# Rappel du cours

## 1- Introduction

La cinématique est l'étude des mouvements sans se préoccuper des causes responsables de ces mouvements (comme les forces par exemple, etc.). Le mouvement ne peut se définir que par rapport à un référentiel (ou un repère).

## 2- caractéristiques du mouvement

En cinématique, les deux notions fondamentales sont l'espace et le temps car le mouvement s'effectue dans l'espace en fonction du temps. Les grandeurs essentielles sont :

- vecteur position ($\overrightarrow{OM}$), - vecteur vitesse ($\vec{V}$) ,- vecteur accélération $\vec{\gamma}$ .

### 2.1- Vecteur position

La position d'un objet est donnée par son déplacement par rapport à $O$ (l'origine).

#### a-Trajectoire

La trajectoire d'un mobile est l'ensemble des positions successives occupées par ce mobile au cours du temps.

### 2.2- Vecteur vitesse

La vitesse est une grandeur vectorielle qui représente le rapport de la distance parcourue au temps. Le sens de la vitesse est le même sens de déplacement.

#### a-Vitesse moyenne

Supposons qu'à l'instant $t_1$ l'objet est à la position $M_1$ et à un instant ultérieur $t_2$, il est en $M_2$. La vitesse moyenne entre $M_1$ et $M_2$ est définie par :

$$\vec{V}_{moy} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\overrightarrow{OM}}{\Delta t}$$

#### b-Vitesse instantanée

La vitesse instantanée est définie à un instant précis via la notion de la dérivation comme suit :

$$\vec{V} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{dt}$$

### 2.3- Vecteur d'accélération

L'accélération instantanée est la variation du vecteur vitesse par rapport au temps. Elle est définie comme suit :

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

## 3- Mouvements dans différents systèmes de coordonnées et bases

### 3.1- Repère cartésien

Chaque point $M$ est repéré par ses coordonnées $(x, y, z)$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Le vecteur de position est définit à partir du point origine $O$ et les coordonnées $(x, y, z)$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$
$$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

-Le vecteur vitesse : $\vec{V} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{\mathrm{d}x}{dt}\vec{\imath} + \frac{\mathrm{d}y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{\mathrm{d}z}{dt}\vec{k} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$

$$\|\vec{V}\| = V = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

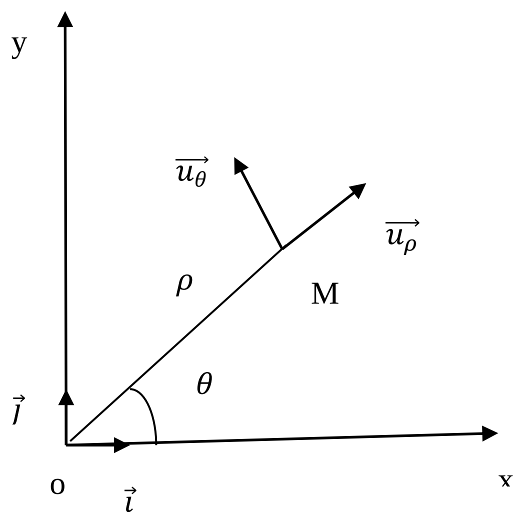
-Le vecteur accélération: $\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{dt} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$

$$\|\vec{\gamma}\| = \gamma = \left(\sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}\right)$$

### 3.2- Repère polaire

Le repère polaire est orthonormé, il est formé de deux vecteurs unitaires $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$. Ces deux vecteurs sont variables avec le temps.
Le vecteur de position est définit à partir du point origine $O$ et les coordonnées $(\rho, \theta)$:

$$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$$
$$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \rho$$




Dans le repère cartésien : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$
Donc, on a :

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}$$

$$\vec{u}_\rho = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}$$

$$\vec{u}_\theta = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}$$

-Le vecteur vitesse : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$$\|\vec{V}\| = V = \left(\sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2}\right)$$

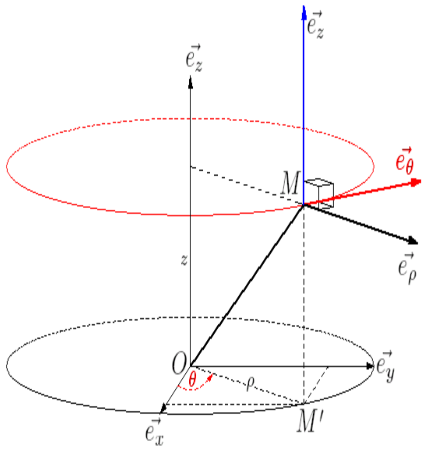
-Le vecteur accélération: $\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt}$

$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\theta}\ + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \gamma = \left(\sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\,\dot{\theta}\ + \rho\ddot{\theta})^2}\right)$$

**3.3- Repère cylindrique**

Le repère cylindrique est orthonormé, il est formé de trois vecteurs unitaires $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_{\theta,}\vec{k})$, dont les deux vecteurs $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$ sont variables avec le temps tandis que $\vec{k}$ est fixe.




Chaque point $M$ est repéré par ses coordonnées $(\rho, \theta, z)$: dans la base $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_{\theta,}\vec{k})$ (figure).
Le vecteur de position est définit à partir du point origine $O$ et les coordonnées , $(\rho, \theta, z)$:

$$\overrightarrow{OM} == \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$$

$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = \sqrt{\rho^2 + z^2}$
Dans le repère cartésien : $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$
Donc, on a :

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

- Le vecteur vitesse : $\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k}$

$$\|\vec{V}\| = V = \left(\sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}\right)$$

-Le vecteur accélération: $\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{dt}$

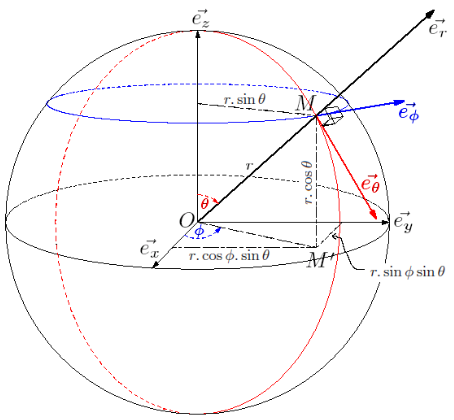
$$\vec{\gamma} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\,\dot{\theta} \;+ \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \gamma = \left(\sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\,\dot{\theta} \;+ \rho\ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^2}\right)$$

### 3.4- Repère sphérique

Le repère sphérique est orthonormé, il est formé de trois vecteurs unitaires $(\vec{u}_r, \vec{u}_{\theta,}\vec{u}_\varphi)$. Ces trois vecteurs unitaires sont variables avec le temps.

Chaque point $M$ est repéré par ses coordonnées $(r, \theta, \varphi)$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_{\theta,}\vec{u}_\varphi)$ (figure).




$$\theta = (oz, oM)$$
$$\varphi = (ox, oM')$$

Le vecteur de position est définit à partir du point origine $O$ et les coordonnées $(r, \varphi, \theta)$:

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

$$\overrightarrow{OM}\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \theta \end{pmatrix} \quad (0 \;\leq \varphi \leq 2\pi) \;,(0 \;\leq\; \theta \leq \pi)$$

$\|\overrightarrow{OM}\| = OM = r$

$$\overrightarrow{OM} = r\sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{\jmath} \;+\; r\cos\theta\vec{k}$$

Dans le repère cartésien : $\overrightarrow{OM} = \; x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

En déduit que :

$$\begin{cases} x = r\sin\theta cos\varphi \\ y = \sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = r\sin\theta cos\varphi\vec{\imath} + r\sin\theta\sin\varphi\vec{\jmath} \;+\; r\cos\theta\vec{k}$$

$$\overrightarrow{OM} = r(\sin\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\vec{\jmath} + \cos\theta\vec{k}) = r\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{u_r} = \sin\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \sin\theta\sin\varphi\vec{\jmath} + \cos\theta\vec{k};$$

$\vec{u}_r$ est le vecteur unitaire radial.

$$\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta} = \vec{u}_\theta = \cos\theta\cos\varphi\vec{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\vec{\jmath} - \sin\theta\vec{k}$$

$\vec{u}_\theta$ *est* le vecteur orthoradial.

$$\vec{u}_\varphi = \frac{1}{\cos\theta}\frac{\partial\vec{u}_\theta}{\partial\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\vec{u}_r}{\partial\varphi} = -\sin\varphi\vec{\imath} + \cos\varphi\vec{\jmath}$$

.

-Le vecteur vitesse : $\vec{V} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{dt}$

$$\vec{V} = \dot{r}\vec{u}_r + \mathrm{r}(\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{u_\varphi})$$

$$\|\vec{V}\| = V = \left(\sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2(\sin\theta)^2}\right)$$

-Le vecteur accélération: $\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{dt}$

$$\vec{\gamma} = \left(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2(\sin\theta)^2 - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta\right)\overrightarrow{u_\varphi}$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \gamma = \left(\sqrt{{\gamma_r}^2 + {\gamma_\theta}^2 + {\gamma_\varphi}^2}\right)$$

avec $\gamma_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2(\sin\theta)^2 - r\dot{\theta}^2, \gamma_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta, \gamma_\varphi = 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta + r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\varphi}\cos\theta$

**3.5-Repère intrinsèque (repère de Frenet)**

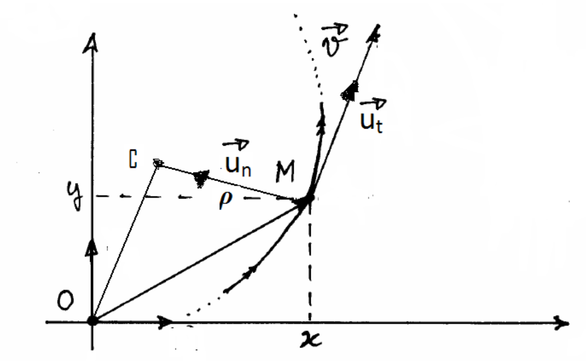
Soit un point matériel $M$ en mouvement dans le plan $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$. Sa trajectoire est une courbe orienté dans le sens du mouvement. On définit :
$\overrightarrow{u_T}$ : le vecteur unitaire tangent à la courbe et orienté dans le sens du mouvement.
$\overrightarrow{u_N}$ : le vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{u_T}$ et dirigé selon la concavité de la trajectoire.

## a-Abscisse curviligne

Dans ce repère, on définit l'abscisse curviligne $S$ du point $M$ de long de la trajectoire comme étant égal à la longueur de l'arc $\widehat{MM'}$. Notant que :
$\overrightarrow{u_N} = \rho\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_T}}{ds}$, $\Re$ est le rayon de courbure.

-Le vecteur vitesse:

$$\vec{V} = V\,\overrightarrow{u_T}, \qquad V = \frac{\mathrm{d}s}{dt}$$




-Le vecteur accélération :

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}\vec{V}}{dt} = \frac{\mathrm{d}V}{dt}\vec{u}_T + \mathrm{V}\frac{d\vec{u}_T}{dt}$$

$$\vec{\gamma} = \frac{\mathrm{d}V}{dt}\vec{u}_T + \frac{V^2}{\rho}\vec{u}_N$$

$$\vec{\gamma} = \gamma_T\vec{u}_T + \gamma_N\vec{u}_N$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \gamma_T = \frac{\mathrm{d}V}{dt} \text{ ; accélération tangentielle} \\ \gamma_N = \frac{V^2}{\rho} \text{; accélération normale} \end{cases}$$

$$\|\vec{\gamma}\| = \gamma = \sqrt{{\gamma_T}^2 + {\gamma_N}^2}$$

# 4-Exercices résolus

## 4.1-Exercice 01

1-Trouver les coordonnées cartésiennes $(x, y)$ du point $M(3, \frac{\pi}{3})$ donné en coordonnées polaires.

2-Trouver les coordonnées polaires $(\rho, \theta)$ du point $M(2,1)$ donné en coordonnées cartésiennes.

3-Trouver les coordonnées cylindriques $(\rho, \theta, z)$ et sphériques $(r, \theta, \varphi)$ du point $M(1,3,2)$ donné en coordonnées cartésiennes.

4-Trouver les coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ du point $M(3, \frac{\pi}{3}, 2)$ donné en coordonnées cylindriques.

5- Trouver les coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ du point $M(8, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ donné en coordonnées sphériques.

**4.1.1-Corrigé**

1-on a : $M(3, \frac{\pi}{3})$ donné en coordonnées polaires. On cherche les coordonnées cartésiennes $(x, y)$ .

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3cos\frac{\pi}{3} \\ y = 3sin\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

2-on a : $M(2,1)$ donné en coordonnées cartésiennes. On cherche les coordonnées polaires $(\rho, \theta)$.

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctan\frac{y}{x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{5} \\ \theta = arctan\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{5} \\ \theta = 26.56° \end{cases}$$

3-on a : $M(1,3,2)$ donné en coordonnées cartésiennes. On cherche :

a- les coordonnées cylindriques $(\rho, \theta, z)$ :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctan\frac{y}{x} \\ z = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{10} \\ \theta = arctan3 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{10} \\ \theta = 71.56° \\ z = 2 \end{cases}$$

b-Les coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$ :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = arctan\dfrac{y}{x} \\ \theta = arctan\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{14} \\ \varphi = arctan3 \\ \theta = arctan\dfrac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r = \sqrt{14} \\ \varphi = 71.56° \\ \theta = 57.68° \end{cases}$$

4- On a : $M(3, \frac{\pi}{3}, 2)$ donné en coordonnées cylindriques. On cherche les coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ :

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3cos\dfrac{\pi}{3} \\ y = 3sin\dfrac{\pi}{3} \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} \\ z = 2 \end{cases}$$

5- On a : $M(8, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3})$ donné en coordonnées sphériques. On cherche les coordonnées cartésiennes $(x, y, z)$ :

$$\begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 8sin\dfrac{\pi}{4}cos\dfrac{\pi}{3} \\ y = 8sin\dfrac{\pi}{4}sin\dfrac{\pi}{3} \\ z = 8cos\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \\ y = 2\sqrt{6} \\ z = 4\sqrt{2} \end{cases}$$

**4.2-Exercice 02**

Les équations horaires d'un point $M$ sont : $x = t, y = t^2 - 4$ .

a) Trouver l'équation de la trajectoire. Tracer la dans le plan $xoy$.

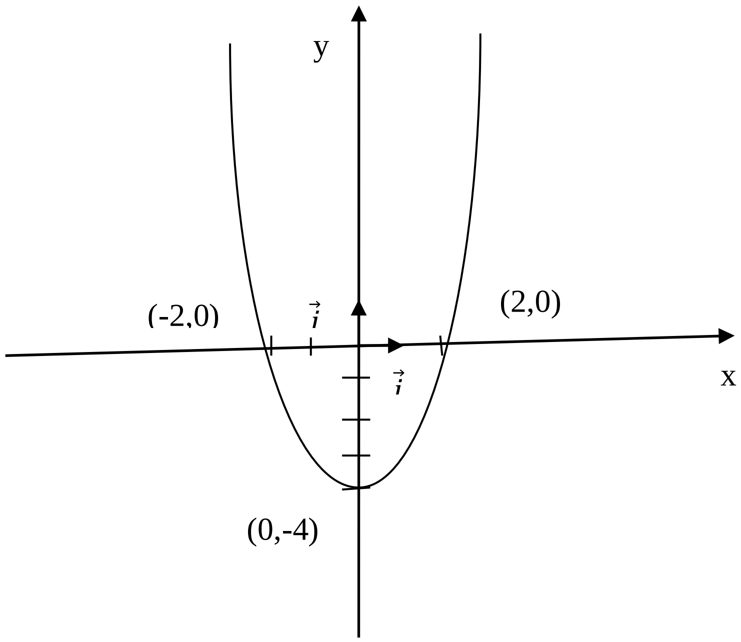
b) Trouver en coordonnées cartésiennes les vecteurs de position $\vec{r}(t)$, vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{\gamma}(t)$. Calculer leurs modules.

c) Trouver la vitesse moyenne et l'accélération moyen entre l'intervalle $1 < t < 2s$.

d) Calculer l'accélération tangentielle et normale. Déduire le rayon de la courbure.

**4.2.1-Corrigé**

a)L'équation de la trajectoire :




On a : $x = t$

$\Rightarrow y = x^2 - 4$ . C'est une parabole.

b) la position :

$\vec{r}(t) = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = t\vec{\imath} + (t^2 - 4)\vec{\jmath}(t)$

$||\vec{r}|| = \sqrt{t^2 + (t^2 - 4)^2}$

La vitesse :

$\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{r}(t)}{dt} = \vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1+4t^2}$

L'accélération :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = 2\vec{j}$$

$\|\vec{\gamma}\| = 2$

c) La vitesse moyenne entre l'intervalle $1 < t < 2s$ :

$$\overrightarrow{v_m}/_1^2 = \frac{\vec{r}(t=2) - \vec{r}(t=1)}{2-1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_m}/_1^2 = \frac{2\vec{\imath} - (\vec{\imath} - 3\vec{\jmath}(t))}{1} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}(t)$$

L'accélération moyenne entre l'intervalle $1 < t < 2s$ :

$$\overrightarrow{\gamma_m}/_1^2 = \frac{\vec{v}(t=2) - \vec{v}(t=1)}{2-1}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma_m}/_1^2 = \vec{\mathrm{i}} + 4\vec{\mathrm{j}} - (\vec{\imath} + 2\vec{\jmath})) = 2\vec{\jmath}$$

d)L'accélération tangentielle :

$$\gamma_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt}$$

$$\Rightarrow \gamma_t = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$$

L'accélération normale :

On a : $\gamma^2 = \gamma_t^2 + \gamma_n^2$

$$\Rightarrow \gamma_n = \sqrt{\gamma^2 - \gamma_t^2}$$

$$\Rightarrow \gamma_n = \sqrt{4 - \frac{16t^2}{1+4t^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}$$

Le rayon de la courbure :

On a :

$$\gamma_n = \frac{v^2}{R}$$

$$\Rightarrow R = \frac{v^2}{\gamma_n} = \frac{1+4t^2}{\frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}(1+4t^2)^{\frac{3}{2}}.$$

**4.3-Exercice 03**
Soit un point matériel $M$ repéré par ces coordonnées cartésiennes :

$$x = R(1 + cos2\theta), \quad y = Rsin\theta, \quad \theta = \omega t$$

1-Trouver en coordonnées cartésiennes :
-l'équation de la trajectoire et tracer la.
-les vecteurs de position, vitesse et accélération. Calculer les modules de la vitesse et l'accélération.
2-Trouver en coordonnées polaires :
-l'équation de la trajectoire $\rho = f(\theta)$ et tracer sur la courbe de la trajectoire les vecteurs unitaires polaires et intrinsèques.
-les vecteurs de position, vitesse et accélération. Calculer les modules de la vitesse et l'accélération.
3-Trouver en coordonnées intrinsèques :
-l'accélération tangentielle et l'accélération normale.
-déduire le rayon de la courbure.
4-Calculer l'abscisse curviligne en fonction de $\theta$ .

**4.3.1-Corrigé**
1-L'équation de la trajectoire :
On a :

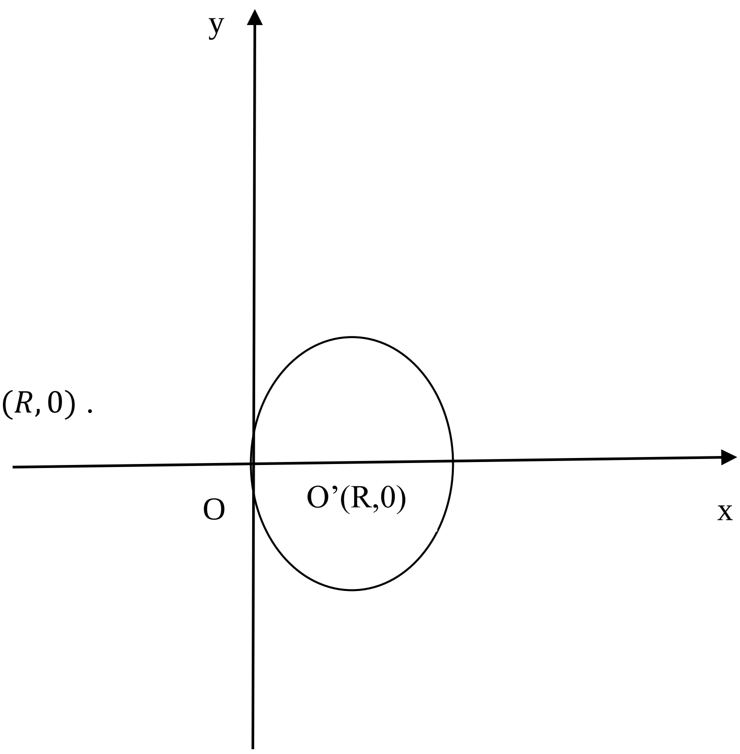
$$\begin{cases} x = R(1 + cos2\theta) \\ y = Rsin2\theta \end{cases}$$

1-l'équation de la trajectoire

$$\begin{cases} x - R = Rcos2\theta \\ y = Rsin2\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x - R)^2 + y^2 = R^2$$

C'est un cercle de rayon $R$ et de centre $(R, 0)$ .




Le vecteur position :
$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{r} = R(1 + cos2\theta)\vec{i} + Rsin2\theta\vec{j}$

Le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = 2R\omega(-sin2\theta\vec{\imath} + cos2\theta\vec{\jmath}+)$$

$$\|\vec{v}\| = 2R\omega$$

Le vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(t) = -4R\omega^2(cos2\theta\vec{\imath} + sin2\theta\vec{\jmath}+)$$

$$\|\vec{\gamma}\| = 4R\omega^2$$

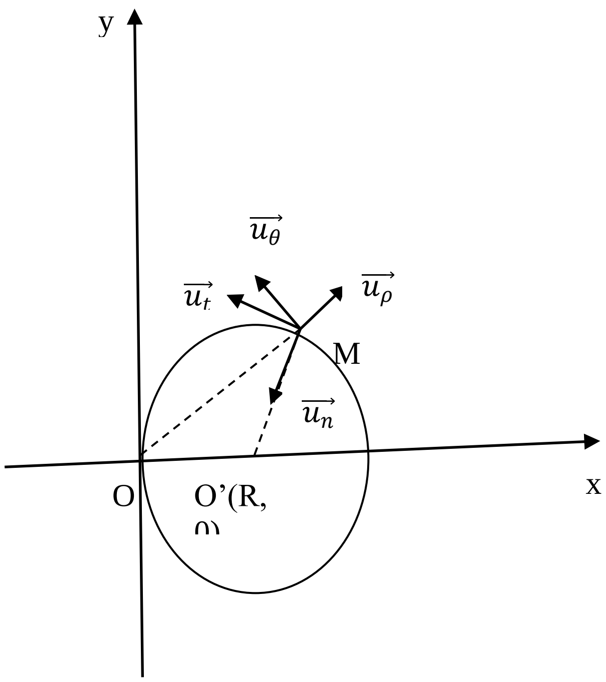
2-en coordonnées polaires :

-l'équation de la trajectoire $\rho = f(\theta)$ :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \rho = R\sqrt{(1 + cos2\theta)^2 + (sin2\theta)^2}$$

$$\Rightarrow \rho = R\sqrt{2(1 + cos2\theta)}$$




On a : $cos2\theta = cos^2\theta - sin^2\theta$

$$\Rightarrow cos2\theta = 2cos^2\theta - 1$$

$$\Rightarrow \rho = R\sqrt{4cos^2\theta}$$

$$\Rightarrow \rho = 2R|cos\theta|$$

Le vecteur position :

$$\vec{r} = \rho\overrightarrow{u_\rho}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = 2Rcos\theta\overrightarrow{u_\rho}$$

Le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = 2R\omega\left[-sin\theta\overrightarrow{u_\rho} + cos\theta\overrightarrow{u_\theta}\right]$$

$$\|\vec{v}\| = 2R\omega$$

Le vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(t) = -4R\omega^2\left[cos\theta\overrightarrow{u_\rho} + sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\right]$$

$$\|\vec{\gamma}\| = 4R\omega^2$$

3-en coordonnées intrinsèques :

L'accélération tangentielle :

$$\gamma_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0$$

L'accélération normale :

$$\gamma_N = \gamma = 4R\omega^2$$

4-l'abscisse curviligne :

On a :

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \omega\frac{dS}{d\theta}$$

$$\Rightarrow dS = \frac{v}{\omega}d\theta$$

$$\Rightarrow dS = \frac{2R\omega}{\omega}d\theta = 2Rd\theta$$

$$\Rightarrow \int_{S_0}^{S} dS = \int_{0}^{\theta} 2Rd\theta$$

$$\Rightarrow S(\theta) = 2R\theta + S_0$$

### 4.4-Exercice 04

L'accélération d'un point matériel $M$ en fonction du temps, en coordonnes intrinsèques, est donnée par l'expression : $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{u_t} + \beta t^2\overrightarrow{u_n}$ où $\overrightarrow{u_t}$ et $\overrightarrow{u_n}$ sont les vecteurs unitaires du trièdre de Frénet et $\alpha$ et $\beta$ des constantes positives.

**1.** Donner l'accélération tangentielle $a_t$ et normal $a_n$ .

**2.** Déterminer l'abscisse curviligne $S(t)$ du point matériel $M$ sachant qu'à l'instant $t = 0, V(t = 0) = V_0$ et $S(t = 0) = 0$.

**3.** Déterminer l'expression du rayon de courbure $R$ de la trajectoire.

#### 4.4.1-Corrigé

Soit : $\vec{a} = \alpha\overrightarrow{u_t} + \beta t^2\overrightarrow{u_n}$

1-Calcul de l'accélération tangentielle $a_t$ et normal $a_n$ :

On a :

$\vec{a} = a_t\overrightarrow{u_t} + a_n\overrightarrow{u_n}$

$\Rightarrow a_t = \alpha, a_n = \beta t^2$

2-Détermination de l'abscisse curviligne $S(t)$ :

On a :

$V = \frac{dS}{dt} \Rightarrow \int_{S_0}^{S} dS = \int_0^t V\, dt$ ;

Calcul de $V$ ;

$$a_t = \frac{dV}{dt} \Rightarrow \int_{V_0}^{V} dV = \int_0^t a_t\, dt = \alpha\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow V = \alpha t + V_0$$

$$\Rightarrow \int_{S_0}^{S} dS = \int_0^t (\alpha t + V_0)dt$$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{\alpha}{2}t^2 + V_0 t + S_0$$

3-Détermination de l'expression du rayon de courbure $R$ :

On a :

$$a_n = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{a_n}$$

$$\Rightarrow R = \frac{(\alpha t + V_0)^2}{\beta t^2}$$

**4.5-Exercice 05**

Le mouvement d'un point matériel dans le plan $(Oxy)$ est donné en coordonnées cartésiennes par les équations :

$$x(t) = atcos\theta,\;\; y(t) = atsin\theta, \theta = wt$$

$a$ et $w$ sont des constantes.

1-Trouver les vecteurs de vitesse et accélération dans la base cartésienne $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

2-Donner le vecteur position dans la base polaire $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta})$.

3-Trouver les vecteurs de vitesse et accélération dans la base polaire $(\overrightarrow{u_\rho}, \overrightarrow{u_\theta})$. Calculer leurs modules.

4-Trouver l'accélération tangentielle et l'accélération $\gamma_t$ normale $\gamma_N$ .

5-Calculer le rayon de la courbure .

### 4.5.1-Corrigé

1-La vitesse et l'accélération dans la base cartésienne $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ :

On a :

$$\overrightarrow{OM} = atcos\theta\vec{\imath} + atsin\theta\vec{\jmath}$$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = a[(cos\theta - \theta sin\theta]\vec{\imath} + (sin\theta + \theta cos\theta)\vec{\jmath}$$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt}$$

$$\vec{\gamma}(t) = aw[-(2sin\theta + \theta cos\theta]\vec{\imath} + (2cos\theta - \theta sin\theta)\vec{\jmath}$$

2-Le vecteur position dans la base polaire $(\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\theta})$ :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = at\sqrt{cos^2\theta + sin^2\theta}$$

$$\Rightarrow \rho = at$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = at\overrightarrow{u_\rho}$$

3-La vitesse et accélération dans la base polaire $(\overrightarrow{u_\rho},\overrightarrow{u_\theta})$ :

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(at\overrightarrow{u_\rho})$$

$$\vec{V} = a\overrightarrow{u_\rho} + atw\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\|\vec{V}\| = a\sqrt{1 + w^2t^2}$$

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{V}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(a\overrightarrow{u_\rho} + atw\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

$$\vec{\gamma}(t) = -aw^2t\overrightarrow{u_\rho} + 2aw\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\|\vec{\gamma}(t)\| = aw\sqrt{4 + w^2t^2}$$

4- l'accélération tangentielle et l'accélération $\gamma_t$ normale $\gamma_N$ :

$$\gamma_t = \frac{d}{dt}(a\sqrt{1+w^2t^2})$$

$$\gamma_t = \frac{aw^2t}{\sqrt{1+w^2t^2}}$$

$$\gamma_N = \sqrt{\gamma^2 - {\gamma_t}^2}$$

$$\gamma_N = \sqrt{a^2w^2(4+w^2t^2) - \frac{a^2w^4t^2}{1+w^2t^2}}$$

$$\gamma_N = \frac{aw(2+wt)}{\sqrt{1+w^2t^2}}$$

5- Calcul du rayon de la courbure $R$ :

$$R = \frac{V^2}{\gamma_N}$$

$$R = \frac{a^2(1+w^2t^2)}{\frac{aw(2+wt)}{\sqrt{1+w^2t^2}}}$$

$$R = \frac{a}{w} \cdot \frac{(1+w^2t^2)^{3/2}}{(2+wt)}$$

**4.6-Exercice 06**

Les équations horaires d'un point $M$ sont : $x = rcos\theta, y = rsin\theta, z = h\theta, \theta = \omega t.$

1-a) Quel est le mouvement du point $M$ dans le plan $(xOy)$.

b) Quel est le mouvement du point $M$ suivant la direction de l'axe $Oz$.

c) Quel est le mouvement résultant du point $M$.

2-Déterminer les composantes cylindriques et le module des vecteurs : position, vitesse et accélération.

3-Quelles sont les composantes tangentielle et normale du vecteur accélération. Déduire le rayon de la courbure de la trajectoire.

4-Calculer l'abscisse curviligne $S(t)$ du point $M$, sachant qu'à l'instant $t = 0, S(t) = 0$.

**4.6.1-Corrigé**

On a :

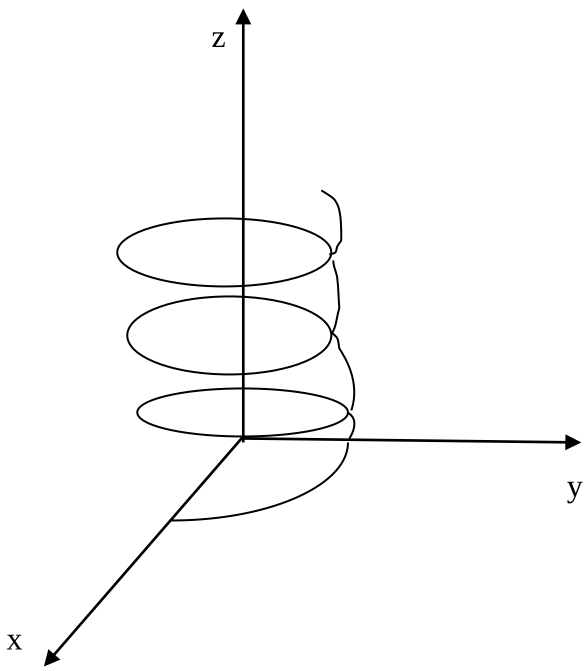
$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \, , \qquad \theta = \omega t \\ z = h\theta \end{cases}$$

1-a le mouvement du point $M$ dans le plan $(xOy)$ :

$x^2 + y^2 = r^2$, c'est un cercle de rayon $r$ et de centre $(0,0)$ .

b-Le mouvement suivant $Oz$ est linéaire croissant selon $\theta$.

c-Le mouvement résultant est hélicoïdal.




2-En coordonnées cylindriques :

Le vecteur position :

$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{k}$

On a : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u_\rho} + h\omega t\vec{k}$

Le vecteur vitesse :

$\vec{v}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$

$\Rightarrow \vec{v}(t) = \omega\left[r\overrightarrow{u_\theta} + h\vec{k}\right]$

$\|\vec{v}\| = \omega\sqrt{r^2 + h^2}$

Le vecteur accélération :

$\vec{\gamma}(t) = \dfrac{d\vec{v}(t)}{dt}$

$\Rightarrow \vec{\gamma}(t) = -r\omega^2\overrightarrow{u_\rho}$

$\|\vec{\gamma}\| = r\omega^2$

3-l'accélération tangentielle :

$$\gamma_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = 0$$

L'accélération normale :

$$\gamma_N = \gamma = r\omega^2$$

Le rayon de la courbure :

On a : $\gamma_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{\gamma_N}$

$$\Rightarrow R = \frac{\omega^2(r^2+h^2)}{r\omega^2}$$

$$\Rightarrow R = r + \frac{h^2}{r}$$

4- l'abscisse curviligne :

On a :

$$v = \frac{dS}{dt} \Rightarrow dS = vdt$$

$$\Rightarrow \int_0^S dS = \omega\sqrt{r^2+h^2}\int_0^t dt$$

$$\Rightarrow S(t) = \omega\sqrt{r^2+h^2}\,t$$

**4.7-Exercice 07**

Soit un point $M$ repéré par ses coordonnées sphériques $(r, \theta, \varphi)$: $r = R, \theta = \frac{\pi}{6}, \varphi = at^2$.

1. Ecrire l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes.
2. Déterminer les composantes cartésiennes et le module des vecteurs : vitesse et accélération.
3. Donner l'équation de trajectoire. Tracer la trajectoire.
4. Quelle est la nature du mouvement.

### 4.7.1-Corrigé

1- l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes :

On a :

$$M\begin{cases} r = R \\ \theta = \frac{\pi}{6} \\ \varphi = at^2 \end{cases}$$

$$M\begin{cases} x = rsin\theta cos\varphi \\ y = rsin\theta sin\varphi \\ z = rcos\theta \end{cases}$$

$$\Rightarrow M\begin{cases} x = Rsin\frac{\pi}{6}cosat^2 \\ y = Rsin\frac{\pi}{6}sinat^2 \\ z = Rcos\frac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{R}{2}cosat^2\vec{\imath} + \frac{R}{2}sinat^2\vec{\jmath} + \frac{\sqrt{3}}{2}R\vec{k}$$

2-le vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(t) = -Ratsinat^2\vec{\imath} + Ratcosat^2\vec{\jmath}$$

$$\|\vec{v}\| = Rat$$

Le vecteur accélération :

$$\vec{\gamma}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}(t) = -Ra[sinat^2 + 2at^2cosat^2]\vec{\imath} + Ra[cosat^2 - 2at^2sinat^2]\vec{\jmath}$$

$$\|\vec{\gamma}\| = Ra\sqrt{1 + 4a^2t^4}$$

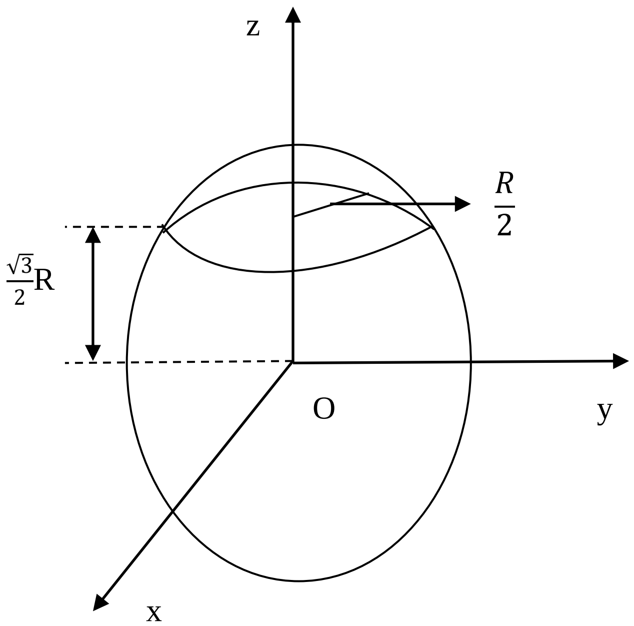
3-la trajectoire :

On a :

$$\begin{cases} x = \frac{R}{2}cos\varphi \\ y = \frac{R}{2}sin\varphi \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2}R \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\frac{R}{2}\right)^2 \\ z = \frac{\sqrt{3}}{2}R \end{cases}$$

La trajectoire est un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ , qui se trouve à l'hauteur $\frac{\sqrt{3}}{2}R$ .




4-la nature du mouvement :

On a :

$\vec{\gamma}(t).\vec{v}(t) = R^2a^2t > 0$

⇒le mouvement est accéléré ($\vec{\gamma}(t).\vec{v}(t) > 0$) non uniforme ($\gamma \neq C^{te}$) .

## 5-Exercices supplémentaires sans solution

### 5.1-Exercice 01

Une particule se déplace sur l'axe des $X$ suivant la loi : $x = t^3 - 3t^2 - 9t + 5$. Pendant quels intervalles de temps la particule se déplace-elle vers les $X$ positifs ? vers les $X$ négatifs ? Pendant quels intervalles de temps le mouvement est-il accéléré ? Retardé ? Représenter graphiquement $x, v$, et $a$ en fonction du temps

### 5.2-Exercice 02

Les coordonnées d'un mobile $M$ dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ sont :

$$\mathrm{x(t) = t^2 - 4t + 7;\ \ y(t) = t - 2}$$

1-Trouver l'équation de la trajectoire. Tracer la dans le plan xoy.

2-Trouver en coordonnées cartésiennes les vecteurs de vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{\gamma}(t)$. Calculer leurs modules.

3-Calculer l'accélération tangentielle et normale.

4-Trouver le temps $t_1$ pour lequel la vitesse est perpendiculaire à l'accélération.

5-Donner l'expression de rayon de courbure. Appliquer pour $t = t_1$.

6-Calculer le temps $t_2$ pour lequel le module de l'accélération tangentielle est égal au module de l'accélération normale.

### 5.3-Exercice 03

Soit le mouvement d'un point matériel $M$ définie en coordonnées polaires $(\rho, \theta)$ par les équations :

$\rho = \rho_0 e^{\alpha t}$, $\theta = \omega t$,

tel que $\rho_0, \alpha, \omega$ des constants positifs.

1-Donner l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ . Quelle est sa norme $\|\overrightarrow{OM}\|$ .

2-Trouver l'expression du vecteur vitesse $\vec{V}$ et calculer sa norme $\|\vec{V}\|$ .

3-Trouver l'expression du vecteur vitesse $\vec{\gamma}$ et calculer sa norme $\|\vec{\gamma}\|$ .

4-Calculer l'accélération tangentielle $\overrightarrow{\gamma_t}$ et l'accélération normale $\overrightarrow{\gamma_N}$ .

5- Trouver le rayon de la courbure $R$ en fonction $\rho_0, \alpha, \omega$ .

### 5.4-Exercice 04

Dans un plan muni d'un système d'axes $OXY$, un point matériel se déplace sur une courbe d'équation :

$$\rho = 2R\,cos\theta$$

où $\rho$ et $\theta$ son ses coordonnées polaires et $R$ une constante positive.

**1.** Exprimer l'équation de sa trajectoire en coordonnées cartésiennes. Quelle est sa nature ?

**2.** Dans la base $(\vec{u}_\rho\ ,\vec{u}_\theta)$ associée au coordonnées polaires, exprimer les vecteurs position $\vec{r}$ , vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ en fonction de $R, \theta\ , \dot{\theta}\ et\ \ddot{\theta}$ . $(\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}\ et\ \ddot{\theta} = \frac{d^2\theta}{d^2t})$

**3.** Dans la suite, on supposera que $\dot{\theta} = \omega$ est constante. Déterminer les composantes tangentielle et normale de l'accélération. Déduire le rayon de la courbure.

**4.** Déterminer l'abscisse curviligne $S(t)$ du point matériel sachant que $S(t = 0) = 0$.

**5.** Ecrire les vecteurs unitaires $\vec{u}_t\ et\ \vec{u}_n$ de la base intrinsèque dans la base $\vec{u}_\rho\ ,\vec{u}_\theta$ .

### 5.5-Exercice 05

Le vecteur de position d'un mobile dans le plan $xOy$ est donné par l'expression :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = 4e^{-\alpha t}\vec{\imath} + 2(1 - e^{-2\alpha t})\vec{\jmath}$$

1-Déterminer la position do mobile à l'instant initiale $= 0$ .

2-Trouver l'équation de la trajectoire. Quelle est ca nature.

3-Trouver la vitesse du mobile $\vec{v}$ et son accélération $\vec{\gamma}$ .

4-Trouver l'accélération tangentielle $\overrightarrow{\gamma_t}$ .

5-Trouver les vecteurs unitaires radial et transversal $(\vec{u}_\rho\ ,\vec{u}_\theta)$ exprimé dans le système de cordonnées cartésiennes $(\vec{\imath}\ ,\vec{\jmath})$.

6-Trouver les équations horaires dans le système de coordonnées polaires $(\rho(t), \theta(t))$.

7-Calculer les vitesses radiale et transversale.