Chapitre 3

Système d'équations différentielles

Dans le chapitre précédant, on a déjà étudié théoriquement un système linéaire des équations différentielles associé à une équation différentielle d'ordre supérieure à 1. Dans ce chapitre, on va faire une étude supplémentaire d'un système linéaire du premier ordre, et on va donner une introduction à la stabilité d'un système linéaire.

3.1 Généralités

Définition 3.1 : *Soit Ω un ouvert (non vide) de $\mathbb{R}^n$, I un intervalle ouvert (peut être infini) de $\mathbb{R}$, et $F : I \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle a $(n+1)$ variables.*

Un système de n équations différentielle (du premier ordre) s'écrit :

$$Y' = F(x, Y) \tag{3.1}$$

où l'inconnue Y est une fonction vectorielle, dérivable, a valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Une solution de l'équation (3.1) est un couple (J, Φ), où J est un sous - intervalle non vide et non réduit à un point de I, et $\Phi : J \longrightarrow \Omega$ est une fonction dérivable qui vérifie :

$$\Phi'(x) = F(x, \Phi(x)), \forall x \in J$$

Si F est une application affine par rapport à Y, on dit que le système (3.1) est linéaire. On a donc la définition suivante :

Définition 3.2 : *Soit I un intervalle ouvert (peut être infini) de $\mathbb{R}$, et $A : I \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ une matrice carré $n \times n$ et $B : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction vectorielle.*

Un système linéaire de n équations différentielle (du premier ordre) s'écrit :

$$Y' = A(x).Y + B(x) \tag{3.2}$$

Remarque 3.1 : *Si on écrit $A(x) = (A_{ij}(x))$, et $B(x) = (B_i(x))$, le système (3.2) s'écrit :*

$$Y_i' = B_i(x) + \sum_{j=1}^{n} A_{ij}(x).Y_j \tag{3.3}$$

Si $B = 0$, on dit que (3.2) est un système linéaire homogène.

3.2 Exponentielle d'une matrice

Dans ce paragraphe, on se donnera la notion de l'exponentielle d'une matrice carré. Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carré $n \times n$.

Proposition 3.1 *La quantité* $\|A\| = \sup\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|A(x)\|}{\|x\|}$ *définie une norme sur l'espace* $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.
La quantité $\|A\|$ *est bien définie, i.e :* $\forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : \|A\| \leq \infty$.
De plus, $\max\limits_{j} \sum\limits_{i} a_{ij}^2 \leq \|A\|^2 \leq \sum\limits_{i,j} a_{ij}^2$

Proposition 3.2 *L'espace* $(\mathcal{L}(\mathbb{R}^n), \|.\|)$ *est un espace de Banach de dimension* n^2.

Définition 3.3 *On dit que la matrice A est diagonale si elle est diagonale dans une base quelconque, appelée base propre. Dans ce cas là, les valeurs propre de A sont réelles.*

Définition 3.4 *On dit que la matrice A est nilpotent s'ii existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $A^m = 0$.*

Proposition 3.3 [2] *Si on désigne par $tr(A)$ la trace de A et par $detA$ le déterminant de A, on a :*

$$\forall \varepsilon \in \mathcal{V}(0) : det(I_n + \varepsilon A) = 1 + \varepsilon tr(A) + o(\varepsilon^2).$$

Définition 3.5 *On appelle exponentielle de la matrice A l'opérateur e^A, défini comme suivant :*

$$e^A = I_n + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

I_n désigne la matrice identité.

Proposition 3.4 [2] *e^A est un opérateur bien défini.*

Proposition 3.5 [2] *On a :*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{d}{dx}(e^{xA}) = Ae^{xA}.$$

Proposition 3.6 [2] *On a :*

$$det(e^A) = e^{tr(A)}.$$

Théorème 3.1 [2] *Le problème de Cauchy :*

$$\begin{cases} Y' = AY \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \tag{3.4}$$

admet pour solution la fonction : $x \longmapsto e^{xA} Y_0$.

3.3 Notion de stabilité

Supposons que $I = [a, +\infty[$.
On sais que sous des conditions analogues aux conditions du théorème 1.1, on assure l'existence et l'unicité d'une solution locale de l'équation (3.1), associée à une condition initiale $Y(x_0) = Y_0$ (problème de Cauchy).

Maintenant, on donne la définition suivante qui s'appelle la stabilité au sens de Lyapounov :

Définition 3.6 *Soit φ la solution du système* (3.1) *tel que $\varphi(x_0) = Y_0$. On dit que φ est stable au sens de Lyapounov si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout solution ψ du système* (3.1) *vérifiant $\|\varphi(x_0) - \psi(x_0)\| < \delta$, on a $\|\varphi(x) - \psi(x)\| < \varepsilon$ pour tout $x > x_0$.*
Si de plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \|\varphi(x) - \psi(x)\| = 0$, on dit que φ est asymptotiquement stable.

Le théorème suivant montre que l'étude de stabilité du système (3.1) se ramène à l'étude de stabilité du système :

$$Y' = F(x, Y + \varphi) - F(x, \varphi) \tag{3.5}$$

Il est clair que le système (3.5) admet $y \equiv 0$ comme une solution, dite solution triviale.

Théorème 3.2 [5] *Pour qu'une solution φ du système* (3.1) *soit stable au sens de Lyapounov* (*asymptotiquement stable*) *il faut et il suffit que la solution triviale du système* (3.5) *le soit.*

Cette solution triviale est appelée point d'équilibre (stationnaire, de repos) du système (3.5).

Corollaire 3.1 *Une solution du système* (3.2) *est stable au sens de Lyapounov* (*asymptotiquement stable*) *si et seulement si la solution nulle du système homogène associe au* (3.2) *et le soit.*

Généralement :

Définition 3.7 *Un point $y^* \in \Omega$ est un point d'équilibre du système* (3.1) *si pour tout $t \in I$ on a : $F(t, y^*) = 0$.*

Remarque 3.2 *La solution $Y = y^*$ est une solution du système* (3.1) (*dite stationnaire*)*, vérifiant la condition initiale $Y(x_0) = y^*$.*

Théorème 3.3 (Lyapounov) [5] *Supposons que le système* (3.1) *possède une solution triviale $Y^* \equiv 0$. De plus, il existe une fonction $v(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ vérifiant les conditions suivantes :*

1. *$v(y_1, y_2, \cdots, y_n) \geq 0$ et $v = 0$ seulement pour $(0, 0, \cdots, 0)$*
2. *$Dv = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_i} F_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) \leq 0, \forall x \geq x_0$.*

Alors, le point d'équilibre Y^* est stable au sens de Lyapounov.
Si en plus, il existe $\beta < 0$ tel que pour tout $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ vérifiant $y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2 \geq \delta$ on ait : $Dv \leq \beta < 0$ pour tout $x \geq x_0$, alors le point d'équilibre Y^* est asymptotiquement stable.

Remarque 3.3 *La fonction v est appelée fonction de Lyapounov.*

Exemple 3.1 [5] *Etudier la stabilité du système :*

$$\begin{cases} y_1' &= -y_1^5 - y_2 \\ y_2' &= y_1 - y_2^3 \end{cases}$$

Supposons maintenant que f est autonome, i.e $F(x, y) = f(y)$ (ne dépend de x). On ale théorème suivant :

Théorème 3.4 [4] *Soit φ du système $Y'(x) = f(Y(x))$.*
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = y^* \in \Omega$, alors y^* est un point d'équilibre de ce système.

Dans le cas du système linéaire, on peut étudier seulement la stabilité du solution nulle.