Universitée de Msila

Faculté de Mathématiques et informatique — Département de Mathématiques

Master Analyse fonctionnelle — 1ère année S_1 (2021 - 2022)

Equations différentielles ordinaires (Série de TD N° 01)

Exercice 1 : *Soit l'équation différentielle linéaire d'ordre* 1 *:* $y' = a(x)y + b(x) \; \ldots (\mathcal{L})$ *avec la condition initiale* $y(x_0) = y_0 \; \ldots (\mathcal{CL})$.

1. *Donner une condition suffisante sur les fonctions* a, b *pour que l'èquation* $(\mathcal{L})$, *avec la condition initiale* $(\mathcal{CL})$ *admet une solution unique.*
2. *On multiple* $(\mathcal{L})$ *par une fonctin dérivable* $\mu(x)$. *Donner les conditions sur* μ, *surlequel on peut écrire l'équation* $(\mathcal{L})$ *sous la forme* $F'(x) = g(x)$.
3. *Etudier l'équation* $y' = xy + y$, *avec la condition* $y(0) = -1$.

Exercice 2 : *Donner les* 03 *approximations successives premiers des problèmes suivants :*

$(1) \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} y' = \cos y \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} y' = xy \\ y(1) = 1 \end{cases}$

Exercice 3 : *Montrer que ces fonctions sont lipschitziennes par rapport au second variable :*

(1)	$f(x,y) = x^2 - y^2$	$R =]-1,1[\times]0,3[$
(2)	$f(x,y) = p(x)\cos y + q(x)\sin y (p, q \; continues)$	$R =]0,3[\times]1,7[$
(3)	$f(x,y) = e^x + y^2$	$R =]-a,a[\times]-b,b[(a,b \in \mathbb{R})$
(4)	$f(x,y) = x\|y\|$	$R =]-5,0[\times]1,3[$

Exercice 4 : *Soit dans le rectangle* $R =]0,2[\times]-1,1[$ *l'équation* $y' = x + e^{-x} + e^{-y^2}$, *avec la condition initiale* $y(1) = 0$.

Montrer que ce problème admet une seule solution sur un rectangle R_0, *que l'on déterminera.*

Exercice 5 : *Soit l'équation de Riccati suivante :*

$$y' - y + y^2 = \alpha^2 x^2 + \alpha x + \alpha$$

1. *Supposons que l'équation admet une solution particulière de la forme* $y_1 = ax+b$. *Trouver* a *et* b.
2. *Endéduire la solution générale de l'équation.*
3. *Résoudre l'équation* $y' - y + y^2 = 4x^2 + 2x + 2$.

Exercice 6 : *Utiliser l'opérateur* D *pour résoudre les équations différentielle suivantes :*

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' - 6y' = x$
3. $y^{(3)} - 3y'' + 2y' = 0$
4. $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = e^x$