x), d(a)) \longrightarrow 0 \text{ quand } \ d(x,a) \longrightarrow 0.$$

Autrement dit, si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : d(a,x) < r \Longrightarrow \delta(f(a), f(x)) < \varepsilon.} \tag{1.24}$$

☞ **Remarque 1.7.** La définition précédente est équivalente à

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : x \in B_d(a,r) \Longrightarrow f(x) \in B_\delta(d(a), \varepsilon).} \tag{1.25}$$

ou

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists r > 0 : B_d(a,r) \subset f^{-1}(B_\delta(f(a), \varepsilon)).} \tag{1.26}$$

Exercice 15. Soit $id : (E,d) \longrightarrow (E,\delta)$ l'application identique avec δ est la distance discrète. Montrer que id n'est pas continue en tout point de E.

La proposition suivante donne une caractérisation de la limite de f en un point a par les suites.

Proposition 1.10. Soient (E,d), (F,δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application, $x \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes

- f est continue en x.

- Pour toute suite $(x_n)_n$ de E convergente vers x, la suite $(f(x_n))_n$ est convergente vers $f(x)$.

Définition 1.12 (Continuité globale)**.** Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est continue sur E (ou continue) si elle est continue en tout point $a \in E$.

La proposition suivante donne une caractérisation très importante de la continuité globale.

Proposition 1.11. L'application $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout ouvert de F est ouvert de E.

Démonstration. On démontre les deux implications.

$\Longrightarrow$) Supposons que f est continue sur E. Soit O un ouvert de (F, δ). Alors $O := \bigcup_{i \in I} B_i$ où B_i est une boule ouverte de (F, δ). Montrons d'abord que $f^{-1}(B_i)$ est un ouvert de (E, d). Soit $x \in f^{-1}(B_i)$. Alors $f(x) \in B_i$. Donc d'après (1.13), $\exists \varepsilon > 0$: $B(f(x), \varepsilon) \subset B_i$. D'après la continuité de f en x, il existe $r > 0$ tel que

$$B_d(x, r) \subset f^{-1}(B_\delta(f(x), \varepsilon) \subset f^{-1}(B_i).$$

On a montré que

$$\forall x \in f^{-1}(B_i), \exists r > 0 : B_d(x, r) \subset f^{-1}(B_i).$$

Donc $f^{-1}(B_i)$ est un ouvert de (E, d). D'où

$$f^{-1}(O) = f(\bigcup_{i \in I} B_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i) \text{ est aussi ouvert de } (E, d).$$

$\Longleftarrow$) Supposons que l'image réciproque de tout ouvert de F est ouvert de E. Montrons que f est continue en tout $a \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $f^{-1}(B_\delta(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert de (E, d) et $x \in f^{-1}B_\delta(f(a), \varepsilon))$. D'après la définition de l'ouvert, il existe $r > 0$, tel que $B_d(x, r) \subset f^{-1}(B_\delta(f(a), \varepsilon))$. D'où la continuité en a.

$\square$

Exercice 16. Trouver toute les applications continues $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ lorsque :

1. d est la distance discrète,
2. δ est la distance discrète.

Exercice 17. Montrer que $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ est continue si et seulement si l'image réciproque de tout fermé de (F, δ) est un fermé de (E, d).

Définition 1.13 (Homéomorphisme)**.** Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est un homéomorphisme si

- f est bijective.
- f et f^{-1} sont continues (où f^{-1} est l'application réciproque de f).

S'il existe une telle application, on dit que les espaces (E, d) et (F, δ) sont **homéomorphes**.

Définition 1.14. Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques, $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. On dit que f est uniformément continue si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x, y) \leq \delta \Longrightarrow \delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.} \tag{1.27}$$

2. On dit que f est Lipschitzienne si

$$\exists L > 0, \forall x, y \in E : \delta(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y) \tag{1.28}$$

La proposition suivante est immédiate (c'est une conséquence de la proposition 1.11).

Proposition 1.12. L'application $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ est une homéomorphisme si et seulement si l'image directe (resp. réciproque) de tout ouvert de (E, d) (resp. de (F, δ)) est un ouvert de (F, δ) (resp. de (E, d)).

Exercice 18. Montrer que $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ est une homéomorphisme si et seulement si l'image directe (resp. réciproque) de tout fermé de (E, d) (resp. de (F, δ)) est un fermé de (F, δ) (resp. de (E, d)).

Exercice 19. Soit $f : (E, d) \longrightarrow (F, \delta)$ une application. Montrer que

- f est Lipschitzienne $\Longrightarrow f$ est uniformément continue.
- f est uniformément continue $\Longrightarrow f$ est continue.

2 Espaces topologiques

2.1 Préliminaire

Le but de ce cours et de dégager la structure nécessaire d'un ensemble E, qui nous permet de parler de la limite (d'une suite ou application) et par conséquent la convergence et la continuité. On a vu dans le cours précédent la définition naturelle de la limite dans un espace métrique. La question qui se pose : Est ce que la structure métrique de l'espace est nécessaire pour parler de la limite ? La réponse est non. La structure métrique n'est pas nécessaire mais elle est suffisante. En fait, on peut parler de la limite sans avoir une distance. Il suffit d'avoir une structure sur l'espace qui s'appelle structure topologique. La structure métrique engendre cette structure topologique qui dépends de la nature des parties de E.

En effet, rappelons la définition de la limite d'une suite. La suite $(u_n)_n$ converge vers u dans un espace métrique (E, d) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow d(u_n, u) < \varepsilon.$$

On peut écrire cette définition de la manière suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow u_n \in B(u, \varepsilon).$$

Cette définition est équivalente à

$$\boxed{\text{Pour tout ouvert } \mathcal{O}, x \in \mathcal{O}, \exists N \in \mathbb{N} : n \geq N \Longrightarrow u_n \in \mathcal{O}.} \tag{2.1}$$

Exercice 20. Vérifier l'équivalence entre (2.1) et la convergence de $(u_n)_n$ vers u (utiliser la propriété caractéristique de l'ouvert (1.14) de la proposition 1.2).

On observe que la définition précédente ne dépends que des ouverts. Donc pour définir la limite d'une suite, il suffit d'avoir une telle famille d'ouverts. Cette famille s'appelle topologie sur E et dans ce cas, on dit que E a une structure topologique. Pour généraliser cette notion de topologie, on a besoin de savoir les propriétés caractéristiques de la famille des ouverts. La proposition suivante répond à cette question

Proposition 2.1. Soit (E, d) un espace métrique et soit $\mathcal{O}$ l'ensemble de tous les ouverts (avec l'ensemble vide). Alors on a les propriété suivantes

1. $\phi, E \in \mathcal{O}$

2. Une intersection finie d'ouverts est un ouvert.

3. Un réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.

La preuve de cette proposition est immédiate.

Ceci motive le prochain paragraphe

2.2 Topologie, espaces topologiques

Définition 2.1. Soit E un ensemble non vide et soit $\mathcal{T} \subset \mathscr{P}(E)$ un ensemble de parties de E. On dite que $\mathcal{T}$ est une topologie sur E si

1. $\phi, E \in \mathcal{T}$
2. Stable par intersection finie : Si $O_1, O_2 \in \mathcal{T}$ alors $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{T}$.
3. Stable par réunion quelconque : Si $\{O_i\}_{i\in I} \subset \mathcal{T}$, alors $\bigcup_{i\in I} O_i \in \mathcal{T}$ (où I est un ensemble quelconque des indices).

Dans ce cas, on dit que $(E, \mathcal{T})$ est un espace topologique (ou on dit que E muni de la topologie $\mathcal{T}$ est un espace topologique).

☞ **Exemple 2.1.** Toute espace métrique est un espace topologique avec la topologie $\mathcal{O}$ de l'ensemble des ouverts (voir la proposition 2.1) et on a la définition suivante :

Définition 2.2. Soit (E, d) un espace métrique. On note $\mathcal{T}_d$ l'ensemble de tous les ouverts de E (c'est une topologie sur E, voir Proposition 2.1). Alors $\mathcal{T}_d$ s'appelle la topologie associé à la distance d (ou la topologie engendrée par d). Dans ce cas on dit que l'espace topologique $(E, \mathcal{T}_d)$ est métrisable.

Définition 2.3. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $A \subset E$ une partie de E.

1. On dit que A est un ouvert si $A \in \mathcal{T}$.
2. On dit que A est un fermé si $C_E A \in \mathcal{T}$ (ou si $C_E A$ est ouvert).

On peut donc généraliser les concepts connues dans un espace métrique aux espaces topologiques.

Définition 2.4. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un ensemble V de E est dit voisinage de $x \in E$ si

$$\exists O \in \mathcal{T} : x \in O \subset V.$$

L'ensemble de tous les voisinage de x sera noté $\mathcal{V}(x)$.

L'ensemble de tous les voisinages ouverts de x est noté $\mathcal{O}(x)$, c'est l'ensemble de tous les ouverts qui contient x (Il est clair que $\mathcal{O}(x) \subset \mathcal{V}(x)$).

☞ **Exemple 2.2.** Si (E, d) est un espace métrique et $\mathcal{T}_d$ est la topologie associée à d, alors l'ensemble des voisinages de $x \in E$ est donné par

$$\boxed{\mathcal{V}(x) = \{A \subset E \;/\; \exists r > 0 : B(x, r) \subset A\}} \tag{2.2}$$

et l'ensemble des voisinages ouverts de x est donnée par

$$\boxed{\mathcal{O}(x) = \{A \in \mathcal{T}_d \;/\; \exists r > 0 : B(x, r) \subset A\}.} \tag{2.3}$$

En effet, pour la première inclusion, on a si $V \in \mathcal{V}(x)$, alors il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$. D'après la définition d'un ouvert dans un espace métrique, O est un réunion des boules ouvertes et d'après la proposition 1.14, $\exists r > 0\ : B(x,r) \subset O$ et donc $B(x,r) \subset V$. Pour l'inclusion inverse il suffit de prendre $O := B(x,r)$.. La deuxième assertion se traite de la même façon.

On caractérise alors les ouverts, en utilisant les voisinages comme suivant

Proposition 2.2. Soit A une partie non vide d'un espace topologique $(E, \mathcal{T})$. Alors

$$A \in \mathcal{T} \Longleftrightarrow \forall x \in A : A \in \mathcal{V}(x). \tag{2.4}$$

Définition 2.5. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie non vide de E.

1 L'adhérence de A, noté $\overline{A}$, est défini par

$$\boxed{\overline{A} := \{x \in E, \forall O \in \mathcal{O}(x) : O \cap A \neq \phi.\}} \tag{2.5}$$

ou de manière équivalente,

$$\boxed{\overline{A} := \{x \in E, \forall V \in \mathcal{V}(x) : V \cap A \neq \phi, \}}$$

et un point de $\overline{A}$ s'appelle **point adhérent de A**.

2 L'intérieur de A, noté $\overset{\circ}{A}$, est l'ensemble défini par

$$\boxed{\overset{\circ}{A} := \{x \in A : \exists O \in \mathcal{O}(x) : O \subset A, \}} \tag{2.6}$$

ou de manière équivalente,

$$\boxed{\overset{\circ}{A} := \{x \in A : \ A \in \mathcal{V}(x)\}}$$

et un point x de $\overset{\circ}{A}$ s'appelle **point intérieur de A** et dans ce cas, on dit que A est **un voisinage** de x.

3 La frontière de A, noté $\mathsf{Fr}A$, est l'ensemble :

$$\boxed{\mathsf{Fr}A := \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.} \tag{2.7}$$

Dans la suite, on donne une résumé des différentes notions et concepts utiles dans les espaces topologiques.

Définition 2.6. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}(E)$. On dit que $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de E si tout ouvert $O \in \mathcal{T}$ s'écrit sous forme réunion d'intersection fini d'ouvert de $\mathcal{B}$. Dans ce cas, on dit que $\mathcal{T}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{B}$.

☞ **Exemple 2.3.** 1. L'ensemble des intervalles ouverts est une base d'ouverts de la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.

2. L'ensemble des boules ouvertes est une base d'ouverts de la topologie associée à l'espace métrique (E, d).

Proposition 2.3. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $A \subset E$. Alors l'ensemble

$$\mathcal{T}_A \stackrel{\text{def}}{=} \{O \cap A : O \in \mathcal{T}\}$$

est une topologie sur A.

Définition 2.7. L'espace $(A, \mathcal{T}_A)$ s'appelle sous espace topologique de $(E, \mathcal{T})$ et la topologie $\mathcal{T}_A$ s'appelle topologie induite sur A par $\mathcal{T}$.

Définition 2.8 (Espace séparé). On dit que l'espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est séparé si

$$\boxed{\forall x, y \in E, x \neq y, \exists O_x \in \mathcal{O}(x), O_y \in \mathcal{O}(y) : O_x \cap O_y = \phi} \tag{2.8}$$

où de manière équivalente

$$\boxed{\forall x, y \in E, x \neq y, \exists V_x \in \mathcal{V}(x), V_y \in \mathcal{V}(y) : V_x \cap V_y = \phi} \tag{2.9}$$

Proposition 2.4. Tout espace métrique (E, d) est séparé.

☞ **Exemple 2.4.** 1. L'espace topologique discret $(E, \mathcal{P}(E))$ est séparé. En effet, pour tout $x, y \in E$ avec $x \neq y$, on a

$$x \in \{x\} \in \mathcal{O}(x), y \in \{y\} \in \mathcal{O}(y) \text{ et } \{x\} \cap \{y\} = \phi.$$

2. Si E contient au moins deux élément. L'espace topologique grossière $(E, \mathcal{T})$ n'est pas séparé ($\mathcal{T} := \{\phi, E\}$). En effet Soient $x, y \in E$ avec $x \neq y$. S'il existe $O_x \in \mathcal{O}(x), O_y \in \mathcal{O}(y)$, alors $O_x = O_y = E$ et donc $O_x \cap O_y \neq \phi$. Soit $x, y \in E$

Définition 2.9 (Espace séparable). Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1. On dit qu'une partie $A \subset E$ est dense dans E si $\overline{A} = E$.

2. On dit que l'espace E est séparable s'il existe une partie dénombrable et dense dans E.

☞ **Exemple 2.5.** L'espace usuelle $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ est séparable. En effet, le sous ensemble $\mathbb{Q}$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite rationnelle de terme générale $\frac{[nx]}{n}$ converge vers x, ce qui implique $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Proposition 2.5. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{B}$ une base d'ouverts de E et A une partie de E. Les assertions suivantes sont équivalentes

1. A est dense dans E.

2. Pour tout ouvert non vide $O \in \mathcal{T}$, on $O \cap A \neq \phi$.

3. Pour tout ouvert non vide $O \in \mathcal{B}$, on a $O \cap A \neq \phi$.

2.3 Convergence et continuité dans un espace topologique

On donne aussi la généralisation de la définition de continuité et de convergence.

Définition 2.10. Soient $(E,\mathcal{T})$ et $(F,\mathcal{T}')$ deux espaces topologiques.

1. Soit $(u_n)_n$ une suite de l'espace topologique $(E,\mathcal{T})$. On dit que la suite $(u_n)_n$ converge vers $u \in E$ si
$$\forall O \in \mathcal{O}(x), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : u_n \in O.$$
ou de manière équivalente,
$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : u_n \in V.$$

2. Une application $f : (E,\mathcal{T}) \longrightarrow (F,\mathcal{T}')$ est continue en $a \in E$ si
$$\forall O \in \mathcal{O}(f(a)) : f^{-1}(O) \in V(a)$$
ou de manière équivalente,
$$\forall V \in \mathcal{V}(f(a)) : f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a).$$

3. Une application $f : (E,\mathcal{T}) \longrightarrow (F,\mathcal{T}')$ est continue sur E si elle est continue en tout point de E, ou de manière équivalente (voir proposition (1.11)),
$$\forall O \in \mathcal{T}' : f^{-1}(O) \in \mathcal{T}.$$

La proposition suivante motive la définition précédente

Proposition 2.6. Soient $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique métrisable et d la distance associée. Alors les notions données dans la définition précédente équivalent avec celles données dans l'espace métrique (E,d).

Démonstration. Pas difficile, il suffit d'appliquer (2.2) et (2.3). □

La notion de séparation assure l'unicité de la limite d'une suite. On a

Proposition 2.7. Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique séparé et soit $(x_n)_n$ une suite convergente de E. Alors sa limite est unique.

Démonstration. Supposons que $x, y \in E$ sont deux limites distinctes de la suite $(x_n)_n$. Alors comme l'espace $(E,\mathcal{T})$ est séparé, il existe $O_x \in \mathcal{O}(x), O_y \in \mathcal{O}(y)$ tels que $O_x \cap O_y = \phi$. D'autre par d'après la définition de la convergence
$$\exists N_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_1 : x_n \in O_x$$
$$\exists N_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_2 : x_n \in O_y.$$
Donc $\forall n \geq \max\{N_1, N_2\} \ : x_n \in O_x \cap O_y$. D'où $O_x \cap O_y \neq \phi$ (contradiction). Donc $x = y$. □

Définition 2.11. Soit $f : (E,\mathcal{T}) \longrightarrow (F,\mathcal{T}')$ une application.

1. On dit que l'application f est ouverte (resp. fermée) si l'image directe de tout ouvert (resp. fermée) de E est ouvert (resp. fermé) de F.

2. On dit que f est un homéomorphisme si elle est bijective et continue et son inverse f^{-1} est continue.

2.4 Compacité

2.4.1 Généralité

Définition 2.12. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit A une partie de E.

1. La famille $\{A_i\}_{i\in I}$ de parties de E, est dite recouvrement de E (resp. de A) si

$$\boxed{\bigcup_{i\in I} A_i = E, \quad (\text{resp. } A \subset \bigcup_{i\in I} A_i).}$$

2. Un sous-recouvrement de $\{A_i\}_{i\in I}$ est un recouvrement $\{A_j\}_{j\in J}$ avec $J \subset I$

3. Le recouvrement $\{A_i\}_{i\in I}$ est dit fini (resp. infini) si I est fini (resp. infini)

4. Le recouvrement $\{A_i\}_{i\in I}$ est dit ouvert si $A_i \in \mathcal{T},\ \forall i \in I$.

Définition 2.13. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Soit A une partie de E.

1. L'espace topologique $(E, \mathcal{T})$ est dit compact si
   - $(E, \mathcal{T})$ est séparé
   - Tout recouvrement ouvert de E admet un un sous-recouvrement fini.

2. L'ensemble $A \subset E$ est dit compact si le sous-espace $(A, \mathcal{T}_A)$ est compact où $\mathcal{T}_A$ est la topologie induite sur A par $\mathcal{T}$, ou de manière équivalente, si
   - $(A, \mathcal{T}_A)$ est séparé
   - Tout recouvrement ouvert de A admet un sous-recouvrement fini

☞ **Exemple 2.6.** L'espace $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle $\mathcal{T}_u$, n'est pas compact. En effet, la famille $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, $A_n :=]-n, n[$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$, car A_n est ouvert et on a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}]-n, n[= \mathbb{R}.$$

D'autre part, pour tout $J \subset \mathbb{N}^*$ fini, on a

$$\bigcup_{n\in J} A_n = \bigcup_{n\in J}]-n, n[=]-\max J, \max J[\neq \mathbb{R}.$$

Donc $\{A_n\}_{n\in J}$ n'est pas un sous-recouvrement de $\mathbb{R}$.

☞ **Exemple 2.7.** Tout ensemble fini d'un espace topologique séparé est compact (facile à vérifier).

On donne quelques résultats importantes de compacité sans preuve.

Proposition 2.8. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé. Alors E est compact si et seulement si de toute famille de fermées d'intersection vide on peut extraire une sous-famille d'intersection vide.i.e.

$$\boxed{\left(\bigcap_{i \in I} F_i = \phi, F_i \text{ est fermé}\right) \Longrightarrow \left(\exists J \subset I, J \text{ fini } : \bigcap_{i \in J} F_i = \phi\right).} \tag{2.10}$$

Proposition 2.9. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique compact et $A \subset E$. Alors A est compact si et seulement si A est fermé.

Proposition 2.10. Toute partie compact d'un espace topologique séparé est fermée.

Proposition 2.11. Toute partie infinie d'un espace compact admet au moins un point d'accumulation.

On donne le résultat important suivant concernant les espaces métriques.

Théorème 2.12. Soient (E, d) un espace métrique et A une partie de E. Alors les assertion suivantes sont équivalentes

1. A est compact.
2. Toute suite de A admet une sous-suite convergente dans (A, d).
3. Tout partie infini de A admet un point d'accumulation dans A.

Corollaire 2.13. Dans l'espace $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, les parties compacts sont les parties fermées et bornées.

2.4.2 Compacité et applications continues

Proposition 2.14. Soient $(E, \mathcal{T})$, $(F, \mathcal{T}')$ deux espaces topologique séparés. Alors L'image d'un compact par une application continue de E dans F est compact.

Proposition 2.15. Soient (E, d), (F, δ) deux espaces métriques avec (E, d) est compact. Alors toute application continue de E dans F est uniformément continue.

Le résultat le plus important est le suivant :

Théorème 2.16. *Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique compact et $f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ une application continue. Alors f atteint ses bornes inférieure et supérieure.*

2.5 Connexité, connexité par arc

Définition 2.14. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.

1 On dit que E est connexe s'il n'est pas réunion de deux ouverts disjoints non vides. Autrement dit

$$\boxed{\forall V, W \in \mathcal{T} : (V \cup W = E \wedge V \cap W = \phi) \Longrightarrow (V = \phi) \vee (W = \phi).}$$

2 Si A est une partie de E, on dit que A est connexe si l'espace $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe. Autrement dit si

$$\boxed{\forall V, W \in \mathcal{T} : (A \subset V \cup W \wedge V \cap W \cap A = \phi) \Longrightarrow (A \cap V = \phi) \vee (A \cap W = \phi),}$$

ou de manière équivalente

$$\boxed{\forall V, W \in \mathcal{T} : (A \subset V \cup W \wedge V \cap W \cap A = \phi) \Longrightarrow A \subset V \vee A \subset W.}$$

☞ **Exemple 2.8.** 1. Dans l'espace $\mathbb{R}$ munie de la topologie usuelle $\mathcal{T}_u$, l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'es pas connexe. En effet, étant donné les deux ouverts suivant $A =]-\infty, \sqrt{2}[\in \mathcal{T}_u$ et $B =]\sqrt{2}, +\infty[\in \mathcal{T}_u$, on a $\mathbb{Q} \subset A \cup B$ et $A \cap B = \phi$ mais $\mathbb{Q} \not\subset A$ et $\mathbb{Q} \not\subset B$.

2. Dans tout espace topologique, les singletons sont des parties connexes.

Proposition 2.17. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1 E est connexe

2 E n'est pas réunion de deux fermés disjoints et non vides

3 Les seules parties ouvertes et fermées à la fois sont ϕ et E

4 Toute application continue de E dans l'espace discret $\{0, 1\}$ est constante.

Démonstration. • 1 $\Longrightarrow$ 2 Par absurde, supposons qu'il existe deux fermés non vides A et B tels que

$$(E = A \cup B) \vee (A \cap B = \phi)$$

On pose $V = A^c$ et $W = B^c$. Alors V et W sont deux ouvert non vide et on a

$$(E = V \cup W) \vee (V \cap W = \phi).$$

D'où E n'est pas connexe (contradiction). Donc E n'est pas réunion de deux fermés disjoints et non vides.

• 2 $\Longrightarrow$ 3 Soit A une partie de E qui est à la fois ouvert et fermé. Donc A^c l'est aussi et on a $A \cup A^c = E$, $A \cap A^c = \phi$. D'où E est un réunion de deux fermés disjoints et d'après 2, $A = \phi$ où $A^c = \phi$. i.e. $A = \phi$ ou $A = E$.

- $\boxed{3} \Longrightarrow \boxed{4}$ Par absurde. Soit $f : E \longrightarrow \{0,1\}$ une application continue et non constantes. Alors les ensemble $V = f^{-1}(\{0\}) \neq \phi$ et $W = f^{-1}(\{1\}) \neq \phi$. Comme $\{0,1\}$ est muni de l'espace discret, alors $\{0\}$ et $\{1\}$ sont ouverts et comme f est continue, alors V et W sont ouverts et on a

$$(V \cup W = f^{-1}(\{0,1\} = E) \wedge (V \cap W = \mathbf{f}^{-1}(\{0\} \cap \{1\} = \phi).$$

Donc E n'est pas connexe (contradiction).

- $\boxed{4} \Longrightarrow \boxed{1}$ Par absurde. supposons que E n'est pas connexe. Alors il existe deux ouverts disjoints et non vides V et W tel que $E = V \cup W$. Alors l'application f de E dans l'espace discret $\{0,1\}$ défini par

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \in V \\ 0 & \text{si} \quad x \in W \end{cases}$$

est continue et non constante.

□

Proposition 2.18. Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique et A une partie connexe de E.

1. $\overline{A}$ est connexe.

2. Toute partie B qui satisfait $A \subset B \subset \overline{A}$, est connexe.

Démonstration. En exercice. □

Le résultat suivant donne un exemple fondamental de parties connexes dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.19. Les parties connexes dans l'espace usuel $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ sont les intervalles.

Démonstration. Admise. □

Définition 2.15. Soit $(E, \mathcal{T})$ un espace topologique.

$\boxed{1}$ Soient $x, y \in E$. Un chemin de E reliant x à y (où d'origine x et d'extrémité y) est une application continue $\varphi : [0,1] \longrightarrow E$ telle que $\varphi(0) = x$ et $\varphi(1) = y$ (où l'intervalle $[0,1]$ est muni de la topologie usuelle induite).

$\boxed{2}$ On dit que E est connexe par arc si pour tout $x, y \in E$, il existe un chemin de E reliant x à y

$\boxed{3}$ Si A est une partie de E, on dit que A est connexe par arc si l'espace $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe par arc, ou de manière équivalente si si pour tout $x, y \in A$, il existe un chemin de A reliant x à y

Proposition 2.20. Toute partie connexe par arc est connexe dans un espace topologique.

Module : **Topologie des espaces métriques**

Sérier 03

Exercice 21. Soit (E, d) un espace métrique. Soit $\mathcal{O}$ l'ensemble de tous les ouverts.

1. Montrer que $\mathcal{O}$ est une topologie sur E ($\mathcal{O}$ s'appelle topologie associée à d ou topologie engendrée par la distance d).
2. Si $E = \mathbb{R}$, Déduire que la famille $\mathcal{T}_u$ constituée de tous les réunions des intervalles ouverts, est une topologie sur $\mathbb{R}$ (cette topologie s'appelle **topologie usuelle**).
3. Même question pour $\mathcal{P}(E)$.

Solution :

1. Montrons que $\mathcal{O}$ est une topologie. Rappelons la définition d'un ouvert dans un espace métrique

$$O \in \mathcal{O} \iff \boxed{O \text{ est un réunion de boules ouvertes de } (E, d)}$$
$$\iff \boxed{\forall x \in O, \exists r > 0 : B(x, r) \subset O}.$$

   - On a ϕ et E sont des ouverts, ils appartiennent donc à $\mathcal{O}$.
   - Soient $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$. Montrons que $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$. Si $O_1 \cap O_2 = \phi$, alors $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$. Si non, on a pour tout $x \in O_1 \cap O_2$, $\exists r_1, r_2 > 0 \ : B(x, r_1) \subset O_1$ et $B(x, r_2) \subset O_2$. D'où pour $r = \min\{r_1, r_2\}$, on a $B(x, r) \subset O_1 \cap O_2$, ce qui implique que $O_1 \cap O_2 \in \mathcal{O}$.
   - Soit $\{O_i\}_{i \in I}$ une famille (d'ouverts) de $\mathcal{O}$. Montrons que $O := \cup_{i \in I} O_i \in \mathcal{O}$. On a pour tout $i \in I$, O_i est un réunion de boules ouverts. Par conséquent O l'est aussi. D'où $O \in \mathcal{O}$.

2. $\mathcal{T}_u$ est l'ensemble de tous les réunions des intervalles ouverts. Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. alors

   - Si $I =]a, b[$ alors I est la boule ouverte de l'espace métrique $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle.
   - Si $I =]-\infty, a[$ alors I s'écrit sous la forme $I = \cup_{n \in \mathbb{N}^*}]a - n, a[$ c'est un réunion de boules ouvertes.
   - Si $I =]a, +\infty[$ alors I s'écrit sous la forme $I = \cup_{n \in \mathbb{N}^*}]a, a + n[$ c'est un réunion de boules ouvertes.

   Donc l'ensemble $\mathcal{T}_u$ n'est que l'ensemble des ouvert de l'espace métrique $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle. D'après la question précédente, c'est une topologie sur $\mathbb{R}$.

3. Montrons que $\mathcal{T}=\mathcal{P}(E)$ est une topologie. Soit $A\in\mathcal{T}$ alors

$$A=\cup_{a\in A}\{a\}=\cup_{a\in A}B(a,r)$$

où $B(a,r)$ est la boule ouverte dans l'espace métrique E muni de la distance discrète (avec $r<1$). Donc A est un ouvert. D'où $\mathcal{T}$ est l'ensemble de tous les ouvert de l'espace métrique discrète E et d'après la question 1), $\mathcal{T}$ est une topologie sur E.

Exercice 22. Soit E un ensemble non vide. On définit la famille suivante

$$\mathcal{T}_1=\{\phi\}\cup\{A\subset E : A^c \text{ est fini }\}.$$

1 Vérifie que $\mathcal{T}_1$ est une topologie sur E. (elle s'appelle **topologie cofinie**).

2 Quels sont les fermés dans E.

3 Si $E=\mathbb{R}$, Est ce que l'ensemble $A:=]0,1[$ est un ouvert ? fermé ? même question pour $[0,1]$.

4 Si E est fini, déterminer $\mathcal{T}_1$.

5 Est ce que $(E,\mathcal{T}_1)$ est séparé ?

6 Est ce que cette topologie est métrisable ?.

Solution :

1. Montrons que $\mathcal{T}_1$ est une toologie sur E.
   - On a $\phi\in\mathcal{T}_1$ (par définition) et on a $E\in\mathcal{T}_1$ car $E^c=\phi$ est fini.
   - Soit $A,B\in\mathcal{T}_1$. Montrons que $A\cap B\in\mathcal{T}_1$. Si $A\cap B=\phi$, alors $A\cap B\in\mathcal{T}_1$. Sin non, alors $A\neq\phi$ et $B\neq\phi$. D'où A^c B^c sont finis et par conséquent $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$ est fini. Donc $A\cap B\in\mathcal{T}_1$.
   - Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{T}_1$. Montrons que $\cup_{i\in I}A_i\in\mathcal{T}_1$. Si $\cup_{i\in I}A_i\neq\phi$ alors $\cup_{i\in I}A_i\in\mathcal{T}_1$. Si non, alors $\exists i_0\in I$ tel que $A_{i_0}\neq\phi$ et donc $A_{i_0}^c\phi$. Doù

     $$(\cup_{i\in I}A_i)^c=\cap_{i\in I}(A_i)^c\subset A_{i_0}^c \text{ qui est fini.}$$

     Donc $\cup_{i\in I}A_i\in\mathcal{T}_1$. Donc $\mathcal{T}_1$ est une topologie sur E.

2. Déterminons les fermés de $(E,\mathcal{T}_1)$. Soit $A\subset E$ un fermé. Alors A^c est un ouvert (i.e. $A^c\in\mathcal{T}_1$). D'où ou bien $A^c=\phi$ et donc $A=E$, ou bien $A:=(A^c)^c$ est fini. Par conséquent, l'ensemble des fermés est $\{E\}\cup\{A\subset E/A \text{ est fini}\}$.

3. $E=\mathbb{R}$. L'ensemble $A:=]0,1[$ n'est pas ouvert, car $A\neq\phi$ et A^c n'est pas fini. A n'est pas fermé car $A\neq\mathbb{R}$ et A n'est pas fini. Même chose pour $[0,1]$.

4. Si E est fini, Alors tout partie $A\subset E$ satisfait "A^c est fini" Donc tout partie de E appartient à $\mathcal{T}_1$. D'où $\mathcal{T}_1=\mathcal{P}(E)$.

5. $(E, \mathcal{T}_1)$ est séparé si

$$\forall x, y \in \mathcal{T}_1, x \neq y, \exists A, B \in \mathcal{T}_1 : (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (A \cap B = \phi).$$

   On distingue deux cas

   - E est fini, alors d'après la question précédent $\mathcal{T}_1 = \mathcal{P}(E)$. D'où pour tout $x, y \in E$ avec $x \neq y$, il existe $A := \{x\} \in \mathcal{T}_1$, $B := \{y\} \in \mathcal{T}_1$ tel que $(x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (A \cap B = \phi)$. Donc E est séparé.
   - Si E est infini, alors étant donné $x, y \in E$ $A, B \in \mathcal{T}_1$ tels que $x \in A$ et $y \in B$. Alors $A \neq \phi$ et $B \neq phi$ et donc A^c, B^c sont finis. Si $A \cap B = \phi$, alors

$$(A \cap B)^c = \underbrace{A^c \cup B^c}_{fini} = \underbrace{E}_{infini}, \quad \text{(contradiction)}.$$

     Donc E n'est pas séparé.

6. $(E, \mathcal{T}_1)$ est métrisable si il existe une distance$d$ sur E tels $\mathcal{T}_1$ est la topologie associé à d. On distingue deux cas.

   - Si E est fini, alors $\mathcal{T}_1 := \mathcal{P}(E)$ est la topologie associée à la distance discrète sur E et donc $(E, \mathcal{T}_1)$ est métrisable.
   - Si E est infini, alors $(E, \mathcal{T}_1)$ n'est pas métrisable car il n'est pas séparé (on sait que tout espace métrique est séparé).

Exercice 23. On considère dans $\mathbb{R}$ la famille suivante

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{R}\} \cup \{I_r =]-r, r[, r \geq 0\}.$$

(On accepte que $\phi :=]0, 0[$).

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble des fermés de E.
3. Donner un voisinage de 2021.
4. Est ce que $]-1, 2[$ est ouvert ? fermé ?
5. Comparer cette topologie avec la topologie usuelle $\mathcal{T}_u$.
6. Déterminer $\mathcal{T}_{|\mathbb{R}_+}$ (la topologie induite sur $\mathbb{R}_+$).

Solution :

1. Montrons que $\mathcal{T}$ est une topologie.

   - On a $\phi :=]-0, 0[\in \mathcal{T}$ et $\mathbb{R} \in \mathcal{T}$ (par définition).

- Soient $A, B \in \mathcal{T}$. Montrons que $C = A \cap B \in \mathcal{T}$. Si $C = \mathbb{R}$ alors $C \in \mathcal{T}$. Si non, alors $\exists r_1, r_2 \geq 0$ tels que $A =]-r_1, r_1[$ et $B =]-r_2, r_2[$. D'où $A \cap B =]-r_0, r_0[\in \mathcal{T}$, où $r_0 = \min\{r_1, r_2\}$.
- Soit $\{A_i\}_{i\in I}$ une famille de $\mathcal{T}$. Montrons que $C = \cup_{i\in I} A_i \in \mathcal{T}$. Si $\exists i \in I : A_i = \mathbb{R}$ alors $C = \mathbb{R} \in \mathcal{T}$. Si non, alors

$$\forall i \in I, \exists r_i > 0 : A_i =]-r_i, r_i[.$$

D'où

$$C = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si}\{r_i,\ i \in I\} \text{ n'est pas majoré} \\ ]-r_0, r_0[& \text{si non, où } r_0 := \sup\{r_i,\ i \in I\} \end{cases}$$

2. Déterminons l'ensemble des fermés. Soit A un fermé de $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$. Alors A^c est ouvert $(A^c \in \mathcal{T})$. D'où $A^c = \mathbb{R} \ \vee \ A^c =]-r, r[$ avec $r \geq 0$. D'où $A = \phi \ \vee \ A = \mathbb{R}\backslash]-r, r[$. Donc l'ensemble des fermés est

$$\{\phi\} \cup \{]-\infty, -r] \cup [r, +\infty[,\ r \geq 0\}.$$

3. Un voisinage de x est un ensemble qui contient un ouvert contenant x Alors $]-2022, 2022]$, $[-2022, 2022[$ sont des voisinage de 2021 (Tout ensemble contient l'ouvert $]-(2021+a), 2021+a[$ est un voisinage de 2021, $a > 0$).

4. L'ensemble $A =]-1, 2[$ n'est pas ouvert car $A \neq \mathbb{R}$ et A n'est pas de la forme $]-r, r[$. Il n'est pas aussi fermé car $A \neq \phi$ et A n'est pas de la forme $\mathbb{R}\backslash]-r, r[$.

5. Comparons entre $\mathcal{T}$ et la topologie usuelle $\mathcal{T}_u$. Il est claire que $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_u$. Mais $\mathcal{T}_u \not\subset \mathcal{T}$ car $]-1, 2[\in \mathcal{T}_u$ mais $]-1, 2[\notin \mathcal{T}$.

6. On a par définition

$$\mathcal{T}_{|\mathbb{R}_+} = \{O \cap \mathbb{R}_+,\ O \in \mathcal{T}\}.$$

D'où

$$\mathcal{T}_{|\mathbb{R}_+} = \{\mathbb{R} \cap \mathbb{R}_+\} \cup \{]-r, r[\cap \mathbb{R}_+,\ r \geq 0\} = \{\mathbb{R}_+\} \cup \{[0, r[,\ r \geq 0\}.$$

Exercice 24. Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle $\mathcal{T}_u$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que λU et $U + a$ sont aussi des ouverts pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $a \in \mathbb{R}$. où

$$\lambda U := \{\lambda x, x \in U\}, U + a := \{x + a, x \in U\}.$$

Exercice 25. On considère dans $\mathbb{R}^2$ la famille suivante

$$\mathcal{T} = \{\mathbb{R}^2\} \cup \{A_n, n \in \mathbb{N}\} \quad \text{où } A_n = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|, |y|\} < n\}$$

$\boxed{1}$ Représenter dans un repère orthonormé A_1, A_3.

$\boxed{2}$ Montrer que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}^2$.

3 Posons $A = (xx') = \mathbb{R} \times \{0\}$, Déterminer $A \cap A_n$.

4 Déduire $\overline{A}$

Solution :

1. A_1 et A_2 sont des carrés.
2. Similaire à la question 1) de l'exercice précédente.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $n = 0$, alors $A \cap A_n = A \cap \phi = \phi$. Si $n \neq 0$, alors

$$\begin{array}{rcl} A \cap A_n & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \ \wedge \max\{x, 0\} < n\} \\ & = & \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0 \wedge -n < x < n\} :=] - n, n[\times\{0\} \end{array}$$

4. On remarque que pour tout ouvert non vide $O \in \mathcal{T}\ : A \cap O \neq \phi$. On en déduit que A est dense dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{T})$ et $\overline{A} = \mathbb{R}^2$.

Exercice 26. Soit $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle d et posons $\delta := \frac{d}{1+d}$.

1 Déterminer la topologie $\mathcal{T}_\delta$ associée à la distance δ.

2 Montrer que d et δ sont topologiquement équivalentes mais elles ne sont pas métriquement équivalente.

Solution :

1. Déterminons $\mathcal{T}_\delta$. D'après l'exercice 6, on a

$$\begin{array}{rcl} B_\delta(a, r) & = & \begin{cases} B_d(a, \frac{r}{1-r}) & \text{si} \quad 0 < r < 1 \\ \quad E & \text{si} \quad r \geq 1 \end{cases} \\ & = & \begin{cases}] - R, R[& \text{si} \quad 0 < r < 1 \text{ avec } R := \frac{r}{1-r} > 0, \\ \quad \mathbb{R} & \text{si} \quad r \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

   Lorsque r varies de 0 à 1, R varie de 0 à $+\infty$. Donc l'ensemble des boules ouvertes $B_\delta(a, r)$ décrit tous les intervalles ouvertes de la forme $]a, b[$. Donc $\mathcal{T}_\delta = \mathcal{T}_u$.

2. On sait que $\mathcal{T}_u = \mathcal{T}_d$. Donc $\mathcal{T}_\delta = \mathcal{T}_d$. D'où d et δ sont topologiquement équivalentes. D'autre part, d et δ sont métriquement équivalentes si

$$\exists\, 0 < c_1 < c_2 : c_1 d(x, y) \leq \delta(x, y) \leq c_2 d(x, y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}. \tag{2.11}$$

D'où

$$
\begin{aligned}
(2.11) \quad &\Longrightarrow \quad c_1 d(n,0) \leq \delta(n,0) \leq c_2 d(n,0), \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow \quad c_1 n \leq \frac{n}{n+1} \leq c_2 n, \ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow \quad 0 < c_1 \leq \frac{1}{n+1}, \ \forall n \in \mathbb{N} \\
&\Longrightarrow \quad 0 < c_1 = 0
\end{aligned}
$$

ce qui est impossible. D'où d et δ ne sont pas métriquement équivalentes.

Sérier 04

Exercice 27. Soit $f : (E, \mathcal{T}) \longrightarrow (F, \mathcal{T}')$ une application continue et soit $A \subset E$ une partie non vide. Montrer que la restriction $f_{|A} : (A, \mathcal{T}_A) \longrightarrow (F, \mathcal{T}')$ est continue.

Solution : Soit $W \in \mathcal{T}'$ et montrons que $f_{|A}^{-1}(W) \in \mathcal{T}_A$. On a

$f_{|A}^{-1}(W) := \{x \in A \ / \ f_{|A}^{-1}(x) = f(x) \in W\} = \{x \in E \ / \ x \in A \wedge f(x) \in W\} = A \cap f^{-1}(W)$.

Comme $f^{-1}(W) \in \mathcal{T}$, alors $f_{|A}^{-1}(W) = A \cap f^{-1}(W) \in \mathcal{T}_A$.

Exercice 28. Soit $\mathcal{T} = \{\phi, \mathbb{R}\} \cup \{]a, +\infty[, \ a \in \mathbb{R}\}$ et on définit l'application.

$$\begin{array}{rcl} (\mathbb{R}, \mathcal{T}) & \longrightarrow & (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u) \\ x & \longmapsto & f(x) = x^2 \end{array}$$

1. Vérifier que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f n'est pas continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.
4. Est ce que f est ouverte ? fermé ?.

Solution :

1. Montrons que $\mathcal{T}$ est une topologie sur $\mathbb{R}$.
   - On a $\phi, \mathbb{R} \in \mathcal{T}$ (par définition)
   - Soit $A, B \in \mathcal{T}$. Alors ou bien $A \subset B$ ou bien $B \subset A$. D'où dans les deux cas $\cap B \in \mathcal{T}$.
   - Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de $\mathcal{T}$. Montrons que que $C := \cup_{i \in I} A_i \in \mathcal{T}$. Si $C = \phi$ ou $C = \mathbb{R}$ alors $C \in \mathcal{T}$. Sinon alors $\forall i \in I : A_i = \phi$ ou $A_i =]a_i, +\infty[$. D'où

   $$C = \bigcup_{\substack{i \in I \\ A_i \neq \phi}} A_i = \bigcup_{\substack{i \in I \\ A_i \neq \phi}}]a_i, +\infty =]a, +\infty[\in \mathcal{T},$$

   où $a =:= \inf\{a_i / i \in I, \ A_i \neq \phi\}$.
2. Continuité de f. On a $I =]0, 1[\in \mathcal{T}_u$, mais

   $$f^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) = x^2 \in]0, 1[\} =]-1, 0[\cup]0, 1[\notin \mathcal{T}.$$

   Donc f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{3}$ Continuité de f en $a \in \mathbb{R}$.

$$f \text{ est continue } en a \iff \forall V \in \mathcal{O}(f(a)), f^{-1}(V) \in \mathcal{V}(a).$$

On a pour $V :=]a^2-1, a^2+1[$ est un ouvert contenant $f(a) = a^2$, mais $f^{-1}(V)$ ne contient aucun ouvert de $\mathcal{T}$, car $f^{-1}(V)$ est borné. Donc $f^{-1}(V) \notin \mathcal{V}(a)$.

$\boxed{4}$ f est ouvert si l'image direct de tout ouvert est ouvert. On a pour $I :=]a, +\infty[\in \mathcal{T}$. On a

$$f(I) = \{x^2 \in \mathbb{R} : x > -1\} = \{x^2 : x^2 \geq 0\} = [0, +\infty[\notin \mathcal{T}_u$$

Donc f n'est pas ouvert.

Exercice 29. $\boxed{1}$ Montrer que $id : (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$ est bijective et continue tendais que $(id)^{-1}$ n'est pas continue en aucun point.

$\boxed{2}$ Montrer que $id : (E, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (E, \mathcal{T}_2)$ est un homéomorphisme si et seulement si $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2$.

Solution :

$\boxed{1}$ La bijectivité est évidente. Pour la continuité de id, on a pour tout ouvert $O \in \mathcal{T}_u$ $(id)^{-1}(O) := O \subset \mathbb{R}$ et donc $(id)^{-1}(O) \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$. D'où id est continue. Pour la continuité de id^{-1}, on a $O := [0, 1[\in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, mais $(id^{-1})^{-1}(O) = O$n'est ni ouvert ni fermé dans $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_u)$. Donc id^{-1} n'est pas continue.

$\boxed{2}$ On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}_2 &\iff (\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2) \wedge (\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1) \\
&\iff ((id^{-1})^{-1}(\mathcal{T}_1) = \mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2) \wedge ((id)^{-1}(\mathcal{T}_2) = \mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1) \\
&\iff (id^{-1} \text{ est continue}) \wedge (id \text{ est continue }) \\
&\iff id \text{ est un homéomorphisme.}
\end{aligned}$$

Exercice 30. On définit sur $\mathbb{N}$ la famille suivante $\mathcal{T} = \{\phi, A_n, n \in \mathbb{N}\}$ où

$$A_n = \{n, n+1, ...\}.$$

$\boxed{1}$ Vérifie que $\mathcal{T}$ est une topologie.

$\boxed{2}$ Comparer entre $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}_{\text{cof}}$.

$\boxed{3}$ Étudier la convergence de la suite $u_n = (-1)^n + 1$ pour $\mathcal{T}$.

Solution :

$\boxed{1}$ Pareil aux exercices de la série précédente.

$\boxed{2}$ On a $\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_{\text{cof}}$ car pour tout $A_n \in \mathcal{T}$, on a A_n^c est fini et donc $A_n \in \mathcal{T}_{\text{cof}}$. D'autre part $\mathcal{T}_{\text{cof}} \not\subset \mathcal{T}$ car $O = \mathbb{N} \setminus \{2\} \in \mathcal{T}_{\text{cof}}$ mais $O \notin \mathcal{T}$.

$\boxed{3}$ La suite $(u_n)_n$ est convergente vers une limite ℓ dans $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ si

$$\forall O \in \mathcal{T},\ \ell \in O,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N : u_n \in O.$$

On distingue deux cas

- Si $\ell \neq 0$, alors l'ouvert A_1 contient ℓ et on a

$$\forall N \in \mathbb{N}, u_{2N+1} = 0 \notin A_1$$

et donc ℓ n'est pas limite de $(u_n)_n$.

- Si $\ell = 0$, alors le seul ouvert de $\mathbb{N}$ contenant 0 est $\mathbb{N}$ et on $u_n \in \mathbb{N}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc $(u_n)_n$ est convergente vers 0.

Exercice 31. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'un espace topologique séparé $(E, \mathcal{T})$ convergente vers ℓ. Posons

$$A = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$$

$\boxed{1}$ Montrer que l'ensemble A est compact.

$\boxed{2}$ Si $\mathcal{T}$ est métrisable. Montrer que A est compact par une autre méthode.

Exercice 32. Soit $f : (E, \mathcal{T}_1) \longrightarrow (F, \mathcal{T}_2)$ est une application continue et surjective. Montrer que si E est compact et F est séparé alors F est compact.

Exercice 33. Soit $\mathbb{R}$ muni de la topologie $\mathcal{T} = \{\phi, \mathbb{R}\} \cup \{]-r, r[, r > 0\}$.

$\boxed{1}$ Montrer que $\mathbb{R}$ est connexe.

$\boxed{2}$ Montrer que $A := \{1, 2\}$ est connexe

$\boxed{3}$ * Quelles sont les parties connexes

Exercice 34. Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la topologie usuelle. Considérons les ensembles suivants

$$B_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : (x+1)^2 + y^2 < 1\}, \quad B_2 \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 < 1\}$$

$\boxed{1}$ Représenter graphiquement B_1 et B_2 dans un repère orthonormé.

$\boxed{2}$ Montrer que B_1 et B_2 sont connexes (Il suffit de montrer qu'ils sont connexe par arc).

$\boxed{3}$ Est ce que $B_1 \cup B_2$ est connexe ?.

$\boxed{4}$ Montrer que $B(O, 1)\ \{O\}$ est connexe (où $B(O, 1)$ est la boule unité).

$\boxed{5}$ Montrer que $B(O, 1)$ et $]0, 1[$ ne sont pas homéomorphes.