Chapitre 1

Généralités sur les équations différentielles

1.1 Equations différentielles du première ordre

On appelle équation différentielle du premier ordre toute relation entre une fonction inconnue et sa dérivée. ie : $F(x, y, y') = 0$, où l'inconnu y est une fonction de variable réel x, et y' sa dérivée.

Toute fonction satisfaisant à cette relation est dite solution de l'équation différentielle.

Lorsque l'équation $F(x, y, y') = 0$ est résoluble en y' on peut mettre sous la forme :

$$y' = f(x, y)$$

On a alors :

Définition 1.1 :

Soit ω un intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$, I un intervalle ouvert (peut être infini) de $\mathbb{R}$, et $f : I \times \omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction a deux variables.

Une équation différentielle (du premier ordre) s'écrit :

$$y' = f(x, y) \tag{1.1}$$

où l'inconnue y est une fonction dérivable a valeurs dans $\mathbb{R}$.

Une solution de l'équation (1.1) est un couple (J, φ), où J est un sous - intervalle non vide et non réduit à un point de I, et $\varphi : J \longrightarrow \omega$ est une fonction dérivable qui vérifie :

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \forall x \in J$$

Exemple 1.1 :

1. *Les fonctions constantes sont les solutions de $y' = 0$ sur un intervalle.*
2. $\exp$ *est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = y$.*
3. *$f : x \longrightarrow xe^{2x}$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $xy' - (2x + 1)y = 0$.*
4. *Si F est une primitive d'une fonction f sur un intervalle I, alors F est solution sur I de $y' = f$. En particulier,* $\ln$ *est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de $xy' = 1$.*

1.2 Problème de Cauchy

Si une solution (J, φ) de l'équation (1.1) satisfait la relation $y_0 = \varphi(x_0)$, pour un certain point Soit $(x_0, y_0) \in I \times \Omega$, c'est-à-dire si le graphe de la solution passe par le point (x_0, y_0) on dira que (x_0, y_0) est une condition initiale de la solution (J, φ).

Chercher la solution qui vérifie une condition initiale , c'est-à-dire résoudre un problème dite problème de Cauchy.

Définition 1.2 : *Le problème de Cauchy relative à l'équation* (1.1) *et aux données initiales* (x_0, y_0) *consiste à chercher les solutions du problème suivant :*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{1.2}$$

Définition 1.3 :

On appelle une solution générale de l'equation (1.1) *une fonction* $\varphi_c = \varphi(x, c)$ *dépendant d'une constante arbitraire c et satisfant aux conditions suivants :*

1. *Elle satisfait* (1.1) *que soit la valeur concrète de la constante c.*
2. *Quelle que soit la condition initiale* $y = y_0$ *lorsque* $x = x_0$ *, on peut trouver une valeur* $c = c_0$ *telle que la fonction* φ_{c_0} *vérifie la condition initiale donnée.*

On appelle une solution particulière de l'equation (1.1) *toute solution* $\varphi_{c_0} = \varphi(x, c_0)$ *déduit de la solution générale* $\varphi_c = \varphi(x, c)$.

Remarque 1.1 :

Résoudre ou intégrer une équation différentielle consiste à :

1. *Chercher sa solution générale* (*ou son intégrale général*)*, si les conditions initiales ne sont pas données.*
2. *Ou chercher la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales s'il y en a.*

Notons qu'une solution a en général de nombreuses conditions initiales possibles. Si (J, φ) et (K, ψ) sont deux solutions d'une équation différentielle, on dira que (K, ψ) prolonge (J, φ) (ou que (K, ψ) est un prolongement de (J, φ)), si J est inclus dans K et si la restriction de ψ a J est φ.

Définition 1.4 :

Si une solution (J, φ) *n'admet pas d'autre prolongement qu'elle même, on dit que c'est une solution non prolongeable, ou maximale.*

Définition 1.5 :

Soit (J, φ) *une solution maximale. Si* $J = I$ *, on dit que* (J, φ) *est une solution globale.*

1.3 Théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz

Définition 1.6 :

On dit que la fonction f *est localement Lipschitzien sur* $I \times \Omega$ *par rapport à la seconde variable , s'il existe un rectangle* $R_0 = I_0 \times \Omega_0 \subseteq I \times \Omega$ (I_0, Ω_0 *deux ouverts*) *t.q :*

$$\exists k > 0, \forall x \in I_0, \forall y_1, y_2 \in \Omega_0; |f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq k|y_2 - y_1| \tag{1.3}$$

Lemme 1.1 :

Le problème (1.2) *équivalant au problème suivant :*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt \tag{1.4}$$

Preuve:

$\Longrightarrow$ supposons que y est une solution de (1.2).

Donc : $\int_{x_0}^{x} y'(t)dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$. Alors : $y(x) - y_{x_0} = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$.

Doú le résultat.

$\Longleftarrow$ Si y vèrifie (1.4) , elle est dérivable , et on a (1.2). $\blacksquare$

Lemme 1.2 :

Soit $k > 0, a, b \in \mathbb{R}$, φ une fonction continue sur $[a, b]$, et soit $x_0 \in [a, b]$ telles que :

$$\forall x \in [a, b] : |\varphi(x)| \leq k \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt$$

Donc : $\varphi \equiv 0$.

Théorème 1.1 (**Cauchy − Lipschitz**) :

Supposons que f est bornée ($\exists M > 0 : |f(x, y(x))| \leq M$), et localement Lipschitzien par rapport à la seconde variable sur un rectangle $R =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\times]y_0 - b, y_0 + b[$. Alors : il exite un rectngle $R_0 =]x_0 - a, x_0 + a[\times]y_0 - b, y_0 + b[$ tel que le problème (1.2) admet une solution unique. $a = \min\left(\alpha, \dfrac{b}{M}\right)$

Preuve:

— **L'existence :** Il suffit de prouver (1.4) (D'après lemme 1.1).

Considérons une suite des fonctions $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\begin{cases} y_0(x) = y_0 & , \quad \forall x \in I_0 =]x_0 - a, x_0 + a[\\ y_n(x) = y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt & , \quad \forall x \in I_0, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

La suite $\{y_n\}$ est bien définie car : $|y_n(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))dt| \leq M|x - a| \leq b$

Donc $y_n(x) \in]y_0 - b, y_0 + b[$, ce qui donne un sense au $f(x, y_n(x))$.

Maintenant, on montre que :

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \frac{M.k^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n, \forall x \in I_0$$

* pour $n = 1$ on a :

$$|y_1(x) - y_0| = |\int_{x_0}^{x} f(t, y_0(t))dt| \leq M|x - x_0|$$

* Supposons que pour $m \in \mathbb{N}^*$: $|y_m(x) - y_{m-1}(x)| \leq \dfrac{M.k^{m-1}}{m!}|x - x_0|^m$

$$\begin{aligned} |y_{m+1}(x) - y_m(x)| &= |\int_{x_0}^{x} [f(t, y_m(t)) - f(t, y_{m-1}(t)]dt| \\ &\leq |\int_{x_0}^{x} |f(t, y_m(t)) - f(t, y_{m-1}(t))|dt| \\ &\leq k|\int_{x_0}^{x} |y_m(t) - y_{m-1}(t)|dt| \\ &\leq |\int_{x_0}^{x} \frac{M.k^m}{n!}|t - x_0|^m dt| \\ &\leq \frac{M.k^m}{(m+1)!}|x - x_0|^{m+1} \end{aligned}$$

Posons : $G_n(x) = y_n(x) - y_{n-1}(x), U_n = \dfrac{M.k^{n-1}}{n!}|x - x_0|^n$.
La serie $\sum |G_n(x)|$ est donc converge normalement (puisque $\sum |U_n|$ est converge).
Donc : $\sum |G_n(x)|$ est converge uniformément sur I_0.
Alors : la suite $\{y_n\}$ est converge uniformément sur I_0 vers une fonction y.
Maintenant , on a :

$$\begin{aligned} |\int_{x_0}^{x}[f(t, y_n(t)) - \int_{x_0}^{x} f(t, y(t)]dt| &= |\int_{x_0}^{x}[f(t, y_n(t)) - f(t, y(t)]dt| \\ &\leq \int_{x_0}^{x} |f(t, y_n(t)) - f(t, y(t))|dt \\ &\leq k\int_{x_0}^{x} |y_n(t) - y(t)|dt \\ &\leq k.a. \sup_{x\in I_0} |y_n(x) - y(x)| \end{aligned}$$

Ce qui est converge vers 0 (D'aprés la convegence uniforme de $\{y_n(x)\}$).
Alors : $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))dt = \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$.
Ce qui donne $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))dt$.
Cette methode est appelée la methode des approximations successives de **Picard**.

— **L'unicité :**
Supposons qui' il existe deux solutions y, z de donc de (1.2). Donc :

$$|y(x) - z(x)| = |\int_{x_0}^{x}[f(t, y(t)) - f(t, z(t))]dt|$$

Alors :

$$|y(x) - z(x)| \leq |\int_{x_0}^{x} |f(t, y(t)) - f(t, z(t))|dt|$$

Ce qui donne :

$$|y(x) - z(x)| \leq k|\int_{x_0}^{x} |y(t) - z(t)|dt|$$

Appliquons lemme 1.2 pour $\varphi = y - z$ .Donc : $y = z$ ■

Remarque 1.2 :

1. *Si f est continue , alors : f est bornée.*
2. *Si $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est continue , alors f est localement Lipschitzien.*

Le théorème suivant donne la dépendance des solutions de l'équation (1.1) par rapport aux conditions initiales :

Théorème 1.2 *Si f est continue, et possède par rapport au second membre y une dérivée partielle bornée sur R_0, alors la solution φ de l'équation* (1.1) *associé à la condition $\varphi(x_0) = y_0$, et la solution ψ de l'équation* (1.1) *associé à la condition $\psi(x_1) = y_1$ dépend continument du manière suivant :*
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ telle que si $|y_1 - y_0| < a, |y_1 - y_0| < \delta$, on a $|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$.

1.4 Equations différentielles d'ordre supérieur à un

On peut écrire symboliquement une équation différentielle d'ordre $n(n > 1)$ sous la forme :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

Lorsque l'équation $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ est résoluble par rapport à $y^{(n)}$ on peut mettre suos la forme : $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$

On a donc :

Définition 1.7 :

Soit Ω un domaine (non vide) de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle ouvert (peut être infini) de $\mathbb{R}$, et $f : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction a $n+1$ variables.

Une équation différentielle d'ordre n s'écrit :

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

On a pour cette équation une théorème d'existence, et d'unicité de solution analogue à la théorème de Cauchy-Lipschitz (voir chapitre suivant).

Exemple 1.2 :

Supposons l'équation $y^{(n)} = f$, où f est une fonction intégrable sur un intervalle $[a, b]$.

Pour tout $x_0 \in [a, b]$, il existe une constante c_1 telle que :

$$y^{(n-1)}(x) = \int f + c_1$$

Aprés n intégrales on trouve :

$$y(x) = \int \dots \int f + \frac{c_1(x - x_0)}{(n-1)!} + \frac{c_2(x - x_0)}{(n-2)!} + \dots + c_n$$

Remarque 1.3 :

On peut réduire une équation différentielle d'ordre n à une autre équation différentielle d'ordre inférieur à n :

i) *Si $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$ (absence de y) :*
on pose $z = y'$, on revient alors à l'équation $z^{(n-1)} = f(x, z, z', \dots, y^{(n-2)})$, ce qui est équation différentielle d'ordre $n-1$.

ii) *Si $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(x, y^k, \dots, y^{(n-1)})(1 < k < n)$ (absence de $y, y', \dots, y^{k-1}$) :*
on pose $z = y^k$, on revient alors à l'équation $z^{(n-k)} = f(x, z, z', \dots, y^{(n-k-1)})$, ce qui est équation différentielle d'ordre $n-k$.

iii) *Si $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = f(y, y', \dots, y^{(n-1)})$ (absence de x) :*
on pose $z = y'$, on revient alors à l'équation $z^{(n-1)} = f(y, z, z', \dots, y^{(n-2)})$, ce qui est équation différentielle d'ordre $n-1$.

iv) *Si l'équation différentielle $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ est homogène par rapport $y, y', \dots, y^{(n)}$:*
ie : $\exists p \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{R}^*; F(x, ky, ky', \dots, ky^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$
on pose $\dfrac{y'}{y} = z$. Donc : $\dfrac{y''}{y} = z + z^2, \dfrac{y^{(3)}}{y} = z'' + 3zz' + z^3 \dots$
Si on remarque que $F(x, y, y', \dots, ky^{(n)}) = y^p F(x, 1, \dfrac{y'}{y}, \dots, \dfrac{y^{(n)}}{y}) = G(x, z, \dots, z^{(n-1)})$.
On revient alors à l'équation $G(x, z, \dots, z^{(n-1)}) = 0$, ce qui est équation différentielle d'ordre $n-1$.

v) *Si l'équation différentielle* $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ *est homogène par rapport* $x, y, y', \dots, y^{(n)}$:

ie : $\exists p \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{R}^*; F(x, ky, y', \frac{y"}{k}, \dots, \frac{y^{(n)}}{k^{n-1}}) = k^p F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$

On pose $z = \frac{y}{x}$. *Donc :* $y' = xz' + z, y" = xz" + 2z' \dots y^{(n)} = xz^{(n)} + nz^{(n-1)}$.

Posons : $t = \ln x = e^t$, *donc :* $y'(x) = z'(t), y" = z"(t) \dots y^{(n)} = z^{(n)}(t)$

Alors :

$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = x^p F(1, \frac{y}{x}, y', xy", \dots, x^{n-1}y^{(n)}) = x^p G(z(t), z'(t), z"(t), \dots, z^{(n)}(t))$

On trouve : $G(z(t), z'(t), z"(t), \dots, z^{(n)}(t)) = 0$, *ce qui est comme le cas* **iii**).

L'opérateur $\mathcal{D}$:

On utilise cet opérateur pour résoudre les équations différentielles linéaires a coefficient constantes.

Soit y une fonction $n-$ dérivable ($n \in \mathbb{N}^*$).

On définit l'opératrur $\mathcal{D}$ sur la fonction y comme suivant : $\mathcal{D}.y = y'$ et $\mathcal{D}^n.y = y^{(n)}$.

On a les propriétés suivants :

1. $\mathcal{D}^{n+1}.y = \mathcal{D}(\mathcal{D}^n.y)$
2. $\forall n, m \in \mathbb{N}^* : \mathcal{D}^{n+m}.y = \mathcal{D}^n(\mathcal{D}^m.y) = \mathcal{D}^m(\mathcal{D}^n.y)$
3. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R} : a(\mathcal{D}^n.y) = \mathcal{D}^n(a.y) = a\mathcal{D}^n.y$
4. $\forall n, m \in \mathbb{N}^*, \forall a, b \in \mathbb{R} : (a\mathcal{D}^n + b\mathcal{D}^n)y = a\mathcal{D}^n.y + b\mathcal{D}^n.y$

Exemple 1.3 :

Soit l'équation $y" - 4y' + 3y = e^{-x}$.

On peut écrire cette équation comme suivant : $\mathcal{D}^2.y - 4\mathcal{D}.y + 3y = e^{-x}$.

Alors : $(\mathcal{D}^2 - 4\mathcal{D} + 3)y = e^{-x}$.

Donc : $(\mathcal{D} - 1)(\mathcal{D} - 3)y = e^{-x}$

Si on pose $u = (\mathcal{D} - 3)y$, *on truve* $(\mathcal{D} - 1)u = e^{-x}$, *ie* $u' - u = x$.

La solution de cette équation est $u = e^x \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-x} + c_1e^{-2x}$.

Donc, on a : $(\mathcal{D} - 3)y = -\frac{1}{2}e^{-x} + ce^{-2x}$, *ie :* $y' - 3y = -\frac{1}{2}e^{-x} + c_1e^{-2x}$.

Alors : $y = e^{3x} \int [-\frac{1}{2}e^{-4x} + c_1e^{-5x}]dx = -\frac{1}{8}e^{-x} - \frac{c_1}{2}e^{-2x} + c_2e^{3x}$.

Donc : la solution peut écrit sous la forme : $y = -\frac{1}{8}e^{-x} + c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$.