Université Mohamed Boudiaf - Msila
Faculté de Mathématiques et de l'informatique
Socle commun MIAnnée
Universitaire 2021-2022

Module : **Algèbre01**

(Série d'exercices N° 2)

Exercice n°1 :

1. Soit l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Les propositions suivantes sont elles vraies ?

$$2 \in A,\ 3 \subset A,\ \emptyset \in A,\ \{\emptyset\} \subset A,\ A \cup \{\emptyset\} = A.$$

2. Soient $B = \{1, 2\}$ et $C = \{1, 3\}$ deux ensembles.
   (a) Déterminer $B \cap C,\ B \cup C,\ C_A(B),\ C_A(C),\ A \setminus B$ et $B \triangle C$.
   (b) Déterminer $B \times C, B \times \emptyset, B \times \{\emptyset\}$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(B))$.

Exercice n°2 : Soient A, B, C trois parties de l'ensemble E. Montrer que :

1. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset C_E(B)$.
2. $A \subset B \Leftrightarrow C_E(B) \subset C_E(A)$.
3. $C_E(A \cap B) = C_E(A) \cup C_E(B), \quad C_E(A \cup B) = C_E(A) \cap C_E(B)$ $(*)$
4. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
5. $C_E(A) \Delta C_E(B) = A \triangle B, \quad C_E(A \triangle B) = C_E(A) \triangle B$ $(*)$
6. $(A \times C) \cup (B \times C) = (A \cup B) \times C$.
7. $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

Exercice n°3 :(Devoir maison)
Soient A, B, C trois parties de l'ensemble E. Montrer que :

1. $A = B \Leftrightarrow A \cap B = A \cup B$.
2. $A \cup B = A \cap C \Leftrightarrow B \subset A \subset C$.
3. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow C_E(A) \cup C_E(B) = E$.
4. $A \triangle B = \emptyset \Leftrightarrow A = B$.
5. $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C) = (A \setminus C) \cap B = (B \setminus C) \cap A$.

Exercice n°4 : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soient A, B deux parties de l'ensemble E et C, D deux parties de l'ensemble F. Montrer que :

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B), \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ $(*)$
2. f est injective $\Leftrightarrow f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
3. $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D), \quad f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ $(*)$
4. $f(f^{-1}(C)) \subset C$.
5. f est surjective $\Leftrightarrow f(f^{-1}(C)) = C$.
6. $f^{-1}(C_F(C)) = C_E f^{-1}(C)$.
7. $f^{-1}(C \triangle D) = f^{-1}(C) \triangle f^{-1}(D)$.

Exercice n°5 : Soit l'application f définie par

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.
3. Montrer que l'application g définie par

$$g : [-1, 1] \longrightarrow [-1, 1]$$
$$x \longmapsto g(x) = f(x)$$

   est une bijection et trouver l'application réciproque g^{-1}.

Exercice n°6 :(Devoir maison)

Soit E un ensemble non vide. On considère une application f de E dans $\mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} i) f(\phi) = 0, \\ ii) f(E) = 1, \\ iii) \forall A, B \in \mathcal{P}(E) : f(A \cup B) = f(A) + f(B), \text{ si } A \cap B = \phi. \end{cases}$$

1. Pour toute partie A de E, exprimer $f(C_E^A)$ en fonction de $f(A)$.
2. Démontrer que : $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) : f(A \cup B) = f(A) + f(B) - f(A \cap B)$.
3. On suppose de plus que
$$iv) \forall A \in \mathcal{P}(E) : f(A) \geq 0.$$
   (a) Montrer que $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) :\ A \subset B \Rightarrow f(A) \leq f(B)$.
   (b) Montrer que $\forall A \in \mathcal{P}(E) :\ 0 \leq f(A) \leq 1$.