Chapitre 2

Ensembles et applications

2.1 Définitions et exemples

2.1.1 Ensembles et éléments

• Intuitivement, un ensemble est une collection d'objets. Les objets d'un ensemble sont appelés éléments de cet ensemble et qu'un élément a appartient à E (on écrit : $a \in E$) ou n'appartient à E (on écrit : $a \notin E$).

• Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté $\emptyset$ qui est l'ensemble ne contenant aucun élément.

• Un ensemble $E = \{a\}$, formé d'un seul élément, et appelé un singleton.

• Soit E un ensemble. Si un ensemble A est contenu dans E, on dit que A est une partie ou un sous ensemble de E. Les éléments de E n'appartenant pas à l'ensemble A constituent une nouvelle partie de E, appelée complémentaire de A dans E et notée A^c ou bien $C_E(A)$. Formellement, $C_E(A) = \{x \in E \mid x \notin A\}$.

2.1.2 Opérations sur les ensembles

A partir de deux ensembles A et B, on peut construire d'autres.

• On dit que A est inclus dans B (A est un sous-ensemble de B ou une partie de B) et on note $A \subset B$ si tout élément de A est aussi un élément de B.

$$A \subset B \Leftrightarrow (\forall x \in A \Rightarrow x \in B).$$

• On dit que A et B sont égaux si et seulement si $A \subset B$ et $B \subset A$.

• Soient A et B deux ensembles. La réunion de A et de B et noté $A \cup B$ (lire A union de B) est l'ensemble des éléments appartenant à A ou appartenant à B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \vee \ x \in B\}$$

• Soient A et B deux ensembles. L'intersection de A et de B et noté $A \cap B$ (lire A inter B) est l'ensemble des éléments appartenant à la fois à A et à B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \wedge \ x \in B\}$$

• On dit que A, B sont des ensembles disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

Exemple 2.1 *Dans $\mathbb{N}$, si l'on désigne par $\mathcal{D}(n)$ l'ensemble des diviseurs de l'entier naturel n, on aura*

$$\mathcal{D}(24) \cup \mathcal{D}(16) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24\} \text{ et } \mathcal{D}(24) \cap \mathcal{D}(16) = \{1, 2, 3, 4, 8\}.$$

2.1.3 Propriétés et règles de calculs

Voici quelques propriétés et règles de calculs sur les ensembles.

Proposition 2.1 *Soient A, B, C des parties d'un ensemble E. Alors*

1. $A \cup A = A$, $A \cap A = A$.
2. $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$.
3. $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ *(Commutativité).*
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *(Associativité).*
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *(Distributivité).*

Preuve: On démontre que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$$\begin{aligned}
\text{Soit } \ x \in A \cup (B \cap C) \ &\Leftrightarrow \ x \in A \ \text{ ou } \ x \in (B \cap C) \\
&\Leftrightarrow \ x \in A \ \text{ ou } \ (x \in B \ \text{ et } \ x \in C) \\
&\Leftrightarrow \ (x \in A \ \text{ ou } \ x \in B) \ \text{ et } \ (x \in A \ \text{ ou } \ x \in C) \\
&\Leftrightarrow \ (x \in A \cup B) \ \text{ et } \ (x \in A \cup C) \\
&\Leftrightarrow \ x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).
\end{aligned}$$

■

Définition 2.1 (L'ensemble des parties) *Soit E un ensemble. On admet qu'il existe un ensemble noté $\mathcal{P}(E)$, tel qu'on ait l'équivalence*

$$X \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X \subset E$$

$\mathcal{P}(E)$ est appelé l'ensemble des parties de E.

Remarque 2.1 *Si $card(E) = n$, alors $card\mathcal{P}(E) = 2^n$.*

Exemple 2.2 *Si $E = \{1, 2, 3\}$. Alors, $card\mathcal{P}(E) = 2^3 = 8$ et*

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Définition 2.2 (Différence ensembliste) *Soient A, B deux sous-ensembles de E.*

1. *La différence de A et de B noté $A \setminus B$ est formé des éléments qui sont dans A mais qui ne sont pas dans B c.à.d $A \setminus B = A \cap C_E(B)$.*
2. *La différence symétrique de A et de B noté $A \triangle B$ est l'ensemble $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ou bien l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$.*

Exemple 2.3

1. *Dans $\mathbb{N}$, on a $\mathcal{D}(24) \setminus \mathcal{D}(16) = \{3, 6, 12, 24\}$ et $\mathcal{D}(16) \setminus \mathcal{D}(24) = \{16\}$. Aussi, $\mathcal{D}(24) \triangle \mathcal{D}(24) = \{6, 12, 16, 24\}$.*
2. *L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ contient des nombres irrationnels comme π.*

Remarque 2.2 *Lorsque $A \subset E$, on a : $E \setminus A = C_E(A)$.*

Proposition 2.2 *Soient A, B deux sous-ensembles de E. Alors*

1. $A \setminus A = \emptyset$.
2. $A \setminus \emptyset = A$.
3. $A \cup C_E(A) = E$.
4. $A \cap C_E(A) = \emptyset$.
5. $C_E(C_E(A)) = A$.
6. $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$.
7. $C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$.

Preuve: On démontre que $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B)$.

$$\begin{array}{rcl} \text{Soit} \quad x \in C_E(A \cap B) & \Leftrightarrow & x \notin (A \cap B) \\ & \Leftrightarrow & \overline{x \in (A \cap B)} \\ & \Leftrightarrow & \overline{x \in A \text{ et } x \in B} \\ & \Leftrightarrow & \overline{x \in A} \text{ ou } \overline{x \in B} \\ & \Leftrightarrow & x \notin A \text{ ou } x \notin B \\ & \Leftrightarrow & x \in C_E(A) \cup C_E(B). \end{array}$$

■

Définition 2.3 (Partition) *Soit E un ensemble. Une partition de E est un ensemble $\{E_i\}$ de parties de E, qui vérifie les deux conditions suivantes :*

1. $E = \underset{i \in I}{\cup} E_i$;
2. $E_i \cap E_j = \emptyset \quad (\forall i \neq j \in I)$.

Exemple 2.4 *Soit A un sous-ensemble de E. Alors l'ensemble $\{A, C_E(A)\}$ est une partition de E.*

Définition 2.4 (Produit cartésien) *Soient A, B deux ensembles. Le produit cartésien, noté $A \times B$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in A$ et $y \in B$.*

$$A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ et } y \in B\}.$$

Exemple 2.5 .

1. $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.
2. *Soient $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{a, b\}$. Alors, $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$.*

Généralisation

Si on considère des ensembles $A_1, A_2, ..., A_n$ on peut de même définir les n-uples $(x_1, x_2, ..., x_n)$ où $x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n$.

$$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, ..., x_n \in A_n\}.$$

Proposition 2.3 *Soient A, B, C, D quatre sous-ensembles de E. Alors*

1. $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.
2. $(A \times C) \cup (A \times D) = A \times (C \cup D)$.
3. $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.

Preuve: On démontre que $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.

$$\begin{aligned}
(A \times C) \cup (B \times C) &= \{(x,y) \mid (x,y) \in A \times C \text{ ou } (x,y) \in B \times C\} \\
&= \{(x,y) \mid (x \in A \text{ et } y \in C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } y \in C)\} \\
&= \{(x,y) \mid (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } y \in C\} \\
&= (A \cup B) \times C.
\end{aligned}$$

■

2.2 Applications

2.2.1 Définitions et exemples

Définition 2.5 *Soient E, F deux ensembles. On dit que f est une application de E dans F si pour chaque élément $x \in E$, il existe un élément unique $y \in F$ tel que $f(x) = y$ et on note*

$$f : E \longrightarrow F \quad \textit{ou bien} \quad E \xrightarrow{f} F.$$

• *L'ensemble E est dit ensemble de départ et F est dit ensemble d'arrivée. L'élément x est dit l'antécédent et y est dit l'image de x par f.*
• *On note par $\mathfrak{F}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications de E dans F.*

Exemple 2.6 .

1. $\begin{array}{rccc} f: & \{1,2,3\} & \longrightarrow & \{2,4,5\} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ *n'est pas une application.*
2. *L'identité* $\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}$ *est une application et sera très utile dans la suite.*
3. *Les projections* $\begin{array}{rccc} P_x: & E \times F & \longrightarrow & E \\ & (x,y) & \mapsto & P_x(x,y) = x \end{array}$ $\begin{array}{rccc} P_y: & E \times F & \longrightarrow & F \\ & (x,y) & \mapsto & P_y(x,y) = y \end{array}$
   sont des applications aussi.

Définition 2.6 (Restrictions et prolongements) *Soit f une application de E vers F*

1. *On appelle restriction de f à une partie $A \subset E$, l'application notée $f_{|A} : A \longrightarrow F$ définie par*
$$f_{|A} = f(x), \quad \forall x \in A.$$
2. *On appelle prolongement de f à un ensemble E' contenant E, toute application g de E' vers F dont la restriction est f.*

Exemple 2.7 *Si f est l'identité de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même, elle possède une infinité de prolongement à $\mathbb{R}$, parmi lesguels :*

1. *L'application identité de $\mathbb{R}$.*
2. *L'application "valeur absolue" de $\mathbb{R}$ dans lui-même.*
3. *L'application h définie par $h(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, et qui est identiquement nulle sur $\mathbb{R}^-$.*

2.2.2 L'image directe et l'image réciproque

Définition 2.7 *Soient E, F deux ensembles*

1. *Soit $A \subset E$ et $f : E \longrightarrow F$, l'image directe de A par f est un sous-ensemble de F définie par*
$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}.$$
2. *Soit $B \subset F$ et $f : E \longrightarrow F$, l'image réciproque de B par f est un sous-ensemble de E définie par*
$$f^{-1}(B) = \{x \mid f(x) \in B\}.$$

Exemple 2.8 *Soit f une application donnée par :* $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \mapsto & 2n+1 \end{array}$

1. *Soit $A = \{0, 1, 2\}$, alors $f(A) = \{f(n) \mid n \in A\} = \{f(0), f(1), f(2)\} = \{1, 3, 5\}$.*
2. *Soit $B = \{5\}$, alors $f^{-1}(B) = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \in B\} = \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) = 5\} = \{2\}$.*

Proposition 2.4 *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application, A_1, A_2 deux parties de E et B_1, B_2 deux parties de F. Alors*

(1) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$, $\quad f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$;

(2) Si $A_1 \subset A_2$, alors $f(A_1) \subset f(A_2)$;

(3) $A_1 \subset f^{-1}(f(A_1))$;

(4) $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$, $\quad f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;

(5) Si $B_1 \subset B_2$, alors $f^{-1}(B_1) \subset f^{-1}(B_2)$;

(6) $f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$.

Preuve: On démontre la propriété (2)

Soit $y \in f(A_1)$, alors $\exists x \in A_1 \mid f(x) = y$, et comme $A_1 \subset A_2$, donc $\exists x \in A_2 \mid f(x) = y$. D'où $y \in f(A_2)$. ■

Définition 2.8 (La composition) *Soient E, F, G trois ensembles et f, g deux applications telles que*
$$E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G$$
On peut en déduire une application de E vers G notée $h = g \circ f$ et appelée application composée de f et g, par
$$\forall x \in E, h(x) = g \circ f(x) = g[f(x)].$$

Remarque 2.3 *En général, on a $f \circ g \neq g \circ f$ ceci est illustré par les fonctions réelles*
$$f(x) = x^2, \quad g(x) = 2x + 1$$
$$f \circ g(x) = f[g(x)] = f(2x+1) = (2x+1)^2, \quad g \circ f(x) = g[f(x)] = g(x^2) = 2x^2 + 1.$$
Alors, $f \circ g \neq g \circ f$.

- *Par contre la composition des applications est associative $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

2.2.3 Injection, surjection, bijection

Définition 2.9 *Soient E, F deux ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application*

1. *f est **injective** si et seulement si*
$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$
2. *f est **surjective** si et seulement si*
$$\forall y \in F, \exists x \in E \mid y = f(x).$$
   - *Une autre formulation : f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.*
3. *f est **bijective** si f à la fois injective et surjective. Autrement dit :*
$$\forall y \in F, \exists ! x \in E \mid y = f(x).$$

Remarque 2.4 *Si f est bijective, et seulement dans ce cas, à tout $y \in F$ on fait correspondre un $x \in E$ et un seul. On définit ainsi une application **bijective**, notée*
$$f^{-1} : F \longrightarrow E$$
et appelée application réciproque de f, et on a l'équivalence
$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(x).$$

Exemple 2.9 *Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. Montrons que f est injective*

Soit $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $f(x) = f(x')$. Alors $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x'}$, donc $1 + x = 1 + x'$ et donc $x = x'$. Alors f est injective.

Par contre f n'est pas surjective. Il s'agit de trouver un élément y qui n'a pas d'antécédent par f. Ici il est facile de voir que l'on a toujours $f(x) \leq 1$ et donc par exemple $y = 2$ n'a pas d'antécédent. Ainsi f n'est pas surjective. Donc n'est pas bijective.

Théorème 2.1 *Soient E, F, G trois ensembles et f, g deux applications telles que $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$*

1. *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
3. *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.*
4. *Si f et g sont bijectives, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

Preuve:

1. Comme f et g sont injectives, alors
$$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) \Rightarrow f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$
2. Comme f et g sont surjectives, alors on a
$$(g \circ f)(E) = g[f(E)] = g(F) = G.$$
3. Directement d'apres (1) et (2).
4. Soit $z \in G$, comme $g \circ f$ est bijective donc $\exists x \in E \mid (g \circ f)(x) = z$.
   On a $(g \circ f)^{-1}(z) = (g \circ f)^{-1}((g \circ f)(x)) = x$.
   D'autre part $(f^{-1} \circ g^{-1})(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})((g \circ f)(x)) = f^{-1}(g^{-1}(g(f(x))) = f^{-1}(f(x)) = x$.
   Donc, $(g \circ f)^{-1}(z) = (f^{-1} \circ g^{-1})(z) \quad \forall z \in G$. D'où, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

■