

Equations différentielles ordinaires (Série de TD N° 03)

Exercice 1 : Soient $A = (a_{ij})$ une matrice carré réelle $n \times n$.

1. Montrer que l'opérateur A est bien défini, i.e : $\forall A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) : \|A\| \leq \infty$.

2. Montrer que $\max_j \sum_i a_{ij}^2 \leq \|A\|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}^2$.

Exercice 2 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A est nilpotent.

2. Calculer e^A .

Exercice 3 : Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Trouver les valeurs propres de la matrice A .

2. Ecrire A dans la base propre.

3. Calculer e^A .

Exercice 5 : Etudier la stabilité des systèmes suivants :

$$\begin{cases} y_1' &= -y_1^5 - y_2 \\ y_2' &= y_1 - y_2^3 \end{cases}$$

Exercice 6 : Etudier la stabilité du système :

$$\begin{cases} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1' &= -y_1 + 5y_2 \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} y_1' &= -y_1 + y_2 \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \end{cases}$$