Rappel du cours

1-Point matériel

Il s'agit d'un point géométrique dont la position est parfaitement déterminée par trois coordonnées (x, y, z) (dans l'espace à trois dimensions).

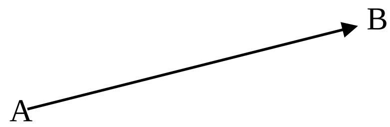
x = abscisse, y = ordonnée, z = côte.

2- Vecteur

Un vecteur $(\overrightarrow{AB})$ est représenté par un segment orienté (une flèche) ayant pour extrémités un point de départ (A) et un point d'arrivée (B).

Un vecteur est définit par:

- une longueur (une norme ou un module): $\|\overrightarrow{AB}\|$,
- un support: la droite (AB),
- un sens (une orientation) : de A vers B.



On peut définir un vecteur $\overrightarrow{AB}$ comme suit :

$$\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|\vec{u}$$

$\vec{u}$ est le vecteur unitaire qui a la norme 1 ($\|\vec{u}\| = 1$) et le même sens que $\overrightarrow{AB}$,

où :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\,\vec{\imath} + (y_B - y_A)\,\vec{\jmath} + (z_B - z_A)\,\vec{k}$$

$$\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

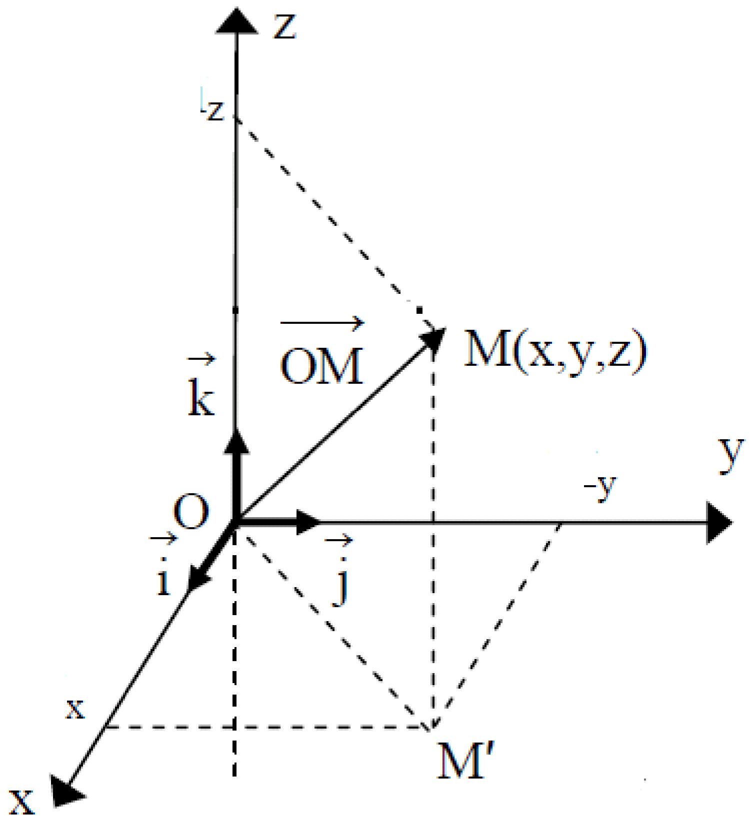
2.1-Représentation d'un point dans le système de coordonnées cartésiennes

Dans ce repère orthonormé direct un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) . Le vecteur position M s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

où

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

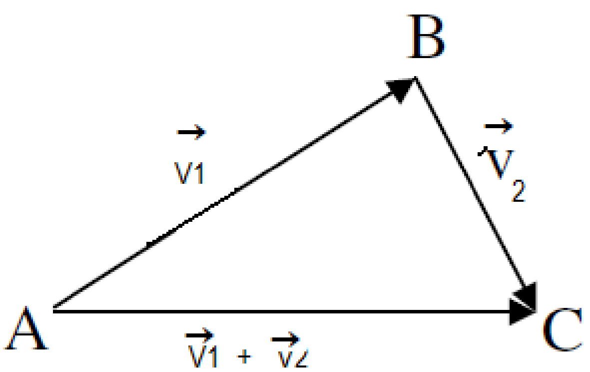


2.2- Opération sur les vecteurs

2.2.1- Addition de deux vecteurs

Soit les deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}(x_1, y_1, z_1)$ *et* $\overrightarrow{V_2}(x_2, y_2, z_2)$.La somme de deux vecteurs est un vecteur :

$$\vec{V} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath} + (z_1 + z_2)\vec{k}$$

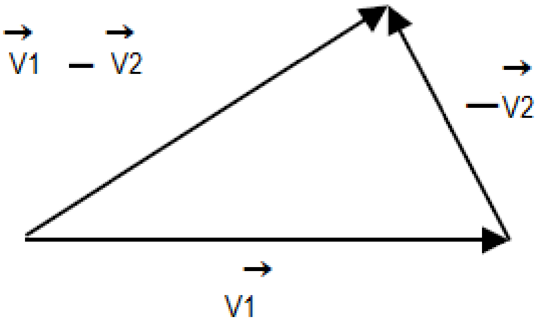


2.2.2- Soustraction

Pour soustraire un vecteur d'un autre, il s'agit d'additionner son opposé.

$$\vec{V} = \vec{V_1} - \vec{V_2} = \vec{V_1} + (-\vec{V_2})$$

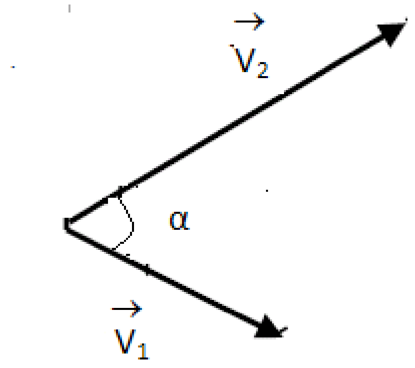
$$\vec{V} = (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}$$



2.2.3- Produit scalaire

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V_1}\, et\, \vec{V_2}$ (noté $\vec{V_1}.\vec{V_2}$) est défini par deux manière comme:

a-Expression géométrique



$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = V_1 V_2 \cos\theta$$

θ est l'angle entre les deux vecteurs.

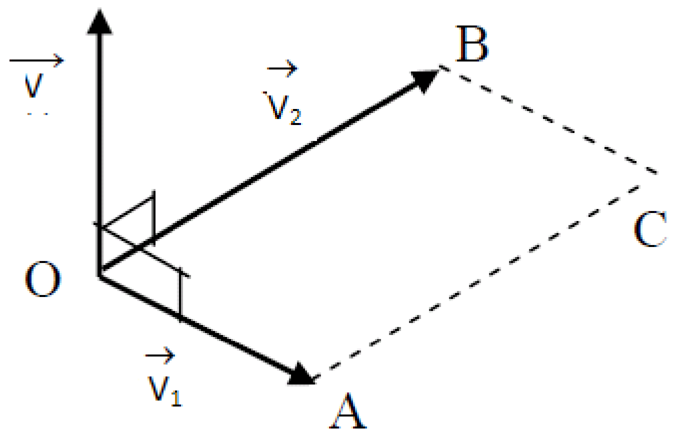
b-Expression analytique

$$\vec{V_1}.\vec{V_2} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$$

2.2.4- Le produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{V_1}\ et\ \overrightarrow{V_2}$ (noté $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$)) est est défini par deux manière comme suit :

a-Expression géométrique



$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \vec{V} = (V_1 V_2 \sin\theta).\vec{v}$$

θ est l'angle entre les deux vecteurs et $\vec{v}$ est un vecteur unitaire indiquant la direction de $\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2}$, qui est perpendiculaire au plan formé par $\overrightarrow{V_1}\ et\ \overrightarrow{V_2}$ de sens tel que le trièdre $(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}, \vec{v})$ soit direct.

b-Expression analytique

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_1} \wedge \overrightarrow{V_2} = (\ y_1.z_2 - z_1.y_2)\vec{\imath} + (\ z_1.x_2 - x_1.z_2)\vec{\jmath} + (\ x_1.y_2 - y_1.x_2)\vec{k}$$

2.2.5- Le produit mixte

Un produit mixte de trois vecteurs $\left(\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\ et\ \vec{V}(x,y,z)\right)$ est un scalaire qui est défini par :

$$\overrightarrow{V_1}.\left(\overrightarrow{V_2} \wedge \vec{V}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_2 \\ x_2 & x_2 & z_2 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{V_1}.\left(\overrightarrow{V_2}\wedge\vec{V}\right) = x_1(x_2z - yz_2) - y_1(x_2z - xz_2) + z_2(x_2y - xx_2)$$

Ce produit mixte représente le volume d'un parallélépipède de côtés $\overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2}\ et\ \vec{V}$.

On a également : $\overrightarrow{V_1}.(\overrightarrow{V_2}\wedge\vec{V}) = \overrightarrow{V_2}.(\vec{V}\wedge\overrightarrow{V_1}) = \ \vec{V}.(\overrightarrow{V_1}\ \ \wedge\overrightarrow{V_2})$ (permutation circulaire).

2.2.6- Dérivée d'un vecteur

Soit: $\vec{V}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$ une fonction vectorielle de t, alors la dérivée de $\vec{V}(t)$ par rapport à t est défini par:

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

Ainsi, si $\lambda(t)$ est une fonction scalaire et si $\overrightarrow{V_1}(t)$ et $\overrightarrow{V_2}(t)$ sont des vecteurs, on a alors:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\lambda\overrightarrow{V_1}) = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_1} + \lambda\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_1}}{\mathrm{dt}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\overrightarrow{V_1}.\overrightarrow{V_2}) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_1}}{\mathrm{dt}}\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_2}}{\mathrm{dt}}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\overrightarrow{V_1}\wedge\overrightarrow{V_2}) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_1}}{\mathrm{dt}}\wedge\overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_1}\wedge\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{V_2}}{\mathrm{dt}}$$

2.2.7- Intégrale d'un vecteur

Soit le vecteur $\vec{\mathrm{V}}(\mathrm{t}) = \mathrm{x}(\mathrm{t})\vec{\mathrm{\imath}} + \mathrm{y}(\mathrm{t})\vec{\mathrm{\jmath}} + \mathrm{z}(\mathrm{t})\vec{\mathrm{k}}$ qui est une fonction vectorielle de t. On défini une intégrale de $\vec{V}(t)$ par :

$$\int\vec{V}(t)dt = \vec{\imath}\int x(t)dt + \vec{\jmath}\int y(t)dt + \vec{k}\int z(t)dt$$

3-Exercices résolus

3.1-Exercice 01

Soit les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$$\vec{A} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k} \qquad ; \qquad \vec{B} = \overrightarrow{2\imath} - \vec{\jmath} + \vec{k}$$

1- Représenter les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans le repère cartésien :

2- Calculer leurs modules.

3- Trouver le vecteur unitaire pour chaque vecteur.

4- Calculer les cosinus directeurs pour chaque vecteur.

5- Calculer : $\vec{V} = \vec{A}+\vec{B} \quad et \quad \overrightarrow{W} = \vec{A} - \vec{B}$.

6- Calculer: $\overrightarrow{A}.\vec{B} et\ \vec{A}\ \wedge \vec{B}$.

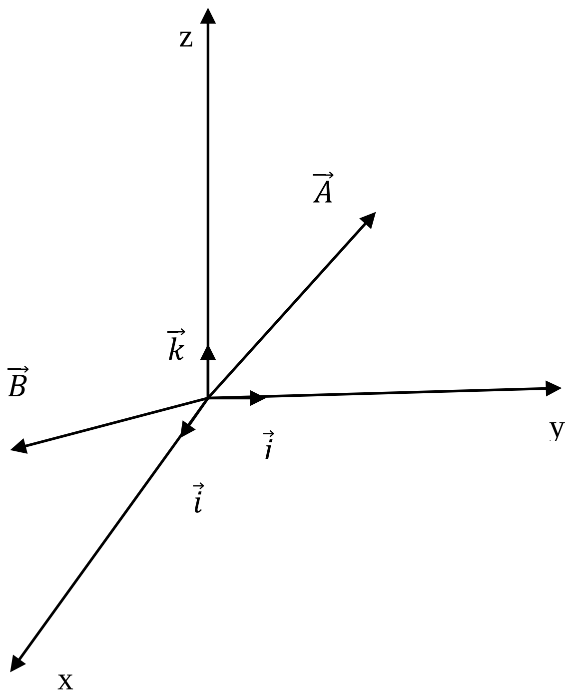
7- Trouver l'angle aigu entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

8- Soit le vecteur $\vec{C} = x\vec{\imath} + \vec{\jmath} + z\vec{k}$; trouver x et z pour chaque cas :

a- $\vec{C}\ parall$èle à $\vec{A}$, b- $\vec{C}\ perpendiculaire$ à $(\vec{A}\ et\ \vec{B})$ en même temps.

3.1.1-Corrigé

1- Représentation des vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\vec{B}$ dans le repère cartésien



2-Les modules de $\overrightarrow{A}$ et $\vec{B}$:

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$$

$$\|\vec{A}\| = \sqrt{(-2)^2 + (1)^2 + (3)^2} = \sqrt{14}$$

$\|\vec{B}\| = \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2}$

$\|\vec{A}\| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$

3- Les vecteurs unitaires pour chaque vecteur :

On a : $\overrightarrow{A} = \|\vec{A}\|\overrightarrow{u}_A \Rightarrow \overrightarrow{u}_A = \frac{\overrightarrow{A}}{\|\vec{A}\|} = -\frac{2}{\sqrt{14}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{14}}\vec{\jmath} + \frac{3}{\sqrt{14}}\vec{k}$

$$\overrightarrow{B} = \|\vec{B}\|\overrightarrow{u}_B \Rightarrow \overrightarrow{u}_B = \frac{\overrightarrow{B}}{\|\vec{B}\|} = \frac{2}{\sqrt{6}}\vec{\mathrm{i}} - \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\mathrm{j}} + \frac{1}{\sqrt{6}}\vec{\mathrm{k}}$$

4- les cosinus directeurs pour chaque vecteur :

On a :

$$\begin{cases} \vec{\imath}.\overrightarrow{A} = \|\vec{A}\|.cos\alpha_A, \quad \alpha_A = \widehat{(\vec{\imath}, \overrightarrow{A})} \\ \vec{\jmath}.\overrightarrow{A} = \|\vec{A}\|.cos\beta_A, \quad \beta_A = \widehat{(\vec{\jmath}, \overrightarrow{A})} \\ \vec{k}.\overrightarrow{A} = \|\vec{A}\|.cos\delta_A, \quad \gamma_A = \widehat{(\vec{k}, \overrightarrow{A})} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} cos\alpha_A = \frac{\vec{\imath}.\overrightarrow{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{x_A}{\|\vec{A}\|} = -\frac{2}{\sqrt{14}} \\ cos\beta_A = \frac{\vec{\jmath}.\overrightarrow{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{y_A}{\|\vec{A}\|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \\ cos\delta_A = \frac{\vec{k}.\overrightarrow{A}}{\|\vec{A}\|} = \frac{z_A}{\|\vec{A}\|} = \frac{3}{\sqrt{14}} \end{cases}$$

Même chose pour $\vec{B}$:

$$\begin{cases} cos\alpha_B = \frac{x_B}{\|\vec{B}\|} = \frac{2}{\sqrt{6}} \\ cos\beta_B = \frac{y_B}{\|\vec{B}\|} = -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ cos\delta_B = \frac{z_B}{\|\vec{B}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}$$

5- Calcule de :

$\vec{V} = \vec{A} + \vec{B}$

$\Rightarrow \vec{V} = (x_A + x_B)\vec{\mathrm{i}} + (y_A + y_B)\,\vec{\jmath} + (z_A + z_B)\,\vec{k}$

$\vec{V} = (-2 + 2)\vec{\mathrm{i}} + (1 - 1)\vec{\jmath} + (3 + 1)\vec{k} = 4\vec{k}$

$\overrightarrow{W} = \vec{A} - \vec{B}$

$\Rightarrow \overrightarrow{W} = (x_A - x_B)\vec{\imath} + (y_A - y_B)\,\vec{\jmath} + (z_A - z_B)\,\vec{k}$

$\overrightarrow{W} = (-2-2)\vec{\imath} + (1+1)\vec{\jmath} + (3-1)\vec{k} = -4\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

6- Calcul de:

$\vec{A}\vec{B} = x_A.x_B + y_A.y_B + z_A.z_B$

$\Rightarrow \vec{A}\vec{B} = (-2)(2) + (1)(-1) + (1)(3) = -2$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$\Rightarrow \vec{A} \wedge \vec{B} = 4\vec{\imath} + 8\vec{\jmath}$

7- L'angle aigu entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

On a : $\vec{A}\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}})$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = \frac{\vec{A}\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$$

$$\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = \frac{-2}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{21}}$$

$\Rightarrow (\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = 102.60°$

8- Soit $\vec{C} = x\vec{\imath} + \vec{\jmath} + z\vec{k}$, calcul de x et z pour que :

a- $\vec{C}$ $parall$èle à $\vec{A}$: dans ce cas on a :

$\vec{C} \wedge \vec{A} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{C} \wedge \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ x & 1 & z \\ -2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$\Rightarrow (3-z)\vec{\imath} - (3x+2z)\vec{\jmath} + (x+2)\vec{k} = \vec{0}$

$$\begin{cases} 3 - z = 0 \\ -(3x+2z) = 0 \\ (x+2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Donc $\vec{C} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 3\vec{k}$.

b- $\vec{C}$ $perpendiculaire$ à ($\vec{A}$ et $\vec{B}$) en même temps : on a :

$$\begin{cases} \vec{C}.\vec{A} = 0 \\ \vec{C}.\vec{B} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x + 1 + 3z = 0 \\ 2x - 1 + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{C} = \frac{1}{2}\vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

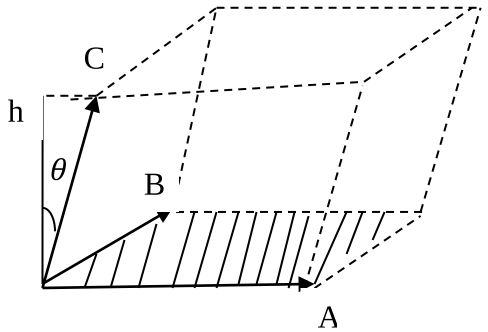
3.2-Exercice 02

Trouver l'expression du volume d'un parallélépipède de côtés $\vec{A}, \vec{B}$ et $\vec{C}$.

$$\vec{A} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} \qquad , \qquad \vec{B} = \overrightarrow{2\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k} \qquad , \qquad \vec{C} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

3.2.1-Corrigé

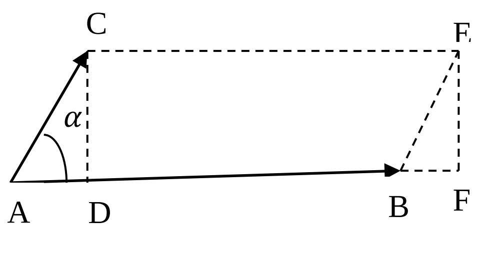
On a : $\vec{A} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\vec{B} = \overrightarrow{2\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$, $\vec{C} = \vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$,



$V = S.h, \qquad h = Ccos\theta$

$S =?$

On prend un parallélogramme quelconque



$S(ACEB) = S(CDFE)$

$\qquad = longueur \times largeur$

$\qquad = DF.FE = AB.DC$

$\Rightarrow S = AB.AC.sin\alpha$

$\Rightarrow S = \|\overrightarrow{AB}\|.\|\overrightarrow{AC}\|.\sin(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}})$

$\Rightarrow S = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

Donc

$V = S.h = \|\vec{A} \wedge \vec{B}\|.\|\vec{C}\|.cos\theta$

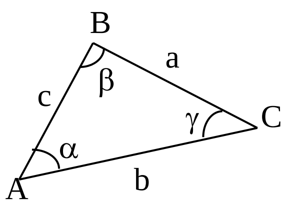
$\Rightarrow V = |(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C}|$

On a : $(\vec{A} \wedge \vec{B}).\vec{C} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 6 = -5$

$\Rightarrow V = 5\ unités$

3.3-Exercice 03

Démontrer en utilisant les propriétés du produit vectoriel que dans un triangle ABC (voir la figure) on a : $\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$



3.3.1- Corrigé

Dans un triangle ABC, on a :

$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\|$

$\begin{cases} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = c.b.sin\alpha \\ \|\overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{BC}\| = c.a.sin\beta \\ \|\overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB}\| = a.b.sin\gamma \end{cases}$

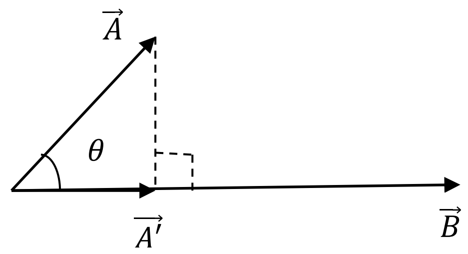
$\Rightarrow c.b.sin\alpha = c.a.sin\beta = a.b.sin\gamma$

$\Rightarrow \frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma}$

3.4-Exercice 04

Soient $\vec{A}$ et $\vec{B}$ deux vecteurs non nuls. Montrer que le vecteur de projection de $\vec{A}$ sur $\vec{B}$ s'écrit :

$$\text{proj}\vec{A}_{/\vec{B}} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2}\ \vec{B}$$



3.4.1-Corrigé

proj$\vec{A}_{/\vec{B}} = \vec{A'} = \left\|\vec{A'}\right\| \vec{u}_B$

où $\vec{u}_B = \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$: est le vecteur unitaire sur $\vec{B}$.

On a :

$\left\|\vec{A'}\right\| = \|\vec{A}\|. \cos\theta$

$\Rightarrow \vec{A'} = \|\vec{A}\|. \frac{\vec{B}}{\|\vec{B}\|} . \cos\theta$

D'un autre coté, on a :

$\vec{A}\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos\theta$

$\Rightarrow \|\vec{A}\|\cos\theta = \dfrac{\vec{A}\vec{B}}{\|\vec{B}\|}$

$\Rightarrow \vec{A'} = \dfrac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2} \vec{B}$

$\Rightarrow$ proj$\vec{A}_{/\vec{B}} = \frac{\vec{A}.\vec{B}}{\|\vec{B}\|^2} \vec{B}$.

3.5-Exercice 05

Soit les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$: $\vec{A} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$; $\vec{B} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$

1- Calculer:.$\vec{A}\vec{B}$ *et* $\vec{A} \wedge \vec{B}$.

2- Trouver l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

3-Soit : $\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$. Vérifier si $\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\| = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$.

3.5.1-Corrigé

Soit : $\vec{A} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$; $\vec{B} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} - 3\vec{k}$

1-Calcul de :

$\vec{A}\vec{B} = 2(-1) + 1(1) + 1(-3) = -4$

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -4\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

2- l'angle entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

On a : $\vec{A}\vec{B} = \|\vec{A}\|\|\vec{B}\|\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}})$

$$\Rightarrow \cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = \frac{\vec{A}\vec{B}}{\|\vec{A}\|\|\vec{B}\|}$$

$$\cos(\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = \frac{-4}{\sqrt{6}\sqrt{11}} = -\frac{4}{\sqrt{66}}$$

$$\Rightarrow (\widehat{\vec{A},\vec{B}}) = 119.50°$$

3-Soit : $\vec{V} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$;

on vérifier si $\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\| = \frac{d\|\vec{V}\|}{dt}$?

On a :

$$\frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

$$= \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

D'une autre coté, on a :

$$\frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right]$$

$$= \frac{2x\dot{x}+2y\dot{y}+2z\dot{z}}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x\dot{x}+y\dot{y}+z\dot{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$= \frac{\vec{V}.\frac{d\vec{V}}{dt}}{\|\vec{V}\|} = \frac{\|\vec{V}\|.\left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|.cos\alpha}{\|\vec{V}\|}$$

$$\Rightarrow \frac{d\|\vec{V}\|}{dt} = \left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\|.cos\alpha \neq \left\|\frac{d\vec{V}}{dt}\right\| .$$

3.6-Exercice 06

1- Soit $\vec{A} = 3t\vec{\imath} - (t^2 + t)\vec{\jmath} + (t^3 - 2t^2)\vec{k}$

Calculer $\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{A}(t)}{dt^2}$, appliquer pour $t = 2$.

2- Soit $\vec{B} = e^{-wt}\vec{\imath} + sinwt\vec{\jmath} + coswt\vec{k}$ (w est constant).

Calculer $\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{B}(t)}{dt^2}$.

3.6.1-Corrigé

Soit $\vec{A} = 3t\vec{\imath} - (t^2 + t)\vec{\jmath} + (t^3 - 2t^2)\vec{k}$,

1- calcul de $\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$,

on a:

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy(t)}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{A}(t)}{dt} = 3\vec{\imath} - (2t + 1)\vec{\jmath} + (3t^2 - 4t)\vec{k}$$

Pour $t = 2$, on a :

$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = 3\vec{\imath} - 5\vec{\jmath} + 4\vec{k}.$

$$\frac{d^2\vec{A}(t)}{dt^2} = -2\vec{\jmath} + (6t - 4)\vec{k}$$

Pour $t = 2$, on a :

$\frac{d^2\vec{A}(t)}{dt^2} = -2\vec{\jmath} + 8\vec{k}.$

2-Soit $\vec{B} = e^{-wt}\vec{\imath} + sinwt\vec{\jmath} + coswt\vec{k}$,

-calcul de $\frac{d\vec{B}(t)}{dt}$: on a :

$$\frac{d\vec{B}(t)}{dt} = -we^{-wt}\vec{\imath} + wcoswt\vec{\jmath} - wsinwt\vec{k}$$

$\frac{d^2\vec{B}(t)}{dt^2} = w^2e^{-wt}\vec{\imath} - w^2sinwt\vec{\jmath} - w^2coswt\vec{k}$

$$\Rightarrow \frac{d^2\vec{B}(t)}{dt^2} = w^2(e^{-wt}\vec{\imath} - sinwt\vec{\jmath} - coswt\vec{k})$$

3.7-Exercice 07

Soit un mol d'un gaz qui vérifie l'équation d'état de Van der Waals:

$$\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - n\,b) = nRT$$

P : pression, V : volume, T : température du gaz, R : constante des gaz, a et b sont des réels positifs.

1- Calculer $(\frac{\partial P}{\partial V})_T$ et $(\frac{\partial T}{\partial V})_P$.

2- En admettant que $(\frac{\partial x}{\partial y})_z = \frac{1}{(\frac{\partial y}{\partial x})_z}$, déterminer la différentielle totale dV de V.

3- T et P sont mesurés avec des incertitudes $\triangle T$ et $\triangle P$. Déduire $\triangle V$.

3.7.1-Corrigé

1-On a :

$\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - n\,b) = nRT$,

$$\Rightarrow P = \frac{nRT}{V - n\,b} - a\frac{n^2}{V^2}$$

$$(\frac{\partial P}{\partial V})_T = \frac{-nRT}{(V - n\,b)^2} + 2a\frac{n^2}{V^3}$$

On a :

$$T = \frac{1}{nR}\left(P + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - n\,b)$$

$$\Rightarrow (\frac{\partial T}{\partial V})_P = \frac{1}{nR}\left[\left(-2a\frac{n^2}{V^3}\right)(V - n\,b) + P + a\frac{n^2}{V^2}\right]$$

$$= \frac{1}{nR}\left(-a\frac{n^2}{V^2} + 2ab\frac{n^3}{V^3} + p\right)$$

2-calcul de dV :

On a : $V = f(T, P)$

$$dV = (\frac{\partial V}{\partial T})_P dT + (\frac{\partial V}{\partial P})_T dP$$

$$dV = \frac{1}{(\frac{\partial T}{\partial V})_P} dT + \frac{1}{(\frac{\partial P}{\partial V})_T} dP$$

$$\Rightarrow dV = \frac{nR}{\left(-a\frac{n^2}{V^2} + 2ab\frac{n^3}{V^3} + p\right)} dT + \frac{1}{\frac{-nRT}{(V - n\,b)^2} + 2a\frac{n^2}{V^3}} dP$$

3-$\triangle V = \left|\frac{nR}{\left(-a\frac{n^2}{V^2}+2ab\frac{n^3}{V^3}+p\right)}\right| \triangle T + \left|\frac{1}{\frac{-nRT}{(V-n\,b)^2}+2a\frac{n^2}{V^3}}\right| \triangle P.$

4-Exercices supplémentaires sans solution

4.1-Exercice 01

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ a six unités de long et fait un angle de $+36°$ avec l'axe des X positifs ; $\vec{B}$ a 7 unités de long et dans la direction de l'axe X négatifs. Trouver : a) la somme des deux vecteurs ; b) la différence des deux vecteurs.

4.2-Exercice 02

Trouver les composantes d'un vecteur qui a 13 unités de long et fait un angle θ de $22.6°$ avec l'axe des Z, et dont la projection sur le plan XOY fait un angle ϕ de $37°$ avec l'axe des X positifs. Trouve ainsi les angles avec les axes OX et OY.

4.3-Exercice 03

Trouver l'aire d'un parallélogramme déterminé par les deux vecteurs : $\vec{A} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$ et $\vec{B} = -\vec{\imath} + \vec{\jmath} + 2\vec{k}$. Trouver l'angle entre les deux vecteurs.

4.4-Exercice 04

soit $\vec{A}(t) = \left(\frac{1}{2}t^2 + t + 1\right)\vec{\imath} - sinwt\vec{\jmath} + e^{-wt}\vec{k}, w = C$st.

Calculer $\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$ et $\frac{d^2\vec{A}(t)}{dt^2}$, appliquer pour $t = 1$. Calculer $\int_0^t A(t')dt'$.

4.5-Exercice 05

On donne les vecteurs suivants :

$\overrightarrow{r_1} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\overrightarrow{r_2} = 3\vec{\imath} - 2\,\vec{\jmath} + 2\vec{k}$, $\overrightarrow{r_3} = 4\vec{\imath} - 3\,\vec{\jmath} + 3\vec{k}$

1- Calculer leurs modules.

2-Calculer les composantes et les modules des vecteurs :

$\vec{A} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3}$, $\vec{B} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_3}$

3- Déterminer le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{C} = \overrightarrow{r_1} + 2\,\overrightarrow{r_2}$

4- Calculer les produit scalaire et vectoriel des vecteurs $\overrightarrow{r_1}$ et $\overrightarrow{r_2}$.

5- Calculer les produits $\vec{A}.(\vec{B} \wedge \vec{C})$ et $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$.