UNIVERSITÉ DE MOHAMED BOUDIAF, M'SILA
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET DE L'INFORMATIQUE
DÉPARTEMENT DES MATHÉMATIQUES

1985

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Cours de

Problèmes de diffusions non-linéaires

(Méthodes et techniques)

Master II, E.D.P.

Dr. BOUGHERARA BRAHIM

Table des matières

Préface

Ce cours est destiné aux étudiants de Master 2, spécialité équations aux dérivées partielles et analyse fonctionnelle. On y présente une sélection de méthodes et techniques orientées vers la résolution des équations aux dérivées partielles non-linéaires. L'objectif de ce cours est de savoir comment appliquer les outils théoriques de l'analyse fonctionnelle pour démontrer des résultats d'existence et d'unicité de quelques problèmes parabolique et elliptique non-linéaires.

Le premier chapitre est justement consacré à des rappels d'analyse réelle et d'analyse fonctionnelle, principalement espaces L^p, distributions, espaces de Sobolev. Dans le deuxième chapitre, on exhibe les propriétés principales des espaces des fonctions à valeurs vectorielles, donnés sans démonstration. Le troisième chapitre est consacré à la résolution d'un problème parabolique semi-linéaire en utilisant la méthode de semi-discrétisation en temps qui consiste à l'approximation d'un problème parabolique par un problème elliptique en discrétisant l'intervalle du temps $[0, T]$ suivi d'un passage à la limite. Dans le quatrième chapitre, on a traité le même problème parabolique mais avec des hypothèses plus faibles sur les données. On a utilisé la méthode d'approximation en régularisant le problème et puis on passe à limite sur les solution des problèmes approchés.

1 Rappel sur les espaces de Lebesgue, distributions et espaces de Sobolev

N est un entier naturel non nul, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ muni de la mesure de Lebesgue dx.

1.1 Quelques résultats d'intégration

Définition 1.1. 1. On désigne par $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, l'espace des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tel que telles que la quantité

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x$$

est finie.

2. Pour $p = \infty$, On désigne par $L^\infty(\Omega)$, l'espace des fonctions mesurables $f : \Omega \to \mathbb{R}$ telles que la quantité

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname*{ess\ sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$$

est finie

☞ **Remarque 1.1.** La quantité $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ définit une norme sur les espaces $L^p(\Omega)$. De plus, $(L^p(\Omega), \|.\|_{L^p(\Omega)})$ sont des espaces de Banach pour $1 \leq p \leq \infty$, séparable pour $1 \leq p < \infty$ et réflexifs pour $1 < p < \infty$.

Exercice 1. a) Montrer que $\|f\|_{L^p(\Omega)}$ définit une norme sur $L^p(\Omega)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$. b) Montrer aussi que ces espaces avec leurs normes associées sont des espaces de Banach.

Dans ce qui suit, nous présentons quelques résultats de convergence et de densité.

Théorème 1.1 (Théorème de convergence monotone de Beppo-Levi). Soit $(f_n)_n$ une suite croissante de fonctions de $L^1(\Omega)$, telle que $\sup_n \int_\Omega f_n \mathrm{d}x < \infty$. Alors f_n converge p.p. sur Ω vers une fonction $f \in L^1(\Omega)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0$.

Théorème 1.2 (Théorème de convergence dominée de Lebesgue)**.** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ avec $<\leq p < \infty$. On suppose que $(f_n)_n$ converge p.p. sur Ω vers une fonction f et qu'il existe une fonction $g \in L^p(\Omega)$ telle que pour chaque n $: |f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. $x \in \Omega$. Alors $f \in L^p(\Omega)$ et $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$.

Théorème 1.3 (Réciproque du théorème de Lebesgue). Soient $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$ telles que $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} = 0$ avec $<\leq p \leq +\infty$. Alors il existe une sous-suite $(f_{k_n})_n$ telle que

1. $(f_{k_n})_k$ converge p.p. sur Ω vers f.

2. Il existe $h \in L^p(\Omega)$ tel que pour tout n $: |f_{k_n}(x)| \leq h(x)$ p.p. $x \in \Omega$.

(La preuve de ce théorème est basée sur le théorème de Fischer-Riesz **??** ci-dessous .)

Exercice 2. Soient $p, q \in [1, \infty[$. Soit (f_n) une suite de fonctions de $L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ qui converge vers f dans $L^p(\Omega)$ et converge vers g dans $L^q(\Omega)$. Montrer que $f = g$ p.p. sur Ω.

Exercice 3. Montrer que l'extraction d'une sous-suite est nécessaire dans le théorème précédent. Prendre l'exemple suivant : $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(x) = 1_{[\frac{n-1}{m} - \frac{m-1}{2}, \frac{n}{m} - \frac{m-1}{2}]}(x)$$

où $m \in \mathbb{N}^*$, $\frac{m(m-1)}{2} \le n \le \frac{m(m+1)}{2} + 1$.

Théorème 1.4 (Théorème de densité). L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à support compact est danse dans $L^p(\Omega)$. C'est à dire pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $f \in L^p(\Omega)$, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que : $\|f - \varphi\|_{L^p(\Omega)} \le \varepsilon$.

Théorème 1.5 (Inégalité de Hölder). Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ où $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ avec $1 \le p, q \le \infty$. Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a l'inégalité suivant :

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \mathrm{d}x \le \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Définition 1.2. *1) On note par $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace de toutes les fonctions f de classe C^∞ et à support compact.*

2) Une suite $\{\varphi_n\}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ est dite convergente vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$ s'il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que

$$\forall n : supp\varphi_n \subset K, \quad D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi \text{ uniformément sur } \Omega$$

pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$.

Définition 1.3. 1. Une forme linéaire $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ est continue si pour tout suite $(\varphi_n)_n$ convergente vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$.

$$\lim_{n\to\infty} \langle T, \varphi_n - \varphi \rangle = 0.$$

2. Une distribution sur Ω est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$. On note par $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace de toutes les distributions sur Ω (c'est l'espace dual de $\mathcal{D}(\Omega)$).

Exercice 4 (Distribution régulière). Montrer que pour tout $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, l'application $T_f : \mathcal{D}(\Omega \to \mathbb{R}, \varphi \longmapsto \int_\Omega f\varphi \mathrm{d}x$ définit une distribution sur Ω. (T_f s'appelle distribution régulière, on la note par f.)

Définition 1.4 (Dérivation d'une distribution). On appelle dérivée d'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, d'ordre $\alpha \in \mathbb{N}^N$, l'application

$$\begin{array}{rcl} D^\alpha T : \mathcal{D}(\Omega) & \to & \mathbb{R} \\ \varphi & \longmapsto & D^\alpha T(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \end{array}$$

Exercice 5. a. Montrer que $D^\alpha T$ est une distribution sur Ω, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$ (On dit alors que T est indéfiniment dérivable).

b. Supposons que $T := f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$. Montrer que les dérivées de T jusqu'à l'ordre k coïncident avec les dérivées classiques de f.

Définition 1.5. Soit E un espace de Banach. On appelle dual de E et note E' l'espace de toutes les formes linéaire continue f sur E, et on écrit $f(x) := \langle f, x\rangle$ $(x \in E)$.

Théorème 1.6 (Théorème de représentation de Riesz-Fréchet)**.** Soit H un espace de Hilbert et H' est son dual. Alors pour tout élément $f \in H'$, il existe un unique élément $x \in H$ tels que

$$\langle f, y\rangle = (x, y) \text{ pour tout } y \in H,$$

et $\|f\| = \|x\|$, où $(\ ,\ )$ désigne le produit scalaire sur H. De plus l'application $f \longmapsto x$ est linéaire et continue.

Théorème 1.7. Soit $p \in]1, +\infty[$. Pour tout élément $f \in (L^p(\Omega))'$, il existe un unique élément $g \in L^{p'}(\Omega)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ tel que

$$\langle f, v\rangle_{(L^p(\Omega))' \times L^p(\Omega)} = \int_\Omega g v \mathrm{d}x, \quad \forall v \in L^p(\Omega).$$

De plus, on a

$$\|f\|_{(L^p(\Omega))'} = \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Ce théorème nous permet d'identifier le dual de L^p avec $L^{p'}$.

Définition 1.6 (Convergence faible)**.** *Une suite $(x_n)_n$ est dite converge faiblement vers x dans un espace de Banach E et on note $x_n \rightharpoonup x$, si pour tout élément $f \in E'$ on a*

$$\langle f, x_n\rangle_{E' \times E} \longrightarrow \langle f, x\rangle_{E' \times E} \textit{ quand } n \to +\infty.$$

D'après les théorèmes ci-dessus, on peut identifier le dual de $L^p(\Omega)$ avec $L^{p'}(\Omega)$ et aussi tout espace de Hilbert avec son dual. D'où on le résultat suivant

Proposition 1.8. 1. Une suite (f_n) est convergente faiblement vers f dans L^p si et seulement si pour tout $g \in L^{p'}$

$$\int f_n g \mathrm{d}x \longrightarrow \int f g \mathrm{d}x,\ n \to \infty.$$

$$\langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle,\ n \to \infty.$$

2. Une suite $(x_n)_n$ est convergente faiblement vers x dans un espace de Hilbert H si et seulement si pour tout $y \in H$ on a

$$(x_n, y) \longrightarrow (x, y), \quad n \to \infty.$$

Exercice 6. i) Si la suite $(f_n)_n$ est convergente dans L^p, montrer qu'elle est faiblement convergente dans L^p.

ii) Si la suite $(f_n)_n$ de L^p est convergente $\mathcal{D}'(\Omega)$, montrer quelle est faiblement convergente dans L^p.

Théorème 1.9. Toute suite bornée dans un espace de Hilbert H admet une sous-suite faiblement convergente dans H.

1.2 Quelques résultats sur les espaces de Sobolev

Définition 1.7. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert, $p \in [1, \infty]$ et $k \in \mathbb{N}$. On définit l'espace de Sobolev :*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^N \text{ tel que } |\alpha| \leq k\}. \tag{1.2}$$

(les dérivées ici sont au sens de distributions). Et on définit sur $W^{k,p}(\Omega)$ la norme suivante :

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \tag{1.3}$$

Tous les espaces ainsi définis sont des espaces de Banach.

Définition 1.8. *Avec les mêmes notations on définit les espace $W_0^{k,p}(\Omega)$ comme l'adhérence de l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{k,p}(\Omega)$.*

☞ **Remarque 1.2.** *Pour $p = 2$, on note $H^k(\Omega) := W^{k,p}(\Omega)$ et $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,p}(\Omega)$. Ces deux espaces sont des espaces de Hilbert.*

Définition 1.9. *On dit que la fonction $u \in \mathcal{C}(\Omega)$ appartient à l'espace $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$, pour $\alpha \in]0, 1]$ si :*

$$\rho_\alpha(u) := \sup_{x,y \in \Omega,\ x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha} < \infty. \tag{1.4}$$

On munit $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$ par la norme suivante :

$$|u|_\alpha := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \rho_\alpha(u). \tag{1.5}$$

On définit aussi les espaces de Holder $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, par

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) : |u|_{k,\alpha} := \sum_{\beta \in \mathbb{N}^N : |\beta| \leq k} |D^\beta u|_\alpha < \infty, \ \}. \tag{1.6}$$

$$\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{u \in \mathcal{C}(\Omega) / \ \exists v \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^N) : v_{|\overline{\Omega}} = u\}. \tag{1.7}$$

Les espaces ainsi définis sont des espaces de Banach.

Théorème 1.10. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1. Alors, l'injection canonique suivante

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} L^{p^*}(\Omega) & \text{si} \quad p < N \\ L^q(\Omega), \ \forall q > 1, & \text{si} \quad p = N \\ C^\alpha(\overline{\Omega}) & \text{si} \quad p > N \end{cases} \tag{1.8}$$

est continue, où $p^* = \frac{Np}{N-p}$ (i.e. $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}$) et $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$, pour tout $p \geq 1$. De plus, pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a les inégalité suivantes :

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq C_1 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{1.9}$$

$$|u|_\alpha \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{1.10}$$

où $C_1, \ C_2 > 0$, dépendent seulement de N, p et le diamètre de Ω.

Théorème 1.11 (de Rellich-Kondrachov). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et $1 \leq p < N$. Alors l'injection canonique suivante

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \text{ pou tout } q < p^* \tag{1.11}$$

est compact, où $p^* = \frac{Np}{N-p}$

Un résultat important qui découle de ce théorème est l'inégalité de Poincaré :

Théorème 1.12 (Inégalité de Poincaré). Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$ tel que $\partial\Omega$ est de classe C^1 et $1 \leq p < \infty$. Alors il existe une constant $C > 0$ telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \text{ pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega) \tag{1.12}$$

1.3 Dualité

Définition 1.10. *On définit l'espace $W^{-1,p'}(\Omega)$ comme l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Autrement dit un élément f de $W^{-1,p'}(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$, et on note par $\langle \, , \, \rangle$ le crochet de dualité entre $W^{-1,p'}(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$. Et rappelons que

$$\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \sup_{v \in W_0^{1,p}(\Omega)} \frac{\langle f, v\rangle}{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \sup_{\|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}=1} \langle f, v\rangle$$

et

$$\langle f, v\rangle \leq \|f\|_{W^{-1,p'}} \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \text{ pour tout } v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Théorème 1.13. ***(Caractérisation de** $W^{-1,p'}(\Omega)$**).*** Soit $f \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Alors Il existe

$$f^0, f^1, \ldots, f^N \quad dans L^p(\Omega),$$

tels que pour tout $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ on a

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega \left(f^0 v + \sum_{i=1}^N f^i v_{x_i} \right) \mathrm{d}x \tag{1.13}$$

et

$$\|f\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \left(\int_\Omega \sum_{i=0}^N |f^i|^p \right)^{1/p}. \tag{1.14}$$

En particulier si $f \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ alors

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega f v \mathrm{d}x \text{ pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

1.4 Opérateur p-Laplacien

Soit $p \in]1, +\infty[$. L'opérateur p-Laplacien est défini par

$$\begin{aligned}\Delta_p u &\overset{\text{def}}{=} \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \\ &= |\nabla u|^{p-4}\left[|\nabla u|^2\Delta u + (p-2)\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right].\end{aligned} \tag{1.15}$$

Pour $p = 2$, on obtient l'opérateur Laplacien

$$\Delta_2 u = \Delta u = \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}.$$

Pour $p > 2$, l'opérateur p-Laplacien est dégénéré aux points critiques ($\nabla u = 0$), et pour $1 \leq p < 2$, l'opérateur est singulier.

Pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, l'application

$$W_0^{1,p}(\Omega) \ni v \longmapsto \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v \mathrm{d}x$$

est une forme linéaire continue sur $W_0^{1,p}(\Omega)$. Elle appartient donc à $W^{-1,p'}(\Omega)$. De plus si u est assez régulière, on a d'après la formule de Green

$$\int_\Omega -\Delta_p u \ v \ \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v \mathrm{d}x.$$

D'où on peut définir le paire de dualité suivant

$$\langle -\Delta_p u, v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v \mathrm{d}x, \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

L'application définie par

$$\begin{array}{rcl} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,p'}(\Omega) \\ u & \longmapsto & -\Delta_p u \end{array}$$

est uniformément continue (pour voir cela, appliquer les inégalités de l'exercice 13). Elle est aussi strictement monotone, c'est à dire

$$\langle -(\Delta_p u - \Delta_p u), u - v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)} > 0 \quad \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega) \text{ avec } u \neq v.$$

Pour voir cela, on écrit

$$\langle -(\Delta_p u - \Delta_p u), u - v\rangle_{W^{-1,p'}(\Omega)\times W_0^{1,p}(\Omega)} = \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right).(\nabla u - \nabla v)\,\mathrm{d}x$$

et on applique les inégalités de l'exercice 14.

1.5 Quelques inégalités utiles

1. Inégalité de Cauchy

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2, \tag{1.16}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

2. Inégalité de Young qui est plus général que le précédent

$$ab \leq \frac{1}{p}(\epsilon a)^p + \frac{1}{p'}\left(\frac{b}{\epsilon}\right)^{p'} = \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^{p'},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \tag{1.17}$$

pour tout $\varepsilon = \epsilon^p/p > 0$ et pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

3. Inégalité de Cauchy

$$|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j| \leq \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\eta_i\eta_j},$$

pour tout forme quadratique positive $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\eta_j$ avec $a_{ij} = a_{ji}$, et $\xi_1, \ldots, \xi_n$, $\eta_1, \ldots, \eta_n$ des nombres réels quelconques.

4. Inégalité de Cauchy

$$\left|\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \mathrm{d}x\right| \leq \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} u_i^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}.$$

pour tout $u_i,\ v_i \in L^2(\Omega)$, $(i = 1, \ldots, n)$.

5. Inégalité de Hölder généralisé

$$\left|\int_\Omega \prod_{i=1}^{n} u_i \mathrm{d}x\right| \leq \prod_{i=1}^{n}\left(\int_\Omega u_i^{p_i}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p_i}}, \quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i} = 1.$$

pour tout $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $(i = 1\ldots, n)$.

6. Inégalités d'interpolation Soit $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Si $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $p \leq r \leq q$ et on a

$$\|f\|_{L^r}(\Omega) \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(\Omega)}\|f\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}, \quad \text{où } \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}. \tag{1.18}$$

On a aussi cette inégalité pour tout $2 \leq p \leq q \leq p^*$:

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \leq C_{p,q}\|\nabla u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \times \|u\|^{1-\theta}_{L^2(\Omega)} \tag{1.19}$$

pour tout $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, où $\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p^*} + \frac{1-\theta}{p}$.

1.6 Exercices

Exercice 7. *Soient p, q et r trois réels supérieure ou égaux à 1 tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$. Montrer à l'aide de l'inégalité de Hölder (1.1) que $fg \in L^r(\Omega)$ et*

$$\|fg\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Exercice 8. *Soit $(f_n)_n$ une suite de $L^p(\Omega)$ convergente vers f dans $L^p(\Omega)$.*
1. Montrer que si Ω est borné alors $(f_n)_n$ converge vers f dans $L^q(\Omega)$ pour tout $1 \leq q \leq p$
2. Montrer que $(f_n)_n$ converge vers f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Exercice 9. *Montrer que les fonctions continues et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux et à support borné dans Ω, appartiennent à $H^1(\Omega)$.*

Exercice 10. *Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x) = x^\alpha$.*

1. *Montrer que $f \in L^1(0, 1)$ si et seulement si $\alpha > -1$.*
2. *Montrer que $f \in H^1(0, 1)$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.*
3. *Montrer que $f \in H^{-1}(0, 1)$ si et seulement si $\alpha > -3/2$.*

Exercice 11. *Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $M \subset E$ un ensemble fermé. Montrer que M est réflexif par rapport la norme induite de E.*
Supposons que $T : E \longrightarrow F$ est une isométrie bijective. Montrer que si E est réflexif alors F est aussi.

Exercice 12. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telles que*

$$\exists C > 0 : |f(t)| \leq Ct, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Soit $A : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$, $u \mapsto f(u)$. Montrer que A est bien défini, continu et compact.

Exercice 13. *Montrer que la fonction $X \longmapsto |X|^p$ est différentiable sur $\mathbb{R}^N$ pour tout $p > 1$ et calculer sa différentielle.*
Montrer les deux inégalités suivantes :

$$a|^{p-2}a.(a-b) \geq \frac{1}{p}(|a|^p - |b|^p), \qquad \left(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b\right).(a-b) > 0 \tag{1.20}$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}^N, a \neq b, p > 1$ (utiliser la convexité de la fonction ci-dessus).
En déduire que l'opérateur $-\Delta_p u$ est monotone i.e.

$$\langle -(\Delta_p u - \Delta_p v), u - v \rangle_{W^{-1,p'} \times W_0^{1,p}} \geq 0. \ \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Exercice 14. *Montrer les deux inégalités suivantes :*

1) Si $1 < p < 2$

$$||a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b| \leq c_p |a-b|^{p-1}.$$

2) Si $p \geq 2$
$$||a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b| \leq c_p \left(|a|^{p-2} + |b|^{p-2}\right)|a-b|.$$
pour certain constante $c_p > 0$ *dépend de* p *et pour tout* $a, b \in \mathbb{R}^N$.

Exercice 15. *Montrer les deux inégalités suivantes*

i) $p > 2$
$$p\left(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b\right).(a-b) \leq \frac{1}{2^{p-1}-1}|a-b|^p$$

ii) $1 < p < 2$
$$p\left(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b\right).(a-b) \leq C(p)\frac{|a-b|^p}{(|a|+|b|)^{2-p}}$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}^N$.

2 Fonctions à valeurs vectorielles en temps

2.1 Préliminaires

On introduit dans ce cours les espaces des fonctions à valeurs vectorielles, qui dépendent d'une variable réelle t et à valeurs dans un espaces de Banach de Dimension infini, comme par exemple l'espace $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Ce sont les espaces où les solutions des équations parabolique de divergence forme se trouvent. Nous avons besoin de préciser donc comment définir une telle intégrale et de donner les différentes propriétés de ces espaces concernant la régularité et les injections.

Soient V un espace de Banach et $T>0$.

Définition 2.1. *Soit V un espace de Banach. Une fonction $f:(0,T)\longrightarrow V$ est dite fortement mesurable s'il existe une suite des fonctions étagées qui converge presque partout vers f.*

Définition 2.2. *On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans un espace de Banach V, et on note $L^p(0,T;V)$, l'espace des fonctions fortement mesurables $u:[0,T]\to V$ avec*

$$\|u\|_{L^p(0,T;V)}=\int_0^T\|u(t)\|_V^p\mathrm{d}t<0\qquad \textit{pour } 1\le p<\infty$$

et

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;V)}=\underset{t\in[0,T]}{\textit{ess sup}}\|u(t)\|_V<0\qquad \textit{pour } p=\infty.$$

☞ **Remarque 2.1.** *Rappelons ici que l'intégrale est à valeurs vectoriel, la notion de mesurabilité des fonctions n'est pas suffisante. Car une fonction mesurable n'est pas toujours une limite presque partout d'une suite des fonctions étagées dans un espace de Banach non séparable. Donc il est nécessaire d'introduire la notion de mesurabilité forte. Ces deux notions sont équivalentes si l'espace de Banach V est séparable. Pour construire donc l'intégrale d'une fonction à valeurs vectorielle, on doit supposer que la fonction est fortement mesurable. L'intégrale d'une fonction étagé est défini de la manière classique. Par conséquent l'intégrale d'une fonction fortement mesurable est considéré comme la limite d'une suite des intégrales des fonctions étagées. Pour plus de détail, on réfère aux notes des cours suivantes [7], [9].*

Définition 2.3. *L'espace $\mathcal{C}([0,T];V)$ est l'ensemble des fonctions continues $u:[0,T]\to V$ avec*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^\infty([0,T];V)}=\max_{t\in[0,T]}\|u(t)\|_V<+\infty$$

Définition 2.4. *i) On appelle espace de distributions sur $(0,T)$ à valeurs dans V et on note $\mathcal{D}'(0,T;V)$ l'espace des applications linéaires continues $f:\mathcal{D}(0,T)\to V$. Pour tout $\varphi\in V$ (la continuité de l'application linéaire est dans le sens de la définition 1.3). On note la valeur de f en φ par $\langle f,\varphi\rangle\in V$.*

ii) La dérivée de $f \in \mathcal{D}'(0,T;V)$ notée f' est un élément de $\mathcal{D}'(0,T;V)$ (à démontrer) défini par

$$\langle f', \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = -\langle f, \varphi' \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}}, \text{ pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Exercice 16. *Soit $f \in \mathcal{D}'(0,T;V)$*
1. Montrer que $f' \in \mathcal{D}'(0,T;V)$.
2. En déduire que f est indéfiniment dérivable.

Définition 2.5 (Distribution régulière). *Si $f \in L^1_{loc}(0,T;V)$. On peut lui associer une distribution dite distribution régulière, encore notée f, définie par :*

$$f : \mathcal{D}(0,T) \to V, \quad \varphi \to \langle f, \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = \int_0^T f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

et la dérivée f' est définie par

$$f' : \mathcal{D}(0,T) \to V, \quad \varphi \to \langle f', \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} = -\int_0^T f(t)\varphi'(t)\mathrm{d}t.$$

☞ **Remarque 2.2.** *Pour $1 \leq p < \infty$, on peut identifier les deux espaces $L^p(0,T;L^p(\Omega))$ et $L^p((0,T) \times \Omega)$, grâce à l'isomorphisme suivant*

$$\begin{array}{rcl} L^p(0,T;L^p(\Omega)) & \longrightarrow & L^p((0,T) \times \Omega) \\ u & \longmapsto & \tilde{u} : \tilde{u}(t,x) := [u(t)](x) \end{array}$$

De la même manière, on peut aussi identifier l'espaces $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ avec l'espace des fonction $\tilde{u} : (0,T) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\int_0^T \int_\Omega \left(|\tilde{u}(t,x)|^p + |\nabla \tilde{u}(t,x)|^p\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}t < +\infty.$$

De plus, on le résultat suivant :

Proposition 2.1. *Soient $p, q \geq 1$, $u \in W^{1,p}(0,T;L^q(\Omega))$. Alors, la fonction $\tilde{u}$ définie sur $(0,T) \times \Omega$ par $\tilde{u}(t,x) = [u(t)](x)$ p.p. satisfait*

$$\tilde{u},\ \partial_t \tilde{u} \in L^1_{loc}((0,T) \times \Omega)$$

$$\int_0^T \left(\int_\Omega |\tilde{u}(t,x)|^q\right)^{p/q} \mathrm{d}t + \int_0^T \left(\int_\Omega |\partial_t \tilde{u}(t,x)|^q\right)^{p/q} \mathrm{d}t < +\infty.$$

De plus, on a presque pour tout $t \in (0,T)$: $\partial_t \tilde{u}(t,.) = u'(t)(.)$ p.p. sur Ω. ($\partial_t \tilde{u}$ est la dérivée partielle dans la direction t au sens de distributions sur $(0,T) \times \Omega$)

☞ **Remarque 2.3.** *Supposons que $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Alors $u' \in L^1_{loc}(0,T;H_0^1(\Omega))$ et on a*

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T) : \langle u', \varphi \rangle_{\mathcal{D}' \times \mathcal{D}} \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

D'après le théorème de Riesz, on peut identifier $L^2(\Omega)$ avec son dual et aussi $H_0^1(\Omega)$ avec son dual $H^{-1}(\Omega)$, mais pas au même temps.

- *Si on identifie $L^2(\Omega) \equiv (L^2(\Omega))'$ alors, on a pour tout $w \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a*

$$\begin{aligned}\langle\langle u', \varphi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}, w\rangle &:= \int_\Omega \left(-\int_0^T u\varphi' \mathrm{d}t\right) w\mathrm{d}x = -\int_\Omega\int_0^T u\partial_t(\varphi w)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \langle \partial_t u, \varphi w\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_T)\times\mathcal{D}(\Omega_T)}, \quad \Omega_T = (0,T)\times\Omega\end{aligned}$$

D'où $u'(t)(x) \equiv \partial_t u(t,x)$ presque partout sur Ω_T.

- *Si on identifie $H_0^1(\Omega)$ avec $H^{-1}(\Omega)$, on a*

$$\begin{aligned}\langle\langle u', \varphi\rangle_{\mathcal{D}'\times\mathcal{D}}, w\rangle &:= \int_\Omega \nabla\left(-\int_0^T u\varphi' \mathrm{d}t\right).\nabla w\mathrm{d}x = -\int_\Omega\int_0^T u\partial_t(\varphi\Delta w)\mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &= \langle \partial_t(\Delta u), \varphi w\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega_T)\times\mathcal{D}(\Omega_T)}.\end{aligned}$$

D'où $u'(t)(x) \equiv \partial_t(\Delta u(t,x))$ presque partout sur Ω_T..

2.2 Quelques propriétés utiles

Proposition 2.2 (Commuter action et intégrale). *Soient V un espace de Banach, $u \in L^1(0,T;V)$ et $\psi \in V'$. Alors on a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$*

$$\left\langle \psi, \int_0^T u(t)\varphi(t)\mathrm{d}t\right\rangle_{V'\times V} = \int_0^T \langle\psi, u(t)\rangle_{V'\times V}\varphi(t)\mathrm{d}t.$$

Proposition 2.3 (Commuter action et dérivée). *Soit $u \in W^{1,p}(0,T;L^1(\Omega))$ avec $1 \le p \le +\infty$. Alors l'application $t \mapsto \int_\Omega [u(t)](x)\mathrm{d}x$ est dans $W^{1,p}(0,T)$ et on a*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t)\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{d}{dt}u(t)\mathrm{d}x$$

Plus générale, si $\ell : E \to F$ est linéaire et continue alors pour tout $u \in W^{1,p}(0,T;E)$ on a

$$\ell(u) \in W^{1,p}(0,T;F), \qquad \text{et } (\ell(u))' = \ell(u').$$

On a les résultats importants suivants :

Théorème 2.4. Si V' est séparable alors V est séparable et on a

$$(L^p(0,T;V))' = L^{p'}(0,T;V'), \qquad \text{pour } p \ge 1.$$

De plus on a le paire de dualité suivant

$$\langle f, u\rangle_{L^{p'}(0,T;V')\times L^p(0,T;V)} = \int_0^T \langle f(t), u(t)\rangle_{V'\times V}\mathrm{d}t.$$

Pour $p > 1$, si V est séparable et réflexif, alors $L^p(0,T;V)$ est réflexif.

Théorème 2.5. Supposons que $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ et la dérivée (dans le sens de la définition 2.4) $u' \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Alors

i) Après de redéfinir u sur un ensemble de mesure nul, on a

$$u \in \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega))$$

De plus, il existe une constante $C>0$ dépend seulement de T telle que

$$\max_{t\in[0,T]} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|u\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|u'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))}\right)$$

ii) l'application

$$t \longmapsto \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}$$

est absolument continue et on a pour p.p. $t \in (0,T)$:

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)} = 2\langle u'(t), u(t)\rangle$$

Théorème 2.6. Soient $p,q \geq 1$, V_1, V_2 des espaces de Banach tels que $V_1 \hookrightarrow V_2$. Soit $u \in L^p(0,T;V_1)$ avec $u' \in L^q(0,T;V_2)$. Alors

$$u \in \mathcal{C}([0,T];V_2)$$

De plus, il existe une constante $C>0$ dépend seulement de T telle que

$$\max_{t\in[0,T]} \|u\|_{V_2} \leq C\left(\|u\|_{L^p(0,T;V_1)} + \|u'\|_{L^q(0,T;V_2)}\right)$$

Théorème 2.7 (Aubin-Simon)**.** Soient $1 < p \leq +\infty$, $1 \leq q \leq +\infty$, V, E et F des espaces de Banach tels que

$$V \hookrightarrow_c E \hookrightarrow F.$$

Soit $\{u_n\}_n$ une suite bornée dans $W^{1,p}(0,T;F)$ et dans $L^q(0,T;V)$. Alors, on peut extraire une sous-suite $\{u_{n_k}\}_k$ convergente dans $\mathcal{C}([0,T];F)$ et dans $L^q(0,T;E)$.

2.3 Exercices

Exercice 17. *Supposons que*

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u} & \textit{dans} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \mathbf{u}_k' \rightharpoonup \mathbf{v} & \textit{dans} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \end{cases}$$

1. Montrer que

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_k', \varphi w\rangle \mathrm{d}t = -\int_0^T \langle \mathbf{u}_k, \varphi' w\rangle \mathrm{d}t$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ *et* $w \in H_0^1(\Omega)$.
2. En déduire que $\mathbf{v} = \mathbf{u}'$.

Exercice 18. *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $\ell : E \to F$ une application linéaire continue.*

1) *Montrer que pour tout $u \in W^{1,p}(0,T;E)$ on a :*

$$\ell(u) \in W^{1,p}(0,T;F) \text{ et } \frac{d}{dt}\ell(u) = \ell(\frac{du}{dt}).$$

2) *En déduire que pour tout $u \in W^{1,p}(0,T;L^1(\Omega))$ on a :*

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(t,x)dx = \int_\Omega \frac{d}{dt}u(t,x)dx.$$

Exercice 19. *Soient $p,q \in]1,\infty[$ et $r \in]1,\infty[$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r}$. Soit $B : E \times F \to G$ une forme bilinéaire continue.*

1) *Montrer que pour tout $u \in W^{1,p}(0,T;E), v \in W^{1,q}(0,T;F)$, on a*

$$B(u,v) \in W^{1,r}(0,T;G) \text{ et } \frac{d}{dt}B(u,v) = B\left(\frac{du}{dt},v\right) + B\left(u,\frac{dv}{dt}\right).$$

2) *Montrer que pour tout $s,t \in [0,T]$ on a :*

$$\int_s^t B\left(u(\tau),v'(\tau)\right)d\tau = B\left(u(t),v(t)\right) - B\left(u(s),v(s)\right) + \int_s^t B\left(u'(\tau),v(\tau)\right)d\tau.$$

3) *En déduire que pour tout $u,v \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$:*

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_\Omega u(t,x)\frac{d}{dt}v(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t &= \int_\Omega u(T,x)v(T,x)\mathrm{d}x - \int_\Omega u(0,x)v(0,x)\mathrm{d}x \\ &\quad -\int_0^T\int_\Omega \frac{d}{dt}u(t,x)v(t,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Exercice 20. *Soit $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, $1<p<\infty$. Montrer que $\Delta_p u \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$, où $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.*
Soit $(u_n)_n$ une suite de $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.

i) *Donner la définition de la convergence faible de u_n vers u dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.*

ii) *Si $u_n \rightharpoonup u$ dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, Montrer que*

$$\int_0^T\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v.\nabla u_n \mathrm{d}x\mathrm{d}t \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^T\int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v.\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}t,\ \forall v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$$

Est ce que on a

$$\langle -\Delta_p u_n, v\rangle_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\times L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))} \to \langle -\Delta_p u, v\rangle_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))\times L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))}$$

$\forall v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$

Exercice 21. *Soit* $p \geq \dfrac{2N}{N+2}$. *Supposons que*

$$\begin{cases} \mathbf{u}_k \rightharpoonup \mathbf{u} & \textit{dans} \quad L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \\ \mathbf{u}_k' \rightharpoonup \mathbf{v} & \textit{dans} \quad L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega)). \end{cases}$$

1. Montrer que

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_k', \varphi w\rangle \mathrm{dt} = -\int_0^T \langle \mathbf{u}_k, \varphi' w\rangle \mathrm{dt}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ *et* $w \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*(**Ind.** Utiliser l'égalité suivante :*

$$\int_0^T \langle u(t), w\rangle_{E'\times E}\mathrm{dt} = \left\langle \int_0^T u(t)\mathrm{dt}, w\right\rangle_{E'\times E} \quad \textit{pour tout } u \in L^1(0,T;E')$$

où E *est un espace de Banach séparable et réflexif).*
2. En déduire que $\mathbf{v} = \mathbf{u}'$.

3 Problème parabolique non-linéaire avec des données régulières

On va étudier On va étudier une équation parabolique non linéaire faisant intervenir l'opérateur p-laplacien (Voir §1.4). Soient Ω un ouvert borné et régulier dans $\mathbb{R}^N$, $T \in \mathbb{R}_+^*$ et $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. On considère le problème suivant : Trouver $u : (0,T) \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ qui satisfait

$$\text{(P)} \qquad \left\{ \begin{array}{rcll} \partial_t u - \Delta_p u & = & f(u) & \text{dans } \Omega_T \stackrel{\text{def}}{=} (0,T) \times \Omega \\ u & = & 0 & \text{sur } \partial\Omega_T \stackrel{\text{def}}{=} (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,.) & = & u_0 & \text{sur } \Omega. \end{array} \right.$$

Ce type de problèmes, pour $p = 2$, apparait dans plusieurs modèles physiques : dans l'étude des fluides non Newtoniens (en particulier les fluides pseudo-plastiques), dans le phénomène de couche limite pour des fluides visqueux, dans les modèles de Langmuir-Hinshelwood cinétiques de réaction chimique de type catalyse, dans les modèles cinétiques enzymatiques , ainsi que dans la théorie de conduction de la chaleur pour des matériaux conducteurs et dans les modes guidés d'un champ électromagnétique dans un milieu non-linéaire. Pour $p \neq 2$, tel problème apparait dans l'étude d'écoulements turbulents d'un gaz dans les milieux poreux.

Dans l'étude de ce problème, on suppose les hypothèses suivantes pour que les étapes techniques soient plus commodes et facile à comprendre :

(H1) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$.

(H2) $u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

On va voir dans le chapitre suivant comment peut-on affaiblir ces hypothèses.

On donne maintenant une définition de la solution faible.

Définition 3.1 (Définition de la solution faible)**.** *Une solution faible du problème* (P) *est une fonction* $u \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T]; L^2(\Omega))$ *avec* $\partial_t u \in L^{p'}(0,T; W^{-1,p'}(\Omega))$ *qui satisfait*

$$\int_0^T \int_\Omega \partial_t u \phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla \phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega f(u) \phi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \qquad (3.1)$$

pour tout $\phi \in L^p(0,T; W_0^{1,p}(\Omega))$.

Notre but dans cette section est d'étudier l'existence de la solution faible du problème (P) et on démontre le résultat suivant

Théorème 3.1. Sous les hypothèses **(H1)**, **(H2)**, le problème (P) admet une solution faible.

Pour la démonstration, on utilise la méthode suivante :

3.1 Méthode de Rothe

3.1.1 Préliminaire

La méthode utilisée pour la résolution du problème (P) s'appelle la méthode de Rothe qui consiste à discrétiser le problème en temps par un schéma alternative. On obtient des solution approchés, ensuite on démontre des estimations à priori et on passe à la limite.

Soit $N >> 1$ un entier assez grand. On considère la subdivision uniforme suivante : $0 = t^0 < t^1 < t^2 < \cdots < t^N = T$, $\Delta t = \frac{T}{N} > 0$, $t^n = n\Delta t$ pour tout $n \in \{0, 1, 2 \cdots, N\}$. On considère le schéma itérative suivant :

$$(\mathrm{P_n}) \qquad \begin{cases} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} - \Delta_p u^n &= f(u^{n-1}) \quad \text{dans } \Omega \\ u^n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \qquad \text{pour n} \geq 1 \tag{3.2}$$

avec $u^0 = u_0$.

On définit les fonctions suivantes pour $n \in \{1, \cdots, N\}$

$$\text{pour tout } t \in [t^{n-1}, t^n] : \begin{cases} u_{\Delta t}(t) &= u^n \\ \tilde{u}_{\Delta t}(t) &= \frac{t - t^{n-1}}{\Delta t}(u^n - u^{n-1}) + u^{n-1} \end{cases} \tag{3.3}$$

Alors, il est facile de vérifier que $\tilde{u}_{\Delta t}$ et $u_{\Delta t}$ satisfaisant

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\Delta t} - \Delta_p u_{\Delta t} &= f(u_{\Delta t}(\cdot - \Delta t)) \quad \text{dans } \Omega \times]\Delta t, T] \\ \tilde{u}_{\Delta t} = u_\Delta t &= 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ \tilde{u}_{\Delta t}(0) &= u_0 \text{ dans } \Omega. \end{cases} \tag{3.4}$$

On résume les étapes de la méthode comme suivant.

i) Démontrer l'existence de la solution du problème $(\mathrm{P_n})$, et par conséquent l'existence des fonction $u_\Delta t$ et $\tilde{u}_\Delta t$ qui vérifier le problème (3.4). Le problème $(\mathrm{P_n})$ est un problème elliptique non linéaire. Pour la résoudre on utilise la méthode de minimisation d'une fonctionnelle.

ii) Démontrer des estimations uniformes sur les solution approché $u_\Delta t$ et $\tilde{u}_\Delta t$ indépendamment de Δt.

iii) Passage à la limite lorsque $\Delta t \to 0$.

3.1.2 Existence de la solution du problème (Pn) : Méthode de minimisation d'une fonctionnelle

Le problème $(\mathrm{P_n})$ est un problème elliptique non linéaire avec des conditions aux limites homogènes. Pour montrer l'existence de la solution u^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, on raisonne par récurrence. On sait déjà que $u^0 \stackrel{\text{def}}{=} u_0 \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ (d'après l'hypothèse **H1**). On suppose alors que $u^{n-1} \in L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, et on montre que u^n existe et appartient à $L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Pour cela, il est convenable d'écrire le problème $(\mathrm{P_n})$ sous la forme suivante

$$(\mathrm{P}_\lambda) \qquad \begin{cases} u - \lambda\Delta_p u &= g(x) \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.5}$$

où $\lambda = \Delta t$, $g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \Delta t f(u^{n-1}) + u^{n-1}$ appartient $L^\infty(\Omega)$ par l'hypothèse de récurrence. Il est claire que

$$(\mathrm{P}_\lambda) \Longleftrightarrow (\mathrm{P}_\mathrm{n}).$$

Tout d'abord, on définit la solution faible du problème (P_λ).

Définition 3.2 (Définition de la solution faible)**.** *Une solution faible du problème* (P_λ) *est une fonction* $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ *qui satisfait*

$$\int_\Omega u\phi \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla \phi \mathrm{d}x = \int_\Omega g\phi \mathrm{d}x \tag{3.6}$$

pour tout $\phi \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Le théorème suivant est le résultat principal de cette section

Théorème 3.2. Le problème (P_λ) admet une solution faible unique u appartient à $W_0^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$.

Pour résoudre le problème (P_λ), on applique la méthode de minimisation d'une fonctionnelle. La fonctionnelle associée aux problème (P_λ) est le suivant

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega u^2 \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega g(x) u \mathrm{d}x. \tag{3.7}$$

L'opérateur F est bien défini sur l'espace $E \stackrel{\text{def}}{=} L^2(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. On va montrer que F est différentiable et sa différentielle est donnée par

$$\langle DF(u), v \rangle = \int_\Omega uv \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v \mathrm{d}x - \int_\Omega g(x) v \mathrm{d}x \quad \forall v \in E.$$

Par conséquent tout point critique est évidemment une solution faible de (P_λ), et le travail se simplifie à la recherche d'un point critique de F. Le résultat suivant d'analyse convexe nous donne un critère pour montrer que F admet un point critique :

Théorème 3.3. Soient X un espace de Banach réflexif, $J : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application satisfait

i) J est coercive i.e. $\lim_{\|u\|_X \to +\infty} J(u) = +\infty$.

ii) J est faiblement semi continue inférieurement i.e. Pour tout suite $u_n \rightharpoonup u$ dans E, il existe une sous-suite $\{u_{n_k}\}_k$ telle que

$$J(u) \leq \liminf_{k \to \infty} J(u_{n_k}).$$

Alors F atteint son minimum sur X.

On commence par démontrer le résultat suivant

Proposition 3.4. *L'espace* $E \overset{\text{def}}{=} L^2(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *muni de la norme somme* $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\Omega} + \|\cdot\|_{W_0^{1,p}(\Omega}$*, est réflexif.*

Démonstration. Comme les espaces $W_0^{1,p}(\Omega)$ et $L^2(\Omega)$ sont réflexifs, alors l'espace $X := L^2(\Omega) \times W_0^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme somme est aussi. On définit l'opérateur suivant

$$T : E \longrightarrow X \tag{3.8}$$
$$u \longmapsto T(u) = (u, u) \tag{3.9}$$

Il est claire que $\|T(u)\|_X = \|u\|_E$, d'où T est une isométrie. D'autre part, $T(E)$ est un fermé dans X. En effet. Soit $\{u_n\}_n$ une suite de E telle que $T(u_n) \xrightarrow{n} w := (u, v)$ dans X. Comme $T(u_n) = (u_n, u_n)$, alors

$$T(u_n) \xrightarrow{n} w \text{ dans } X \iff \begin{cases} u_n \xrightarrow{n} u \text{ dans } L^2(\Omega) \\ u_n \xrightarrow{n} v \text{ dans } W_0^{1,p}(\Omega) \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} u_n \xrightarrow{n} u \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ u_n \xrightarrow{n} v \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \nabla u_n \xrightarrow{n} \nabla v \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

D'où, par unicité de la limite, $w = (u, u) = T(u) \in T(E)$. D'où $T(E)$ est un sous espace fermé de X. Comme X est réflexif, alors $T(E)$ est aussi, et par conséquent E est aussi réflexif. (voir Exercice 11).

□

Proposition 3.5. *La fonctionnelle* F *est différentiable sur* E *est sa différentielle est donnée par*

$$\langle DF(u), v\rangle = \int_\Omega uv\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v\mathrm{d}x - \int_\Omega g(x)v\mathrm{d}x, \qquad \forall u, v \in E.$$

Démonstration. Rappelons la définition de F :

$$\begin{array}{llll} F : E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & F(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p\mathrm{d}x - \int_\Omega g(x)u\mathrm{d}x. \end{array}$$

avec $E = L^p(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. Soit $v \in E$. Commençons par le premier terme. On a

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u+v)^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega u^2\mathrm{d}x = \int_\Omega uv\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2\mathrm{d}x.$$

On montre que $\frac{1}{2}\int_\Omega v^2\mathrm{d}x = o(\|v\|_E)$. On a

$$\frac{\int_\Omega v^2\mathrm{d}x}{\|v\|_E} = \frac{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}} = \frac{\|v\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|v\|_{L^2(\Omega)}} \longrightarrow 0 \text{ lorque } \|v\|_E \longrightarrow 0.$$

Concernant le troisième terme $\int_\Omega g(x)u\mathrm{d}x$, il est linéaire, donc il suffit de montrer la continuité. On a $g \in L^\infty(\Omega)$, d'où

$$| \int_\Omega g(x)u\mathrm{d}x| \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \|g\|_{L^2(\Omega)}\|u\|_E = C\|u\|_E.$$

Pour le deuxième terme $\phi(u) := \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x$, on montre d'abord que ϕ est G-différentiable. C'est à dire

$$\lim_{t\to 0} \frac{\phi(u+tv)-\phi(u)}{t} = \langle \phi'(u), v\rangle_{E'\times E} \tag{3.10}$$

où $\phi'(u) \in E$ est la différentielle de Gâteaux. On sait que l'application $X \longmapsto |X|^p$ définie de $\mathbb{R}^N$ sur $\mathbb{R}_+$ est différentiable et donc G-différentiable pour tout $p > 1$, et on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{|X+tY|^p - |X|^p}{t} = p|X|^{p-2}X.Y, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}^N.$$

(avec $|X|^{p-2}X = 0$ pour $X = 0$). Par conséquent, on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} = p|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x).\nabla v(x), \tag{3.11}$$

p.p. $x \in \Omega$ et pour tout $u, v \in E$. On considère l'application suivante

$$\begin{array}{rcl} \psi : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \psi(t) = |X+tY|^p, \quad X, Y \in \mathbb{R}^n \end{array} \tag{3.12}$$

avec $p > 1$. Cette application est dérivable sur $\mathbb{R}$ et satisfait d'après le théorème des accroissements finis

$$\frac{\psi(t)-\psi(0)}{t-0} = \frac{|X+tY|^p - |X|^p}{t} = p|X+\theta Y|^{p-2}(X+\theta Y).Y,$$

pour $0 < |\theta| < |t|$. Supposons que $|t| \leq 1$ et appliquons cette inégalité

$$\left\{ \begin{array}{lcll} |a+b|^q & \leq & 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q) & \text{si } q \geq 1 \\ |a+b|^q & \leq & |a|^q + |b|^q & \text{si } 0 < q < 1 \end{array} \right. \forall a, b \in \mathbb{R}^N,$$

on obtient

$$\begin{array}{rcl} \left| \dfrac{|X+tY|^p - |X|^p}{t} \right| & \leq & p|X+\theta Y|^{p-1}|Y| \\ & \leq & C(|X|^{p-1}|Y| + |Y|^{p-1}). \end{array}$$

D'où, on a p.p. $x \in \Omega$:

$$\left| \frac{|\nabla u(x) + t\nabla v(x)|^p - |\nabla u(x)|^p}{t} \right| \leq C(|\nabla u(x)|^{p-1}|\nabla v(x)| + |\nabla v(x)|^{p-1}) = h(x) \tag{3.13}$$

Par l'inégalité de Hölder, on a $h \in L^1(\Omega)$. D'après (3.11) et (3.13), on peut appliquer le théorème de convergence dominée et on obtient (3.10). On en déduit que ϕ est G-différentiable sur E et

$$\langle \phi'(u), v\rangle_{E'\times E} = p\int_\Omega |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x).\nabla v(x)\mathrm{d}x.$$

(Il est facile de montrer que $\phi'(u)$ appartient à E'). Pour conclure la différentiabilité de ϕ, il suffit de montrer la continuité de $\phi' : E \to E'$. En effet. Soit $\mathcal{C} \subset E$ un ensemble borné, i.e.

$$\|u\|_E \leq M, \quad \forall u \in \mathcal{C}.$$

On a pour $u, v \in \mathcal{C}$

$$\begin{aligned}
\|\phi'(u) - \phi'(v)\|_{E'} &= \sup_{\|w\|_E=1}\langle \phi'(u) - \phi'(v), w\rangle_{E'\times E} \\
&= \sup_{\|w\|_E=1}\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right).\nabla w\mathrm{d}x \\
&\leq \begin{cases} c_p\sup_{\|w\|_E=1}\int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2}\right)(\nabla u - \nabla v|)|\nabla w|\mathrm{d}x & \text{si} \quad p \geq 2 \\ c_p\sup_{\|w\|_E=1}\int_\Omega |\nabla u - \nabla v|^{p-1}|\nabla w|\mathrm{d}x & \text{si} \quad 1 < p < 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

(Voir Exercice 13). D'où, par l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned}
\|\phi'(u) - \phi'(v)\|_{E'} &\leq \begin{cases} 2Mc_p\|\nabla u - \nabla v\|_{L^p(\Omega)} & \text{si} \quad p \geq 2 \\ Mc_p\|\nabla u - \nabla v\|_{L^p(\Omega)} & \text{si} \quad 1 < p < 2 \end{cases} \\
&\leq C\|u - v\|_E
\end{aligned}$$

D'où ϕ' est uniformément continue sur E. Par conséquent F est différentiable et $DF(u)$ donné par

$$\langle DF(u), v\rangle = \int_\Omega uv\mathrm{d}x + \lambda\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v\mathrm{d}x - \int_\Omega g(x)v\mathrm{d}x$$

Ce qui finit la preuve. □

Proposition 3.6. *La fonctionnelle F définie sur E est coercive et faiblement semi continue inférieurement.*

Démonstration. Pour la coercivité, on a lorsque $\|u\|_E \longrightarrow \infty$, alors $\|u\|_{L^2(\Omega)} \longrightarrow +\infty$ ou $\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \longrightarrow +\infty$. On a en utilisant le fait que $g \in L^\infty(\Omega)$

$$|\int_\Omega g(x)u\mathrm{d}x| \leq c\int_\Omega |u|\mathrm{d}x.$$

En utilisant l'inégalité de Young : $|ab| \leq \varepsilon|a|^p + c(\varepsilon)|b|^{p'}$ $\forall\varepsilon > 0$, avec l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$|\int_\Omega g(x)u\mathrm{d}x| \leq \varepsilon c\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} + c(\varepsilon).$$

Choisissons $\varepsilon c = \frac{\lambda}{2p}$, et remplaçons dans l'expression de F, on obtient

$$F(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{\lambda}{2p}\|u\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C' \longrightarrow +\infty$$

lorsque $\|u\|_E \longrightarrow +\infty$.

Montrons maintenant que F est faiblement semi-continue inférieurement. Soit $\{u_n\}_n$ une suite de E faiblement convergente vers u. D'où u_n converge faiblement vers u dans $L^2(\Omega)$ et $W_0^{1,p}(\Omega)$. Comme ces deux derniers espaces sont uniformément convexe alors

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^2(\Omega)} \text{ et } \|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|_{W_0^{1,p}(\Omega)}.$$

Et on a

$$\int_\Omega g(x)u\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g(x)u_n\mathrm{d}x.$$

Donc

$$F(u) \leq \liminf_{n\to\infty} F(u_n).$$

CQFD. □

Démonstration du théorème 3.2 Grâce aux propositions 3.4,3.6, on peut appliquer le théorème 3.3 sur l'opérateur F. D'où F admet un minimum globale $u \in E$ et grâce à la proposition 3.5, cette minimum est une solution faible du problème (P_λ). Pour l'unicité, on suppose qu'il y a deux solution $u, v \in E$ et on pose $w = u - v$. Alors $w \in E$ est une solution faible du problème

$$u - v - \lambda(\Delta_p u - \Delta_p v) = 0, \text{ dans } \Omega, \quad u - v = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

On multiplier l'équation par $u - v$ et on intègre par partie, on obtient

$$\int_\Omega (u-v)^2\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega \left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right).(\nabla u - \nabla v)\mathrm{d}x = 0$$

On a d'après l'inégalité (1.20),

$$\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right).(\nabla u - \nabla v) \geq 0.$$

D'où $\int_\Omega (u-v)^2\mathrm{d}x \leq 0$. Ce qui implique que $u - v = 0$ sur Ω et par conséquent, on a l'unicité de la solution. Il reste pour conclure, de démontrer que la solution $u \in L^\infty(\Omega)$. Comme $g \in L^\infty(\Omega)$, on pose $M = \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$. On a

$$(u - M) - (\Delta_p u - \Delta_p M) = g - M \leq 0.$$

D'autre part, on a $(u-M)^+ := \max\{u - M, 0\} \in W_0^{1,p}(\Omega)$. On multiplier l'équation par $(u-M)^+$ et on intègre par partie, on obtient

$$\int_\Omega (u-M)^{+2}\mathrm{d}x + \lambda \int_{\Omega^+} |\nabla u|^p\mathrm{d}x \leq 0$$

où $\Omega^+ := \{u > M\}$. Ce qui implique que $\int_\Omega (u-M)^{+2}\mathrm{d}x = 0$, d'où $(u-M)^+ = 0$ p.p. sur Ω. Par conséquent $u \leq M$ p.p. sur Ω. De la même manière, on montre que $u \geq -M$ p.p. sur Ω. Donc $u \in L^\infty(\Omega)$. Ce qui termine la preuve du théorème 3.2.

Corollaire 3.7. *Le problème* $(\mathrm{P_n})$ *admet pour tout entier* $n \geq 1$ *une solution faible unique* u_n *appartient à* $L^\infty(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

3.1.3 Estimations à priori

Pour passer à la limite, on propose de démontrer quelques estimations sur $\{u_{\Delta t}\}$ et $\{\tilde{u}_{\Delta t}\}$ uniformes en Δt. Les estimations sont données par les propositions suivantes :

Proposition 3.8. *$\{u_{\Delta t}\}_{\Delta t}$ et $\{\tilde{u}_{\Delta t}\}_{\Delta t}$ sont bornées dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ uniformément en Δt.*

Proposition 3.9. *$\{u_{\Delta t}\}_{\Delta t}$ est bornée dans $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, et $\{\partial_t\tilde{u}_{\Delta t}\}_{\Delta t}$ est bornée dans $L^2(\Omega_T)$ uniformément en Δt.*

Proposition 3.10. *$\{u_{\Delta t}\}_{\Delta t}$ et $\{\tilde{u}_{\Delta t}\}_{\Delta t}$ sont bornées dans $L^\infty(\Omega_T)$ uniformément en Δt.*

Proposition 3.11. *Il existe une constante $c > 0$, telle que*

$$\|u_{\Delta t} - \tilde{u}_{\Delta t}\|_{L^2(\Omega_T)} \leq c\Delta t. \tag{3.14}$$

On commence à démontrer ces résultats.

Preuve de la proposition 3.8 On multiplie l'EDP de ($\mathrm{P_n}$) par $\Delta t u^n$, on intègre par parties sur Ω et on fait la somme de $n = 1$ jusqu'à N, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N}\int_\Omega (u^n - u^{n-1})u^n \mathrm{d}x + \Delta t\sum_{n=1}^{N}\|\nabla u^n\|^p_{L^p(\Omega)} = \Delta t\sum_{n=1}^{m}\int_\Omega f(u^{n-1})u^n \mathrm{d}x. \tag{3.15}$$

Et on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\int_\Omega (u^n - u^{n-1})u^n \mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{N}\int_\Omega \frac{1}{2}\left[(u^n - u^{n-1})^2 + (u^n)^2 - (u^{n-1})^2\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\int_\Omega (u^n - u^{n-1})^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_\Omega (u^N)^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega (u^0)^2\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{1}{2}\int_\Omega (u^N)^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_\Omega (u^0)^2\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{3.16}$$

On utilise l'inégalité de Young (1.17)

$$\begin{aligned}
\Delta t\sum_{n=1}^{N}\int_\Omega f(u^{n-1})u^n\mathrm{d}x &\leq C(\varepsilon)\Delta t\sum_{n=1}^{N}\int_\Omega |f(u^{n-1})|^{p'}\mathrm{d}x + \varepsilon\Delta t\sum_{n=1}^{N}\int_\Omega |u^n|^p\mathrm{d}x \\
&\leq C'(\varepsilon) + \varepsilon\Delta t\sum_{n=1}^{N}\|u_{\Delta t}\|^p_{L^p(\Omega)}\mathrm{d}x \quad (\text{car } f \in L^\infty(\mathbb{R})) \\
&\leq C'(\varepsilon) + \varepsilon C\Delta t\sum_{n=1}^{n=N}\|u_{\Delta t}\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} \ (\text{par inégalité de Poincaré})
\end{aligned}$$

On substitue ces dernières estimations dans (3.15), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega (u^N)^2\mathrm{d}x + \Delta t\sum_{n=1}^{N}\|u^n\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega (u^0)^2\mathrm{d}x + C + \varepsilon\Delta t\sum_{n=1}^{N}\|u_{\Delta t}\|^p_{L^p(\Omega)} \\
&\leq C_1 + C\varepsilon\Delta t\sum_{n=1}^{N}\|u_{\Delta t}\|^p_{W_0^{1,p}(\Omega)}\mathrm{d}x \ (\text{car } u^0 = u_0 \in L^\infty(\Omega)).
\end{aligned}$$

On choisit $\varepsilon = 1/2C$ et en observant que $\Delta t \sum_{n=1}^{N} \|u_{\Delta t}\|^p_{L^p(\Omega)}\mathrm{d}x = \|u_{\Delta t}\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_\Omega (u^N)^2\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\|u_{\Delta t}\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \leq C_1.$$

Ce qui implique que La suite $\{u_{\Delta t}\}_{\Delta t}$ est bornée dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ uniformément en Δt. D'autre part, on a pour $t \in (t^{n-1}, t^n)$

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}_{\Delta t}(t)| &\leq |\frac{t-t^{n-1}}{\Delta t}||u^n - u^{n-1}| + |^{n-1}| \\
&\leq |u^n| + 2|u^{n-1}|
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega |\nabla \tilde{u}_{\Delta t}|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t &\leq \Delta t \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega \left(|\nabla u^n| + 2|\nabla u^{n-1}|\right)^p \mathrm{d}x \\
&\leq C\Delta t \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega \left(|\nabla u^n|^p + |u^{n-1}|^p\right) \mathrm{d}x \quad (C = 2^p) \\
&\leq 2C\Delta t \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega |\nabla u^n|^p \mathrm{d}x + \int_\Omega |\nabla u_0|^p \mathrm{d}x \\
&= 2C\|u_{\Delta t}\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} + C'
\end{aligned}$$

Comme $\|u_{\Delta t}\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}$ est borné, alors $\|\tilde{u}_{\Delta t}\|^p_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}$ est bornée uniformément en Δt. Ce qui finit la preuve.

Preuve de la proposition 3.9 Soit $t \in (0,T)$ et soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $t^{m-1} \leq t < t^m$. On multiplie l'EDP de $(\mathrm{P_n})$ par $(u^n - u^{n-1})$, on intègre par parties sur Ω et on fait la somme de $n = 1$ jusqu'à m, on obtient

$$\begin{aligned}
\Delta t \sum_{n=1}^{m} \int_\Omega \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}\right)^2 \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{m} \int_\Omega |\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n. \left(\nabla u^n - \nabla u^{n-1}\right) \mathrm{d}x \\
= \sum_{n=1}^{m} \int_\Omega f(u^{n-1}) \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}\right) \mathrm{d}x. \qquad (3.17)
\end{aligned}$$

On a

$$\Delta t \sum_{n=1}^{m} \int_\Omega \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}\right)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{t^m} \int_\Omega |\partial_t \tilde{u}_{\Delta t}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

et on a d'après l'inégalité de convexité 1.20

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{m} \int_\Omega |\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n. \left(\nabla u^n - \nabla u^{n-1}\right) \mathrm{d}x &\geq \sum_{n=1}^{m} \int_\Omega \frac{1}{p} \left(|\nabla u^n|^p - |\nabla u^{n-1}|^p\right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla u^m|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u_0|^p \mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{p}\left(\int_\Omega |\nabla u_{\Delta t}(t)|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega |\nabla u_0|^p \mathrm{d}x\right)
\end{aligned}$$

Finalement on a d'après l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le fait que $f \in L^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m} \int_\Omega f(u^{n-1}) \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}\right) \mathrm{d}x \quad &\leq \quad \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} \int_\Omega f(u^{n-1})^2 \mathrm{d}x \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m} \int_\Omega \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &\leq \quad C + \frac{1}{2}\int_0^{t^m} \int_\Omega |\partial_t \tilde{u}_{\Delta t}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En remplaçant ces trois dernières estimations dans l'équation (3.17), on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^{t^m} \int_\Omega |\partial_t \tilde{u}_{\Delta t}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u_{\Delta t}(t)|^p \mathrm{d}x \leq C + \int_\Omega |\nabla u_0|^p \mathrm{d}x = C'$$

En prenant le sup sur $(0, T)$, on obtient

$$\frac{1}{2}\int_0^{T} \int_\Omega |\partial_t \tilde{u}_{\Delta t}|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \frac{1}{p}\operatorname*{ess\,sup}_{t\in(0,T)} \int_\Omega |\nabla u_{\Delta t}(t)|^p \mathrm{d}x \leq C + \int_\Omega |\nabla u_0|^p \mathrm{d}x = C'$$

D'où, les suites des solutions $\{\partial_t \tilde{u}_{\Delta t}\}$, $\{u_{\Delta t}\}$ sont bornés respectivement dans $L^2(\Omega)$ et $L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, uniformément en Δt.

Preuve de la proposition 3.10 On définit la fonction suivante

$$v(t) = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} t + \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ pour } t \in [0, T].$$

On a v satisfait

$$\left\{\begin{array}{rcll} \partial_t v - \Delta_p v & = & \|f\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{dans } \Omega_T \stackrel{\text{def}}{=} (0,T) \times \Omega \\ v(0) & = & \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{sur } \Omega. \end{array}\right.$$

On pose $v^n = v(t^n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, on a $v(0) = v^0$ et pour $n \geq 1$:

$$\frac{v^n - v^{n-1}}{\Delta t} - \Delta_p v^n = \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ dans } \Omega_T \stackrel{\text{def}}{=} (0,T) \times$$

On a $u^0 := u_0 \leq v^0 := \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Par récurrence, on suppose que $u^{n-1 \leq v^{n-1}}$ et on montre que $u^n \leq v^n$. En effet, on retranche l'équation (3.1.3) de ($\mathrm{P_n}$), on obtient

$$(u^n - v^n) - \Delta t(\Delta_p u^n - \Delta_p v^n) = \Delta t(f(^{n-1}) - \|f\|_{L^\infty(\Omega)}) + u^{n-1} - v^{n-1} \leq 0$$

On multiplie cette equation par $(u^n - v^n)^+ \in W_0^{1,p}(\Omega)$ et on intègre par parties, on obtient

$$\int_\Omega (u^n - v^n)^{+2} \mathrm{d}x + \Delta t \int_{\Omega^+} \left(|\nabla u^n|^{p-2}\nabla u^n - |\nabla v^n|^{p-2}\nabla v^n\right)(\nabla h^n - \nabla v^n) \leq 0$$

où $\Omega^+ = \{u^n \geq v^n\}$. Le deuxième terme à gauche est positive grâce à l'inégalité (1.20). D'où $\int_\Omega (u^n - v^n)^{+2}\mathrm{d}x = 0$, ce qui donne $(u^n - v^n)^+ \equiv 0$ sur Ω. D'où $u^n \leq v^n$ sur Ω. Par conséquent, $u_{\Delta t} \leq v$ sur Ω_T.De la même manière, on montre que $u_{\Delta t} \geq -v$ sur Ω_T. Comme $v \in L^\infty(\Omega_T)$, alors $u_{\Delta t}, \tilde{u}_{\Delta t}$ appartiennent à $L^\infty(\Omega_T)$ et sont bornés par une constante

indépendante de Δt. Ce qui termine la preuve.
Preuve de la proposition 3.11 On a pour tout $t \in (t^{n-1}, t^n)$

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_{\Delta t}(t) - u_{\Delta t}(t)| &= \left| \frac{t - t^{n-1}}{\Delta t} (u^n - u^{n-1} + (u^n - u^{n-1}) \right| \\ &\leq \left| \frac{t - t^{n-1}}{\Delta t} \right| \left| u^n - u^{n-1} \right| + \left| u^n - u^{n-1} \right| \\ &\leq 2 \left| u^n - u^{n-1} \right| = 2\Delta t \left| \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} \right| = 2\Delta t |\partial_t \tilde{u}_{\Delta t}(t)| \end{aligned}$$

On a donc

$$\|\tilde{u}_{\Delta t} - u_{\Delta t}\|_{L^2(\Omega_T)} \leq 2\Delta t \|\partial_t \tilde{u}_{\Delta t}\|_{L^2(\Omega_T)}$$

D'après la proposition 3.9, $\|\partial_t \tilde{u}_{\Delta t}\|_{L^2(\Omega_T)}$ est borné indépendamment de Δt, d'où

$$\|\tilde{u}_{\Delta t}(t) - u_{\Delta t}(t)\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C\Delta t$$

3.1.4 Passage à la limite : Existence de la solution faible

Les estimations obtenues dans la section précédente nous permet de passer à la limite et démontrer que la limite u de la suite $u_{\Delta t}$ est la solution faible du problème (P). Tout d'abord, on rappelle l'équation satisfaite par $\tilde{u}_{\Delta t}$ et $u_{\Delta t}$.

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \tilde{u}_{\Delta t} - \Delta_p u_{\Delta t} &=& f(u_{\Delta t}(\cdot - \Delta t)) & \text{dans } \Omega \times]\Delta t, T] \\ \tilde{u}_{\Delta t} = u_\Delta t &=& 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ \tilde{u}_{\Delta t}(0) &=& u_0 & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \tag{3.18}$$

Alors on les convergences suivantes :

Proposition 3.12. *Il existe $u \in L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$ telle que : Après extraction éventuelle d'une sous suite, on a*

$$\tilde{u}_{\Delta t}, u_{\Delta t} \overset{*}{\rightharpoonup} u \textit{ dans } L^\infty(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$$

$$\partial_t \tilde{u}_{\Delta t} \rightharpoonup \partial_t u \textit{ dans } L^2(\Omega_T)$$

quand $\Delta t \to 0$.

☞ **Remarque 3.1.** *Notons que cette convergence faible-étoile implique la convergence faible dans $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$.*

Proposition 3.13. *Après extraction éventuelle d'une sous suite, on a*

$$\tilde{u}_{\Delta t}, u_{\Delta t} \longrightarrow u \textit{ dans } \mathcal{C}([0, T];^r(\Omega)) \textit{ quand } \Delta t \to 0. \ \forall r \geq 1. \tag{3.19}$$

Proposition 3.14. *Après extraction éventuelle d'une sous suite, on a*

$$\tilde{u}_{\Delta t}, u_{\Delta t} \longrightarrow u \textit{ dans } L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega)) \textit{ quand } \Delta t \to 0. \tag{3.20}$$

On commence à démontrer ces propositions.
Preuve de la proposition 3.12 D'après la proposition 3.9, les deux suites $\{\tilde{u}_{\Delta t}\}$ et $\{u_{\Delta t}\}$ sont bornées dans $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Alors, après extraction éventuelle d'une sous suite, on a

$$u_{\Delta t} \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ dans } L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ lorsque } \Delta t \to 0.$$

$$\tilde{u}_{\Delta t} \overset{*}{\rightharpoonup} \tilde{u} \text{ dans } L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ lorsque } \Delta t \to 0.$$

Pour terminer la preuve, montrons que $u = \tilde{u}$ p.p. sur Ω_T. Comme $L^\infty(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \hookrightarrow L^p(0,T;L^p(\Omega)) \equiv L^p(\Omega_T)$, alors

$$\tilde{u}_{\Delta t} \rightharpoonup \tilde{u}, \quad u_{\Delta t} \rightharpoonup u, \text{ dans } L^p(\Omega_T)$$

quand $\Delta t \to 0$. Par conséquent

$$\tilde{u}_{\Delta t} \longrightarrow \tilde{u}, \quad u_{\Delta t} \longrightarrow u, \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_T).$$

D'autre part , d'après la proposition 3.11

$$\|\tilde{u}_{\Delta t} - u_{\Delta t}\|_{L^2(\Omega_T)} \leq C\Delta t \to 0 \text{ quand } \Delta t \to 0.$$

Ce qui implique que $\tilde{u}_{\Delta t} - u_{\Delta t} \to 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_T)$. Par unicité de la limite, on déduit que $u = \tilde{u}$ p.p. sur Ω_T. D'autre part, comme $\{\partial_t \tilde{u}_{\Delta t}\}$ est bornée dans $L^2(\Omega_T)$, alors il existe une sous-suite notée encre $\{\partial_t \tilde{u}_{\Delta t}\}$ et $w \in L^2(\Omega_T)$ telle que

$$\partial_t \tilde{u}_{\Delta t} \overset{*}{\rightharpoonup} w \text{ dans } L^2(\Omega_T).$$

Comme $\tilde{u}_{\Delta t} \longrightarrow u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_T)$, alors $\partial_t \tilde{u}_{\Delta t} \longrightarrow \partial_t u$ dans $\mathcal{D}'(\Omega_T)$. D'où $w = \partial_t u$ p.p. sur Ω_T. CQFD. ■

Preuve de la proposition 3.13 On applique le théorème d'Aubin-Simon 2.7. D'après les proposition 3.8 et 3.9, les suites $\{\tilde{u}_{\Delta t}\}$ et $\{\partial_t \tilde{u}_{\Delta t}\}$ sont bornées dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ et $L^2(\Omega_T) \equiv L^2(0,T;L^2(\Omega))$ respectivement. D'où, d'après l'injection $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$ $\{\tilde{u}_{\Delta t}\}$ est bornée dans $W_0^{1,q}(0,T;L^q(\Omega))$ avec $q = \min\{2,p\} < p*$. D'où, on peut appliquer le théorème d'Aubin-Simon 2.7 avec $V = W_0^{1,p}(\Omega)$ et $E = F = L^q(\Omega)$ et on en déduit que

$$\tilde{u}_{\Delta t}, u_{\Delta t} \longrightarrow u \text{ dans } \mathcal{C}([0,T];{}^q(\Omega)) \text{ quand } \Delta t \to 0.$$

Pour terminer la preuve, on montre que cette convergence est vraie pour tout $q > 1$. En effet, on a $\{\tilde{u}_{\Delta t}\}$ est bornée dans $L^\infty(\Omega_T)$ d'après la proposition 3.10. D'où on applique l'inégalité d'interpolation 1.18, on obtient

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{u}_{\Delta t}(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)} \leq \sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{u}_{\Delta t}(t) - u(t)\|_{L^q(\Omega)} \times \|\tilde{u}_{\Delta t} - u)\|_{L^\infty(\Omega_T)}$$

pour tout $r \geq q$. Comme le deuxième terme tend vers 0 et le troisième terme est borné, on en déduit que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{u}_{\Delta t}(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0 \text{ quand } \Delta t \to 0.$$

Concernant la suite $\{u_{\Delta t}\}$, on a pour tout $r \geq 2$

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} \|u_{\Delta t}(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)} &\leq \sup_{t\in[0,T]} \left(\|u_{\Delta t}(t) - \tilde{u}_{\Delta t}(t)\|_{L^r(\Omega)} + \|\tilde{u}_{\Delta t}(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)}\right) \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} \|u_{\Delta t}(t) - \tilde{u}_{\Delta t}(t)\|_{L^2(\Omega)} \times \|u_{\Delta t}(t) - \tilde{u}_{\Delta t}(t)\|_{L^\infty(\Omega_T)} \\
&+ \sup_{t\in[0,T]} \|\tilde{u}_{\Delta t}(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)}
\end{aligned}$$

Passons à la limite quand $\Delta t \longrightarrow 0$, on obtient

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_{\Delta t}(t) - u(t)\|_{L^r(\Omega)} \longrightarrow 0.$$

Ce qui termine la preuve. ■

Preuve de la proposition 3.14

On multiplie l'équation (3.4) par $u_{\Delta t} - u$ et on intègre sur Ω_T. Alors, on obtient en appliquant l'inégalité de convexité 1.20

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_T} \partial_t \tilde{u}_{\Delta t}(u_{\Delta t} - u)\mathrm{d}x\mathrm{d}t &+ \frac{1}{p}\left(\int_{\Omega_T} |\nabla u_{\Delta t}|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{\Omega_T} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right) \\
&\leq \int_{\Omega_T} (u_{\Delta t} - u) f(u_{\Delta t}(\cdot - \Delta t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

Le premier terme tend vers 0 quand $\Delta t \to 0$, car $\tilde{u}_{\Delta t} \hookrightarrow \partial_t \tilde{u}$ dans $L^2(\Omega_T)$ (proposition 3.12) et $u_{\Delta t} \longrightarrow u$ dans $L^2(\Omega_T)$ (Proposition 3.14). Le troisième terme tends aussi vers 0. En effet

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\Omega_T} (u_{\Delta t} - u) f(u_{\Delta t}(\cdot - \Delta t))\mathrm{d}x\mathrm{d}t\right| &\leq \|u_{\Delta t} - u\|_{L^2(\Omega_T)} \|f(u_{\Delta t})\|_{L^2(\Omega_T)} \\
&\leq C\|u_{\Delta t} - u\|_{L^2(\Omega_T)} \longrightarrow 0.
\end{aligned}$$

D'où en passant à la lim sup dans (3.21), on obtient

$$\limsup_{\Delta t\to 0} \int_{\Omega_T} |\nabla u_{\Delta t}|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_{\Omega_T} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq 0.$$

D'autre part, d'après la convexité uniforme de l'espace $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ et la proposition 3.12, on a

$$\int_{\Omega_T} |\nabla u|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq \liminf_{\Delta t\to 0} \int_{\Omega_T} |\nabla u_{\Delta t}|^p \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Par conséquent

$$\lim_{\Delta t\to 0} \int_{\Omega_T} |\nabla u_{\Delta t}|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{\Omega_T} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

On en déduit que

$$u_{\Delta t} \longrightarrow u \quad in \quad L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \text{ as } \Delta t \to 0,$$

et on a

$$\nabla u_{\Delta t} \longrightarrow \nabla u \text{ in } (L^p(\Omega_T))^N \text{ quand } \Delta t \to 0.$$

■

Preuve du théorème 3.1 Il reste maintenant de passer à la limite dans l'équation satisfaite par $\{u_{\Delta t}\}$ et $\{\tilde{u}_{\Delta t}\}$, pour déduire l'existence de la solution faible du problème (P). Rappelons l'équation approchée (3.4) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \tilde{u}_{\Delta t} - \Delta_p u_{\Delta t} & = & f(u_{\Delta t}(\cdot - \Delta t)) \quad \text{dans } \Omega \times]\Delta t, T] \\ \tilde{u}_{\Delta t} = u_\Delta t & = & 0 \text{ sur } \partial\Omega \times (0,T) \\ \tilde{u}_{\Delta t}(0) & = & u_0 \text{ dans } \Omega. \end{array} \right.$$

La formulation faible associée est :

$$\int_0^T \int_\Omega \tilde{u}_{\Delta t} \partial_t v \mathrm{d}t\mathrm{d}x + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_{\Delta t}|^{p-2} \nabla u_{\Delta t} . \nabla v \mathrm{d}t\mathrm{d}x = \int_0^T \int_\Omega f(u_{\Delta t}(. - \Delta t)) v \mathrm{d}t\mathrm{d}x \quad (3.22)$$

pour tout $v \in \mathcal{D}(\Omega_T)$. D'après la proposition 3.12, on a

$$\int_0^T \int_\Omega \tilde{u}_{\Delta t} \partial_t v \mathrm{d}t\mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^T \int \Omega u \partial_t v \mathrm{d}t\mathrm{d}x. \quad (3.23)$$

Concernant le deuxième terme, d'après les inégalités de l'exercice 13, on a

- pour $1 < p \leq 2$

$$\int_0^T \int_\Omega \left| |\nabla u_{\Delta t}|^{p-2} \nabla u_{\Delta t} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right|^{p'} \leq C \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_{\Delta t} - \nabla u|^p \mathrm{d}t\mathrm{d}x$$

- Pour $p > 2$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \left| |\nabla u_{\Delta t}|^{p-2} \nabla u_{\Delta t} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u \right|^{p'} &\leq C \int_0^T \int_\Omega \left(|\nabla u_{\Delta t}|^{(p-2)p'}| + |\nabla u|^{(p-2)p'} \right) \\ &\quad \times |\nabla u_{\Delta t} - \nabla u|^{p'} \mathrm{d}t\mathrm{d}x \\ &\leq C \left(\int_0^T \int_\Omega (|\nabla u_{\Delta t}|^p| + |\nabla u|^p) \mathrm{d}t\mathrm{d}x \right)^{(p-2)/(p-1)} \\ &\quad \times \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_{\Delta t} - \nabla u|^p \mathrm{d}t\mathrm{d}x \right)^{1/(p-1)} \end{aligned}$$

En tenant en compte la proposition 3.14, on en déduit que

$$|\nabla u_{\Delta t}|^{p-2} \nabla u_{\Delta t} \longrightarrow |\nabla u|^{p-2} \nabla u \text{ dans } L^{p'}(\Omega_T).$$

D'où, on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_{\Delta t}|^{p-2} \nabla u_{\Delta t} . \nabla v \mathrm{d}t\mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v \mathrm{d}t\mathrm{d}x \quad (3.24)$$

D'autre part, d'après le théorème de Lebesgue inverse et d'après la proposition 3.13, on a

$$u_{\Delta t}(. - \Delta t) \longrightarrow u \text{ p.p. sur } \Omega_T.$$

Comme f est continue, alors

$$f(u_{\Delta t}(. - \Delta t)) \longrightarrow f(u) \text{ p.p. sur } \Omega_T.$$

Comme f est bornée, on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue et on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega f(u_{\Delta t}(. - \Delta t)) v \mathrm{d}t \mathrm{d}x \longrightarrow \int_0^T \int_\Omega f(u) v \mathrm{d}t \mathrm{d}x \tag{3.25}$$

En substituant (3.23),(3.24) et (3.25) dans (3.22), on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega u \partial_t v \mathrm{d}t \mathrm{d}x + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla v \mathrm{d}t \mathrm{d}x = \int_0^T \int_\Omega f(u) v \mathrm{d}t \mathrm{d}x$$

D'où u est une solution faible du problème (P). Ce qui termine la peuve du théorème principal de ce chapitre. ■

3.2 Exercices

Exercice 22.

1) Comparer entre $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ et $L^2((0,T)\times\Omega)$.

2) Montrer que $\frac{du}{dt} \equiv \frac{\partial u}{\partial t}$.

Exercice 23 (Inégalité de convexité)**.** *Montrer les deux inégalités suivantes :*

$$|a|^{p-2}a.(a-b) \geq \frac{1}{p}(|a|^p - |b|^p)$$

$$\left(|a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b\right).(a-b) > 0$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}^N, a \neq b, p > 1$. En déduir que l'opérateur $-\Delta_p u$ est monotone i.e.

$$\langle -(\Delta_p u - \Delta_p v), u - v \rangle_{W^{-1,p'} \times W_0^{1,p}} \geq 0. \ \forall u, v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Exercice 24 (Principe du maximum)**.** *Soit u (**resp.** v) $\in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$ solution faible du problème suivant*

$$(\mathrm{P}) \left\{ \begin{array}{rcll} u_t - \Delta_p u & = & f \in L^\infty(\Omega) & \textit{dans} \quad \Omega_T = (0,T)\times\Omega \\ u & = & 0 & \textit{sur} \quad \partial\Omega \times]0,T[\\ u & = & u_0 \ (\textbf{\textit{resp.}}\ v_0) & \textit{sur} \quad \Omega \times \{t=0\} \end{array} \right.$$

1. Montrer que si $u_0, v_0 \in L^2(\Omega)$ et $u_0 \leq v_0$ p.p. sur Ω, alors $u \leq v$ p.p. sur Ω_T.
2. Montrer le même résultat si $f := f(u)$ est Lipschitzienne.
3. En déduire l'unicité de la solution faible du problème ci-dessus.
4. Si $u_0 \in L^\infty(\Omega)$, montrer que $u \in L^\infty((0,T)\times\Omega)$.

Exercice 25. *Considérons les problèmes alternatifs suivants :*

$$(\mathrm{P_n}) \qquad \begin{cases} u^0 \in L^\infty(\Omega), \ f \in L^\infty(\mathbb{R}) \\ \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} - \Delta_p u^n = f(u^{n-1}) \quad dans\ \Omega, \\ u^n = 0 \quad sur\ \partial\Omega, \ pour\ n \geq 1 \end{cases}$$

On définit les fonctions suivantes $u_{\Delta t}$, $\tilde{u}_{\Delta t}$ *par*

$$u_{\Delta t}(t) = u^n, \quad \tilde{u}_{\Delta t}(t) = \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t}(u^n - u^{n-1}) + u^{n-1}, \ et\ \tilde{u}_{\Delta t}(0) := u^0$$

pour $n = 1, ..., N$ *et* $t \in]t_{n-1}, t_n]$.
1) Montrer que

$$\frac{\Delta t(t_n + t_{n-1})}{2} \int_\Omega (\frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t})^2 \mathrm{d}x = \int_{t_{n-1}}^{t_n} t \int_\Omega (\partial_t \tilde{u}_{\Delta t})^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

2) Montrer à l'aide de l'inégalité ($a^2 - ab \geq \frac{a^2 - b^2}{2}$) *que*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(t_n + t_{n-1}) \int_\Omega \nabla u^n . \nabla(u^n - u^{n-1}) \mathrm{d}x \ &\geq \ \frac{1}{2} \int_\Omega (t_n |\nabla u^n|^2 - t_{n-1} |\nabla u^{n-1}|^2 \mathrm{d}x \\ &- \ \frac{\Delta t}{4} \int_\Omega (|\nabla u^n|^2 + |\nabla u^{n-1}|^2) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

3) Montrer à l'aide de l'inégalité de Young, que

$$\frac{1}{2}(t_n + t_{n-1}) \int_\Omega f(u^{n-1})(u^n - u^{n-1}) \mathrm{d}x \ \leq \ \frac{1}{2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} t \int_\Omega (\partial_t \tilde{u}_{\Delta t})^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t + C.$$

4) En multipliant l'équation de $(\mathrm{P_n})$ *par* $\frac{t_n + t_{n-1}}{2}(u_n - u_{n-1})$ *et sachant que* $u_{\Delta t}$ *est borné dans* $L^p(0, T; W_0^{1,p}(\Omega))$, *montrer que*

$$t^{\frac{1}{2}} \partial_t \tilde{u}_{\Delta t} \ est\ born\acute{e}e\ dans\ L^2(\Omega_T)$$

Exercice 26. *Soient* $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ *et* $u \in L^2(\Omega)$. *Montrer que* $f(u) \in L^\infty(\Omega)$.
Si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ *telle que* $|f(t)| \leq b|t|$ *alors montrer que* $f \in L^2(\Omega)$.

Exercice 27 (Lemme de Gronwall). *Soient* $T > 0$, $C \geq 0$, f *et* g *deux fonctions telles que*

$$f \in L^\infty(0, T), g \in L^1(0, T), \quad f\ g \geq 0 \ p.p.\ sur\ [0, T],$$

et

$$f(t) \leq \int_0^t f(s)g(s)\mathrm{d}s + C, \qquad p.p.\ sur\ [0, T].$$

Montrer que

$$f(t) \leq C e^{\int_0^t g(s)\mathrm{d}s} \ p.p.\ sur\ [0, T].$$

Exercice 28 (Lemme de Gronwall discret). *Soient* $(a_n)_{n\geq 0}$ *et* $(b_n)_{n\geq 0}$ *deux suites réelles telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *on ait*

$$a_n \geq 0 \quad \textit{et } b_n > 0$$

et qu'il existe une constant $M > 0$ *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *:*

$$a_{n+1} \leq M + \sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ *l'inégalité suivant :*

$$a_{n+1} \leq M e^{\sum_{k=0}^{n} b_k}.$$

(prendre $\rho(t)$ *la fonction en escalier définie par* $\rho(t) = a_n$ *sur tout intervalle* $[S_{n-1}, S_n[$*, où* $S_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ *et* $S_{-1} = 0$*, (*$n \in \mathbb{N}$*)*

4 Problème parabolique non-linéaire avec des données non-régulières

Dans ce chapitre on va étudier le même problème précédent avec des hypothèses plus faibles sur la non-linéarité f et la donnée initiale u_0. On utilise la méthode d'approximation en régularisant notre problème et puis on passe à limite sur les problèmes approchés. D'abord, on rappelle le problème parabolique à étudier

$$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} \partial_t u - \Delta_p u &= f(u) \quad \text{dans } \Omega_T \overset{\text{def}}{=} (0,T)\times\Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_T \overset{\text{def}}{=} (0,T)\times\partial\Omega \\ u(0) &= u_0 \quad \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

où Ω un ouvert borné et régulier dans $\mathbb{R}^N$, $T \in \mathbb{R}_+^*$. Avec les hypothèses suivantes

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ est une fonction continue.} \tag{4.1}$$

$$\exists C > 0 : f(u) \leq C(u^{q-1}+1),\ q < \min\{p^*, \frac{p^*+2}{2}\}, \tag{4.2}$$

où $p^* = \dfrac{pN}{N-p}$ si $p < N$, $p^* = +\infty$ sinon.

$$u_0 \in L^2(\Omega). \tag{4.3}$$

Alors, on le résultat suivant

Théorème 4.1. Sous les hypothèses (4.1), (4.2) et (4.3) le problème (P) admet une solution faible.

4.1 Approximation du problème

D'après l'hypothèse (4.1), il existe une suite des fonctions continue $\{f_n\}_n$ de $L^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f \text{ uniformément sur tout compact de } \mathbb{R} \tag{4.4}$$

(Notons que les fonctions f_n satisfait aussi l'hypothèse (4.2)). D'après la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, il existe une suite $\{u_n\}_n$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ telle que

$$u_0^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{4.5}$$

Alors, on considère le problème approché suivant

$$(\mathrm{P_n}) \qquad \begin{cases} \partial_t u_n - \Delta_p u_n &= f_n(u_n) \quad \text{dans } \Omega_T \overset{\text{def}}{=} (0,T)\times\Omega \\ u_n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega_T \overset{\text{def}}{=} (0,T)\times\partial\Omega \\ u_n(0) &= u_0^n \quad \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Concernant l'existence de la solution faible u_n, c'est une conséquence du chapitre précédente. Rappelons que

$$u_n \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)) \cap \mathcal{C}([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^\infty(\Omega_T)$$

$$\partial_t u_n \in L^2(\Omega_T)$$

4.2 Estimations à priori

Proposition 4.2. *La suite* $\{u_n\}_n$ *est bornée dans* $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$.

Démonstration. On multiplie l'équation de $(\mathrm{P_n})$, par $u_n \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, et on intègre par parties, on obtient

$$\int_\Omega u_n^2 \mathrm{d}x - \int_\Omega (u_0^n)^2 \mathrm{d}x + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega f(u_n) u_n \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{4.6}$$

D'après l'hypothèse (4.2), on a

$$\int_0^T \int_\Omega f(u_n) u_n \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C \int_0^T \int_\Omega (|u_n|^q + |u_n|) \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

En utilisant l'inégalité de Young (1.17) (avec les exposants $P = p^*/q, P' = (q/(p^* - q))$, on a pour tout $\varepsilon > 0$

$$|u_n|^q = |u_n \times 1|^q \leq \frac{\varepsilon}{2}|u_n|^{p*} + C_1(\varepsilon), \quad |u_n| \leq \frac{\varepsilon}{2}|u_n|^{p^*} + C_2(\varepsilon).$$

D'où

$$\int_0^T \int_\Omega f(u_n) u_n \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq \varepsilon C \int_0^T \int_\Omega |u_n|^{p^*} \mathrm{d}x\mathrm{d}t + C(\varepsilon).$$

D'après l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\int_0^T \int_\Omega f(u_n) u_n \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq \varepsilon C' \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t + C(\varepsilon) = \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t + C.$$

(pour $\varepsilon = \frac{1}{2C'}$). Remplaçons cette estimation dans l'équation (4.6), on obtient

$$\int_\Omega u_n^2 \mathrm{d}x + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \leq C + \int_0^T (u_0^n)^2 \mathrm{d}x = C \tag{4.7}$$

D'où la suite $\{u_n\}_n$est borné dans $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. □

Proposition 4.3. *Pour tout* $0 < \epsilon < T$. $\{u_n\}_n$ *est bornée dans* $L^\infty(\epsilon,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, *et* $\{\partial_t u_n\}_n$ *est bornée dans* $L^2((\epsilon,T) \times \Omega)$.

Démonstration. On multiplie l'équation de $(\mathrm{P_n})$, par $s\ \partial_s u_n \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, et on intègre sur $(\epsilon,t) \times \Omega$, on obtient

$$\int_\epsilon^t \int_\Omega (s\ \partial_s u_n)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s + \frac{1}{p} \int_\epsilon^t \int_\Omega \partial_s |\nabla u_n|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}s = \int_\epsilon^t \int_\Omega f_n(u_n) \partial_s u_n \mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{4.8}$$

On a

$$\int_\epsilon^t \int_\Omega s((\partial_s u_n)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \geq \epsilon \int_\epsilon^t \int_\Omega (\partial_s u_n)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}s \tag{4.9}$$

et on a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_\epsilon^t\int_\Omega \partial_s|\nabla u_n|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}s &= \frac{1}{p}\int_\epsilon^t \partial_s\int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}s \\
&= t\int_\Omega \partial|\nabla u_n(t)|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_\epsilon^t\int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\geq \epsilon\int_\Omega |\nabla u_n(t)|^p \mathrm{d}x - \frac{1}{p}\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{d'après 4.2}}{\geq} \epsilon\int_\Omega |\nabla u_n(t)|^p \mathrm{d}x - C \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}
\left|\int_\epsilon^t\int_\Omega f_n(u_n)\partial_s u_n \mathrm{d}x\mathrm{d}s\right| &\leq C\int_\epsilon^t\int_\Omega |s\partial_s u|\ |u^{q-1}+1|\mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\overset{\text{Young}}{\leq} \varepsilon\int_\epsilon^t\int_\Omega s(\partial_s u_n)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s + C(\varepsilon)\int_\epsilon^t\int_\Omega (|u|^{2q-2}+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Comme ci-dessus, on a

$$\int_\epsilon^t\int_\Omega (|u|^{2q-2}+1) \leq C\int_\epsilon^t\int_\Omega |u|^{p^*}\mathrm{d}x\mathrm{d}s + C' \leq C\left(\int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}s\right)^{p^*/p} + C' \leq C_2.$$

D'où pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\left|\int_\epsilon^t\int_\Omega f_n(u_n)\partial_s u_n \mathrm{d}x\mathrm{d}s\right| \leq \frac{1}{2}\int_\epsilon^t\int_\Omega s((\partial_s u_n)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s + C(\varepsilon). \qquad (4.11)$$

Remplaçons les estimations (4.9), (4.10) et (4.11) dans (4.8), on obtient

$$\frac{\epsilon}{2}\int_\epsilon^t\int_\Omega (\partial_s u_n)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s + \epsilon\int_\Omega |\nabla u_n(t)|^p\mathrm{d}x \leq C$$

Ce qui implique que les suites $\{\partial_t u_n\}_n$ et $\{u_n\}$ sont bornées respectivement dans $L^2((\epsilon,T)\times\Omega)$ et $L^\infty((\epsilon,T);W_0^{1,p}(\Omega))$.

$\square$

4.3 Passage à la limite

Maintenant, on est prêt de passer à la limite quand $n\to\infty$. Grâce aux estimations données par 4.2, 4.3, on la proposition suivante

Proposition 4.4. *On a pour tout $\epsilon > 0$:*

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \ \textit{dans}\ L^\infty(\epsilon,T;W_0^{1,p}(\Omega)). \qquad (4.12)$$

$$\partial_t u_n \overset{*}{\rightharpoonup} \partial_t u \ \textit{dans}\ L^2((\epsilon,T)\times\Omega). \qquad (4.13)$$

$$u_n \rightharpoonup u \ \textit{dans}\ L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)). \qquad (4.14)$$

En appliquant le théorème d'Aubin-Simon 2.7, on a le résulta suivant

Proposition 4.5. *On a pour $r \leq \min\{2, p\}$ et pour tout $\epsilon > 0$:*

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } \mathcal{C}([\epsilon, T]; L^r(\Omega)).$$

Et enfin, comme dans la preuve de la proposition 3.14, on a :

Proposition 4.6. *Pour tout $\epsilon > 0$:*

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^p(\epsilon, T; W_0^{1,p}(\Omega)).$$

D'où on démontre le théorème principal de ce chapitre.

Démonstration. **(de Théorème 4.1)** Rappelons la formulation faible du problème $(\mathrm{P_n})$.

$$\int_0^T \int_\Omega u_n \partial_t \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n . \nabla \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega f_n(u_n) \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{4.15}$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega_T)$. Comme φ est à support compacte, alors les intégrales ci-dessus peuvent être considérés dans le domaine $(\epsilon, T) \times \Omega$, pour $\epsilon > 0$ assez petit qui dépend de la support de φ. D'où on peut passer à la limite dans (4.15) quand $n \longrightarrow +\infty$, en suivant les mêmes étapes de la preuve du théorème 3.1. On obtient donc

$$\int_0^T \int_\Omega u \partial_t \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u_n . \nabla \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega f(u) \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{4.16}$$

Pour terminer la preuve, il reste de montrer que $u(0) = u_0$. C'est à dire $\lim_{t \to 0} = u_0$ dans $L^2(\Omega)$. Il suffit de montrer que

$$u(t) \rightharpoonup u_0 \text{ dans } L^2(\Omega). \tag{4.17}$$

$$\|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \|u_0\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{4.18}$$

quand $t \longrightarrow 0$. En effet. On multiplie l'équation de $(\mathrm{P_n})$ par $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et on intègre par partie sur $(t_1, t_2) \times \Omega$ avec $0 < t_1 < t_2$. On obtient

$$\frac{1}{2} \int_\Omega u_n(t_2)^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_\Omega u_n(t_1)^2 \mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |\nabla u_n|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega f(u_n) u_n \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{4.19}$$

D'après les propositions 4.5,4.6, on peux passer à la limite quand $n \to +\infty$ et on obtient

$$\frac{1}{2} \int_\Omega u(t_2)^2 \mathrm{d}x - \frac{1}{2} \int_\Omega u(t_1)^2 \mathrm{d}x + \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega f(u) u \mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{4.20}$$

Et on a par l'inégalité de Holder et en utilisant l'inégalité

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u . \nabla \varphi \mathrm{d}x\mathrm{d}t &\leq \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \right)^{1/p'} \times \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_\Omega |\nabla \varphi|^p \mathrm{d}x\mathrm{d}t \right)^{1/p} && (4.21) \\ &\leq C|t_1 - t_2| && (4.22) \end{aligned}$$

De la même façon quant le te troisième terme. D'où, en faisant tendre $t_1 \to 0$ puis $t_2 \to 0$, on obtient (4.17). Pour

Rappelons que

$$u_0^n \longrightarrow u_0 \text{ dans } L^2(\Omega)$$

Comme

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } \mathcal{C}([0,T]; L^r(\Omega))$$

alors $u_n(0) := u_0^n \longrightarrow u(0)$ dans $L^r(\Omega)$. Par conséquent $u(0) = u_n$. Donc u est une solution faible du problème (P). CQFD. $\square$

5 Indication des solutions

5.1 Indication pour le chapitre 01

Indication pour l'exercice 1

1. Pour $p = 1$ et $p = \infty$, c'est évident. Pour$1 < p < \infty$, on a pour l'inégalité triangulaire, en utilisant l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \|f+g\|_{L^p}^p = \int_\Omega |f+g|^p \mathrm{d}x &\leq \int_\Omega |f+g|^{p-1}|f|\mathrm{d}x + \int_\Omega |f+g|^{p-1}|g|\mathrm{d}x \\ &\leq \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\|f\|_{L^p} + \|f+g\|_{L^p}^{p-1}\|g\|_{L^p} \end{aligned}$$

   ce qui donne le résultat.

Indication pour l'exercice 2

Utiliser le théorème de Lebesgue inverse 1.3

Indication pour l'exercice 3 **Indication pour l'exercice** 4

Indication pour l'exercice 5

Soit $\{\varphi_n\}_n$ une suite convergente de $\mathcal{D}(\Omega)$. Alors

$$\begin{cases} \exists\ K \subset \Omega \text{ compact } : \mathrm{supp}\varphi_n \subset K,\ \forall n \\ \varphi_n^{(k)} \longrightarrow \varphi^{(k)},\ \mathrm{dans} L^\infty(0,T),\ \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

. D'où

$$\left| \int f(\varphi_n - \varphi)\mathrm{d}x \right| \leq \|\varphi_n - \varphi\|_\infty \int_\Omega |f|\mathrm{d}x \longrightarrow 0.$$

Indication pour l'exercice 6

a) Soit $\{\varphi_n\}_n$ une suite convergente de $\mathcal{D}(0,T)$. Alors

$$\begin{cases} \exists\ K \subset \Omega \text{ compact } : \mathrm{supp}\varphi_n \subset K,\ \forall n \\ \varphi_n^{(\alpha)} \longrightarrow \varphi^{(\alpha)},\ \mathrm{dans} L^\infty(0,T),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^N \end{cases}$$

   On a donc pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$

$$\langle D^{(\alpha)}T, \varphi_n\rangle \ := \ (-1)^{|\alpha|}\langle T, \varphi_n^{(\alpha)}\rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|}\langle T, \varphi^{(k)}\rangle := \langle D(\alpha)T, \varphi_n\rangle \text{ car } T \in \mathcal{D}'(0,T;E).$$

   Donc $D^\alpha T$ est une distributions.

b) Comme $f \in C^k(\Omega)$, alors $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$. Et on a pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^N$, avec $|\alpha| \leq k$:

$$\langle D^{(\alpha)}T_f, \varphi\rangle \ := \ (-1)^{|\alpha|}\langle T_f, \varphi^\alpha\rangle$$

   D'autre part

$$\begin{aligned} \langle D^{(\alpha)}f, \varphi\rangle &:= \int_\Omega D^{(\alpha)}f\varphi\mathrm{d}x \\ &= (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega fD^{(\alpha)}\varphi\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|}\langle T_f, \varphi^\alpha\rangle \end{aligned}$$

Indication pour l'exercice 7

Appliquer l'inégalité de Hölder sur les fonction $|f|^r \in L^{p/r}(\Omega)$, $|g|^r \in L^{p'/r}(\Omega)$.

Indication pour l'exercice 8

1. On applique l'inégalité de Hölder
$$\begin{aligned}\|f_n - f\|^q_{L^q(\Omega)} &= \int_\Omega |f_n - f|^q \mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_\Omega |f_n - f|^p \mathrm{d}x\right)^{q/p} \left(\int_\Omega \mathrm{d}x\right)^{1-q/p} = c\|f_n - f\|^q_{L^p(\Omega)} \longrightarrow 0\end{aligned}$$

2. On a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$:
$$|\int_\Omega (f_n - f)\varphi \mathrm{d}x| \leq \|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \|\varphi\|_{L^{p'}(\Omega)} \longrightarrow 0$$

Indication pour l'exercice 9

Comme f est continue sur $\overline{\Omega}$, et à support borné, alors elle est bornée et donc elle est dans $L^2(\Omega)$. D'autre part, comme f est de classe C^1 par morceaux, alors il existe une famille des ouverts disjoints $\{\Omega_j\}_{j=1}^{\Lambda}$ telle que $\Omega = \cup_{j=1}^{\Lambda} \Omega_j$ et f différentiable sur Ω_j, pour tout j. D'où, on peut montrer facilement que
$$\partial_j T_f = \sum_{j=1}^{\Lambda} f'_{|\Omega_j} \chi_{\Omega_j} \in L^2(\Omega).$$

Indication pour l'exercice 10

1. On a
$$f \in L^1(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^1 x^\alpha \mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > -1$$

2. On a
$$f \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^1 x^{2\alpha} \mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > -1/2$$
et on a
$$f' \in L^2(\Omega) \Longleftrightarrow \int_0^1 x^{2(\alpha-1)} \mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > 1/2$$
Donc $f \in H^1(0,1) \Longleftrightarrow \alpha > 1/2$.

3. Si $\alpha > -3/2$, alors, pour tout $v \in \mathcal{D}(0,1)$, on a

$$\begin{array}{rcl} |\langle f, v\rangle_{H^{-1}\times H_0^1}| & := & |\alpha-1|\left|\int_0^1 x^\alpha v \mathrm{d}x\right| \\ & = & \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{|\alpha+1|}\left(\int_0^1 x^{(\alpha+1)}v'\mathrm{d}x\right)^{1/2} & \text{si } \alpha \neq -1 \\ \int_0^1 \ln x v' \mathrm{d}x & \text{si} \quad \alpha = -1 \end{array}\right. \\ & \leq & \left\{\begin{array}{ll} \frac{1}{|\alpha+1|}\left(\int_0^1 x^{(\alpha+1)}v'\mathrm{d}x\right)^{1/2} & \text{si} \quad \alpha \neq -1 \\ \left(\int_0^1 (\ln x)^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_0^1 v'^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} & \text{si} \quad \alpha = -1 \end{array}\right. \\ & \leq & C\|v\|_{H_0^1}. \end{array}$$

Donc $f \in H^{-1}(0,1)$. Si $\alpha \leq -3/2$, alors on applique le théorème de représentation de Riesz. On a

$$f \in H^{-1}(0,1) \Longleftrightarrow \exists! w \in H_0^1(0,1) : \langle f, \varphi\rangle_{H^{-1}\times H_0^1} = (w,\varphi) := \int_0^1 w'v'\mathrm{d}x, \ \forall \varphi \in H_0^1(0,1).$$

D'où

$$\int_0^1 f\varphi \mathrm{d}x = -(w'', \varphi), \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1).$$

Donc $-w'' = f$ dans $(0,1)$ et par conséquent

$$w'(x) = -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + a, \ w(x) = \left\{\begin{array}{ll} -\dfrac{x^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + ax + b & \text{si} \quad \alpha \neq -2 \\ -\frac{1}{\alpha+1}\ln x + ax + b & \text{si} \quad \alpha = -2 \end{array}\right.$$

D'après la question 2), on a pour $\alpha \neq -2$, $w \notin H^1(0,1)$ car $\alpha + 2 < -3/2 + 2 = 1/2$. et pour $\alpha = -2$, on a $w \notin H_0^1(0,1)$ car $w' \notin L^2(0,1)$. Donc $w \notin H_0^1(0,1)$ et donc $f \notin H^{-1}(0,1)$.

Indication pour l'exercice 13 La fonction de $\mathbb{R}^N$ dans lui même définie par $f(X) = |X|^p$, $p > 1$ est convexe et différentiable et on a $\nabla f = p|X|^{p-2}X$. On a d'après la convexité : $\forall t \in (0,1)$

$$|a|^p + t(|a|^p - |b|^p) \geq |a + t(b-a)|^p = |a|^p + tp|a|^{p-2}a.(b-a) + t|b-a|\varepsilon(t)$$

ce qui implique

$$|a|^p - |b|^p \geq p|a|^{p-2}a.(b-a) + |b-a|\varepsilon(t)$$

faisant tendre $t \to 0$, on obtient la première inégalité. Pour les deux inégalités restants,ils sont immédiat.

Indication pour l'exercice 14

1. Si $1 < p < 2$ Soit $t \in (0,1)$, alors si $b + t(a-b) = 0$, l'inégalité est facile à démontrer par un calcul direct. Si non alors, on a

$$\begin{aligned}
\big||a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b\big| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}|b+t(a-b)|^{p-2}(b+t(a-b))\mathrm{d}t\right| \\
&= \Big|\int_0^1 \big(|b+t(a-b)|^{p-2}\delta_{ij} \\
&+ (|b+t(a-b)|^{p-4}(b+t(a-b)).(b-a)(b+t(a-b))\big)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\leq |a-b|\int_\Omega |b+t(a-b)|^{p-2}\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Il suffit de voir que
$$|b+t(a-b)|^{p-2} \leq C_1|a-b|^{p-2}.$$
(distinguer les deux cas si $|b| \geq |a-b|$, et $|b| \leq |a-b|$.)

2. Si $p = 2$, c'est évident, Si $p > 2$, on a la fonctions définie sur $\mathbb{R}^N$ par $g(X) = |X|^{p-2}X$ est différentiable et on

$$D_{ij}g = |X|^{p-2}\delta_{ij} + (p-2)|X|^{p-4}x_ix_j$$

Donc

$$\begin{aligned}
\big||a|^{p-2}a - |b|^{p-2}b\big| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{dt}|b+t(a-b)|^{p-2}(b+t(a-b))\mathrm{d}t\right| \\
&= \Big|\int_0^1 \big(|b+t(a-b)|^{p-2}\delta_{ij} \\
&+ (|b+t(a-b)|^{p-4}(b+t(a-b)).(b-a)(b+t(a-b))\big)\,\mathrm{d}t\Big| \\
&\leq (p-1)(|a|^{p-2}+|b|^{p-2})|a-b|
\end{aligned}$$

5.2 Indication pour le chapitre 02

Indication pour l'exercice 16 Soit $\{\varphi_n\}_n$ une suite convergente de $\mathcal{D}(0,T)$. Alors

$$\begin{cases} \exists\ K \subset (0,T) \text{ fermé } : \operatorname{supp}\varphi_n \subset K,\ \forall n \\ \varphi_n^{(k)} \longrightarrow \varphi^{(k)},\ \text{dans} L^\infty(0,T),\ \forall k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
\langle f^{(k)}, \varphi_n\rangle &:= -\langle f^{(k-1)}, \varphi_n'\rangle \\
&= (-1)^k\langle f, \varphi_n^k\rangle \longrightarrow (-1)^k\langle f, \varphi^{(k)}\rangle := \langle f^{(k)}, \varphi\rangle \text{ car } f \in \mathcal{D}'(0,T;E).
\end{aligned}$$

Donc f est k-fois dérivable au sens des distributions. Comme k est quelconque, alors elle est indéfiniment dérivable.
Indication pour l'exercice 17

1. Changer entre les signes intégrale et dualité et utiliser la définition de la dérivée faible u_k' dans $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$.

2. Passer à la limite dans la formule de la question 1 en utilisant les deux hypothèses pour obtenir
$$\langle\int_0^T v\varphi \mathrm{d}t, w\rangle = -\langle\int_0^T u\varphi' \mathrm{d}t, w\rangle.$$
Ce qui donne $v = u'$.

Indication pour l'exercice 18

1. Soit $u \in W^{1,p}(0,T;E)$. Tout d'abord, on a $\ell(u) \in L^p(0,T;E)$ car
$$\int_0^T |\ell(u(t)|^p \mathrm{d}t \leq \int_0^T c^p \|u(t)\|^p \mathrm{d}t < \infty.$$
Et on a, grâce à la densité, on peut supposer que $u \in \mathcal{D}([0,T];E)$. Pour montrer que $\ell(u) \in W^{1,p}(0,T;F)$, on montre que $\ell(u)' = \ell(u') \in L^p(0,T;F)$ en utilisant la définition classique de la dérivée de $\ell(u)'$.

2. Il suffit de considérer $\ell(u) := \int_\Omega u \mathrm{d}x$, $E = L^1(\Omega)$, $F = \mathbb{R}$.

Indication pour l'exercice 19

1. Soit $u \in W^{1,p}(0,T;E)$, $v \in W^{1,q}(0,T;F)$. On a $B(u,v) \in L^r(0,T;G)$ car
$$\begin{aligned}\int_0^T |B(u(t),v(t))|^r \mathrm{d}t &\leq \int_0^r c^p \|u(t)\|_E^r \|v(t)\|_F^r \mathrm{d}t \\ &\leq c^r \left(\int \|u(t)\|_E^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \left(\int \|u(t)\|_F^q \mathrm{d}t\right)^{1/q} < \infty.\end{aligned}$$
Grâce à la densité, on peut supposer que $u \in \mathcal{D}([0,T];E)$, $v \in \mathcal{D}(0,T;F)$. Pour montrer que $(B(u,v))' \in L^r(0,T;G)$, il suffit de voir-en utilisant la définition classique de dérivée- que
$$(B(u,v))' = B(u',v) + B(u,v') \in L^r(0,T;G). \tag{5.1}$$

2. Il suffit d'intégrer la formule (5.1) entre s et t.

3. Considérer $E = F = L^2(\Omega)$, $G = \mathbb{R}$ et
$$B(u,v) = \int_\Omega uv \mathrm{d}x$$
et utiliser la question 2.

Indication pour l'exercice 20

1. Soit $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Il suffit de montrer que $\Delta_p u$ est une forme linéaire continue sur $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$. Soit $v \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, on a

$$\begin{aligned}
\langle \Delta u, v\rangle &\overset{\text{def}}{=} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u.\nabla v \mathrm{d}x\mathrm{d}t \\
&\leq \left(\int_0^T \int_\Omega ||\nabla u|^{p-2}\nabla u|^{p'} \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p'} \left(\int_0^T \int_\Omega |\nabla v|^{p} \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/p} \\
&= \|u\|^{p/p'}_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}\|v\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))} \qquad ((p-1)p'=p) \\
&= C\|v\|_{L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))}.
\end{aligned}$$

2. i) Pour tout élément $T \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$:

$$\langle T, u_n\rangle \longrightarrow \langle T, u\rangle, \text{ lorsque } n \to \infty.$$

   ii) On définit la forme linéaire suivant

$$\langle T_v, u\rangle \overset{\text{def}}{=} \int_0^T \int_\Omega |\nabla v|^{p-2}\nabla v.\nabla u \mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

   D'après la question 1), il est claire que T_v une forme linéaire continue sur $L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega))$, donc $T_v \in L^{p'}(0,T;W^{-1,p'}(\Omega))$, d'où

$$\langle T_v, u_n\rangle \longrightarrow \langle T_v, u\rangle.$$

   La réciproque n'est pas vraie (chercher un contre exemple).

Indication pour l'exercice 21

1. On a

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u_k', \varphi w\rangle \,\mathrm{d}t &= \int_0^T \langle u_k'\varphi, w\rangle \,\mathrm{d}t = \left\langle \int_0^T u_k'\varphi \mathrm{d}t, w\right\rangle \\
&= \left\langle -\int_0^T u_k\varphi' \mathrm{d}t, w\right\rangle = \int_0^T \langle u_k, \varphi' w\rangle \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

2. On passe à la limite dans l'égalité de la question 1), on obtient le résultat.

5.3 Indication pour le chapitre 03

Indication pour l'exercice 22

1. Soit $u \in L^2((0,T)\times\Omega)$, alors la fonction $v : (0,T) \to L^2(\Omega)$, définie par $v(t) = u(t,.)$ est dans $L^2(0,T;\Omega))$ et on a grâce à l'inégalité de Fubini

$$\|u\|_{L^2((0,T)\times\Omega)} = \|v\|_{L^2(0,T;\Omega))}.$$

   La même chose pour l'inverse. D'où on peut identifier entre les deux espaces.

2. On a Soit $u \in L^2((0,T)\times\Omega) \equiv L^2(0,T;\Omega))$. On a pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$, $w \in \mathcal{D}(\Omega)$.

$$\begin{aligned}\int_\Omega \langle u',\varphi\rangle w \mathrm{d}x &:= \int_\Omega -\int_0^T u\varphi' \mathrm{d}t w \mathrm{d}x \\ &= -\int_0^T \int_\Omega u(\varphi w)' \mathrm{d}x \mathrm{d}t \\ &= \langle \partial_t u, \varphi w\rangle.\end{aligned}$$

D'où, on peut identifier entre u' et $\partial_t u$.

Indication pour l'exercice 23 La fonction de $\mathbb{R}^N$ dans lui même définie par $f(X) = |X|^p$, $p > 1$ est convexe et différentiable et on a $\nabla f = p|X|^{p-2}X$. On a d'après la convexité : $\forall t \in (0,1)$

$$|a|^p + t(|a|^p - |b|^p) \geq |a + t(b-a)|^p = |a|^p + tp|a|^{p-2}a.(b-a) + t|b-a|\varepsilon(t)$$

ce qui implique

$$|a|^p - |b|^p \geq p|a|^{p-2}a.(b-a) + |b-a|\varepsilon(t)$$

faisant tendre $t \to 0$, on obtient la première inégalité. Pour les deux inégalités restants,ils sont immédiat.
Indication pour l'exercice 24

1. On a par soustraction :

$$\partial_t(u-v) - (-\Delta_p u - \Delta_p v) = 0 \text{ dans } (0,T)\times\Omega.$$

On multiplie par $(u-v)^+ := \max\{u-v, 0\}$, et on intègre par parties sur Ω :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u-v)^{+2}\mathrm{d}x + \int_{\{u-v>0\}} \left(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right).\nabla(u-v)\mathrm{d}x \leq 0 \qquad (5.2)$$

et on a d'après l'exercice précédente $\left(|\nabla u|^{p-2} - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right).\nabla(u-v) \geq 0$, d'où

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega (u-v)^{+2}\mathrm{d}x \leq 0.$$

Par conséquent,

$$\forall t \geq 0 : \int_\Omega (u(t)-v(t))^{+2}\mathrm{d}x \leq \int_\Omega (u_0 - v_0)^{+2}\mathrm{d}x = 0.$$

Donc $(u-v)^+ \equiv 0$, c'est à dire $u \leq v$.

2. De la même manière, et utilisant le fait que f est Lipschitzienne, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega (u-v)^{+2}\mathrm{d}x \leq \int_\Omega (u-v)^{+2}\mathrm{d}x.$$

En utilisant le lemme de Gronwall (voir Exercice 21), on obtient

$$\int_\Omega (u-v)^{+2}\mathrm{d}x \leq \int_\Omega (u_0-v_0)^{+}2\mathrm{d}x e^{2t} = 0.$$

3. Soient u et v deux solutions, alors $u_0 = v_0$, par conséquent $u = v$.

4. Supposons que $u_0 \in L^\infty(\Omega)$. Posons $\overline{u} = \|f\|_{L^\infty} t + \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$.

   i) Posons $\overline{u} = \|f\|_{L^\infty} t + \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}$. Le problème parabolique satisfait par $\overline{u}$ est

$$(\mathrm{P})\begin{cases} \partial_t\overline{u} - \Delta_p\overline{u} &= \|f\|_{L^\infty} \quad \text{dans} \quad \Omega_T = (0,T)\times\Omega \\ \overline{u}(t,.) &= \|f\|_{L^\infty} t + \|u_0\|_{L^\infty} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \ \ p.p.\ t \in (0,T) \\ \overline{u}(0,.) &= \|u_0\|_{L^\infty} \quad \text{sur} \quad \Omega \end{cases}$$

   ii) Montrons que $-\overline{u} \leq u \leq \overline{u}$. On montre que $u \leq \overline{u}$. Par soustraction on a :

$$\partial_t(u-\overline{u}) - (\Delta_p u - \Delta_p\overline{u}) = f - \|f\|_{L^\infty} \leq 0$$

   On multiplie cette equation par $(u-\overline{u})^+$ et on suivais la même preuve de la question 4-i). La même chose pour montrer que $-\overline{u} \leq u$

   iii) Par conséquent $u \in L^\infty(\Omega_T)$. En effet, on a $-\overline{u} \leq u \leq \overline{u}$ et on a $0 \leq \overline{u} \leq \|f\|_{L^\infty} T + \|u_0\|_{L^\infty} := C$, d'où $-C \leq u \leq C$. Donc $u \in L^\infty(\Omega_T)$.

Indication pour l'exercice 25

1. Il suffit de remarquer que

$$\int_{t^{n-1}}^{t^n} t\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(t^{n2} - (t^{n-1})^2) = \frac{t^n + t^{n-1}}{2}\Delta t.$$

2. On a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(t_n + t_{n-1})\int_\Omega \nabla u^n.(\nabla u^n - \nabla u^{n-1}) \\ \geq\ & \frac{1}{4}(t_n + t_{n-1})\int_\Omega (|\nabla u^n|^2 - |\nabla u^{n-1}|^2)\mathrm{d}x \\ =\ & \frac{1}{2}\int_\Omega (t_n|\nabla u^n|^2 - t_{n-1}|\nabla u^{n-1}|^2\mathrm{d}x - \frac{\Delta t}{4}\int_\Omega (|\nabla u^n|^2 + |\nabla u^{n-1}|^2)\mathrm{d}x \end{aligned}$$

3. Utiliser la question 1) et l'inégalité de Young.

4. Conséquence des questions précédentes.

Indication pour l'exercice 26 On

$$\forall x \in \Omega : |f(u(x))| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

d'où $f \in L^\infty(\Omega)$.

D'autre part, on a

$$\int_\Omega |f(u)|^2 \mathrm{d}x \leq b^2 \int_\Omega |u|^2 \mathrm{d}x < \infty.$$

Références

[1] R. A. Adams et J. J. F ; Fournier, Sobolev spaces, 2-nd ed., Academic Press-Elsevier Science Ltd, Oxford, U. K., 2003.

[2] V. Barbu, Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. Editura Academiei Bucureşti România, Noordhoff International Publishing, Leyden The Netherlands, 1976.

[3] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Universitext, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011.

[4] L. C. Evans, Partial differential equations, American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[5] M. Ghergu et V. Radulescu, Singular elliptic problems : bifurcation and asymptotic analysis, Oxford lecture series in Mathematics and its Applications, 37, The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2008.

[6] Gilbarg, David et Trudinger, Neil S. Elliptic partial differential equations of second order, 2-nd ed., Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[7] Jérôm, Droniou Intégration et espaces de Sobolev à valeurs vectorielles, 2001.

[8] H. Le Dret, H. Équations aux dérivées partielles elliptiques non linéaires, Springer, Heidelberg, 2013.

[9] Tomàs, Roubivcek Nonlinear Partial Differential Equations with Applications, Birkhäuser Verlag Basel . Boston . Berlin, 2001.