Rappel du cours

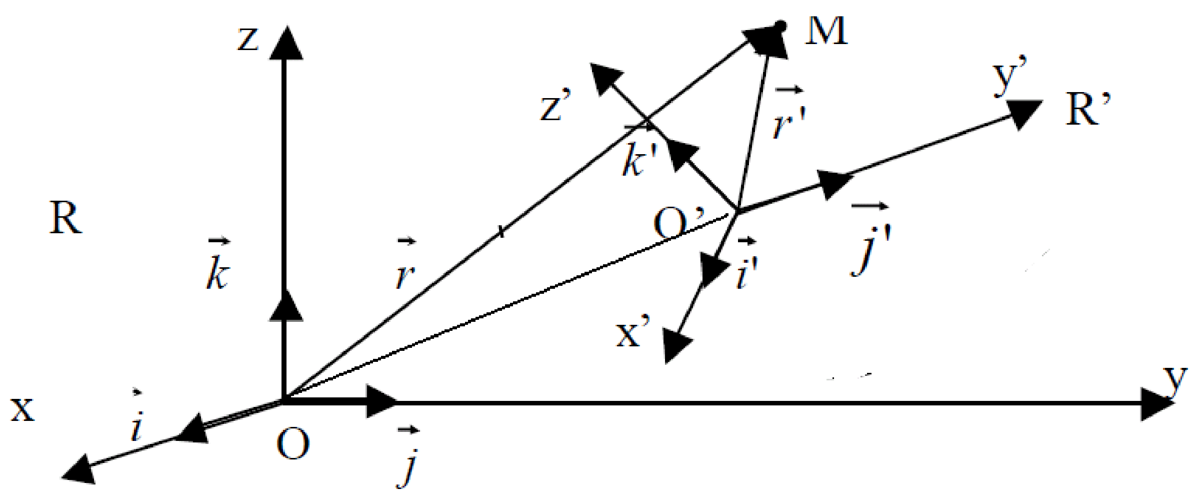
1-Introduction

Le mouvement est une notion relative, il faut choisir un référentiel pour définir à chaque instant la position, la vitesse et l'accélération d'un objet.

Soit : $R(o,x,y,z)$ un référentiel « fixe » ou « absolu ».

$R'(o',x',y',z')$ un référentiel « mobile » ou « relatif ».

D'une manière générale le mouvement de R' par rapport à R est (translation + rotation). On définit la rotation de R' par rapport à R par le vecteur rotation $\vec{\omega}$.



2-Les grandeurs absolues et relatives

2.1-Le vecteur position

a-Le vecteur position absolu: $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

b-Le vecteur position relative: $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{\imath'} + y'\vec{\jmath'} + z'\vec{k'}$

c-loi de composition de vecteurs positions : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

2.2-Le vecteur vitesse

a-Le vecteur vitesse absolu : $\vec{V_a} = \vec{V}_{M/R} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/_R = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}$

b-Le vecteur vitesse relative : $\vec{V_r} = \vec{V}_{M/R'} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/_{R'}$

$$\vec{V_r} = \dot{x}'\vec{\imath'} + \dot{y}'\vec{\jmath'} + \dot{z}'\vec{k'}$$

c-Le vecteur vitesse d'entrainement :$\overrightarrow{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/_R + \left(x'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + y'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + z'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$

$$\overrightarrow{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/_R + \left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

d-Loi de composition de vecteur vitesses : $\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}$

2.3-Le vecteur accélération

a-le vecteur accélération absolu : $\overrightarrow{\gamma_a} = \vec{\gamma}_{M/R} = \frac{d\overrightarrow{V_a}}{dt}/_R = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/_R$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k}$$

b- le vecteur accélération relative : $\overrightarrow{\gamma_r} = \vec{\gamma}_{M/R'} = \frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}/_{R'} = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}/_{R'}$

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \ddot{x}'\vec{\imath}' + \ddot{y}'\vec{\jmath}' + \ddot{z}'\vec{k}'$$

c-le vecteur accélération d'entrainement :$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(x'\frac{d^2\vec{\imath}'}{dt^2} + y'\frac{d^2\vec{\jmath}'}{dt^2} + z'\frac{d^2\vec{k}'}{dt^2}\right)$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

d- le vecteur accélération de Coriolis : $\overrightarrow{\gamma_c} = 2\left(\dot{x}'\frac{d\vec{\imath}'}{dt} + \dot{y}'\frac{d\vec{\jmath}'}{dt} + \dot{z}'\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)$

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r}\right)$$

e-loi de composition de vecteurs accélérations : $\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_c} + \overrightarrow{\gamma_r}$

3-Exercices résolus

3.1-Exercice 01

Un avion A vole vers le nord à $480\ km/h$ par rapport au sol. Au même moment, un autre avion B vole dans la direction $60°\ W$, à $320\ km/h$ par rapport au sol. Trouver la vitesse de A par rapport à B et celle de B par rapport à A.

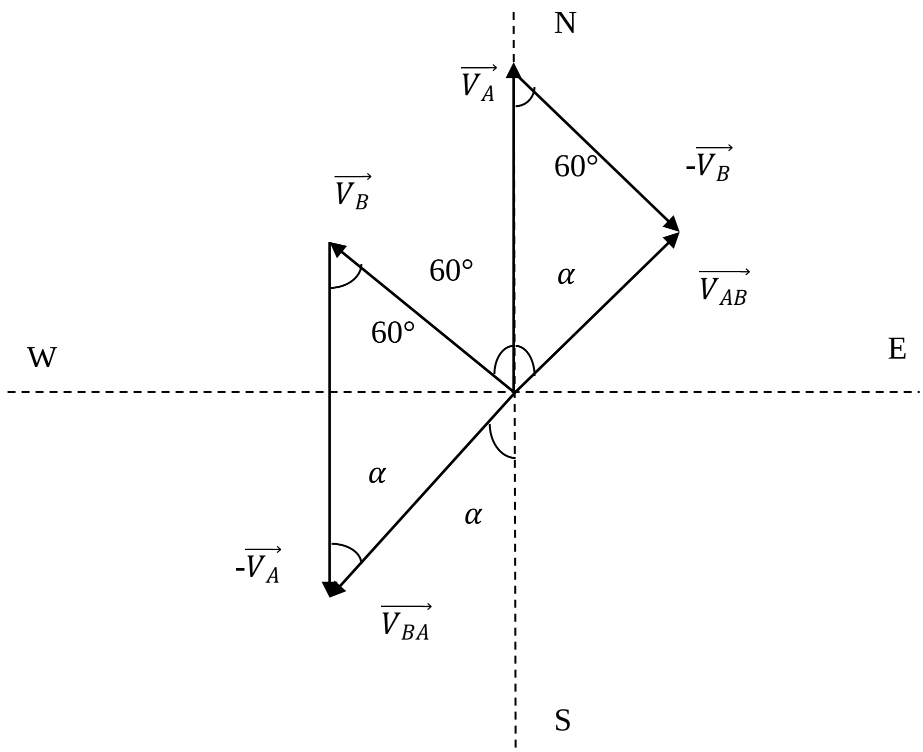
3.1.1-Corrigé

Calcul de la vitesse de A par rapport à B :

On a : $\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_A}$: la vitesse de l'avion A par rapport au sol.

$\overrightarrow{V_r} = \vec{V}_{A/B}$: La vitesse de l'avion A par rapport à .

$\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_B}$: la vitesse de l'avion B par rapport au sol.



Selon la composition de vecteurs vitesses :

$\overrightarrow{V_A} = \vec{V}_{A/B} + \overrightarrow{V_B}$

$\Rightarrow \vec{V}_{A/B} = \overrightarrow{V_A} - \overrightarrow{V_B}$

$V_{A/B} = \sqrt{V_A^2 + V_B^2 - 2V_A V_B cos\theta}$

$\Rightarrow V_{A/B} = \sqrt{480^2 + 320^2 - 480 \times 320 \times cos60°}$

$V_{A/B} = 423.32 km/h$

Pour obtenir la direction de $\vec{V}_{A/B}$:

$\frac{V_B}{sin\alpha} = \frac{V_{A/B}}{sin60°}$

$\Rightarrow sin\alpha = \frac{V_B}{V_{A/B}} . sin60° = \frac{320}{423.32} \times 0.866$

$\Rightarrow sin\alpha = 0.655$

$\Rightarrow \alpha = 40.92°$

Par conséquent, pour un passager de l'avion B étant se pose comme si l'avion A se déplaçait à $V_{A/B}$ dans la direction $40.92° E$.

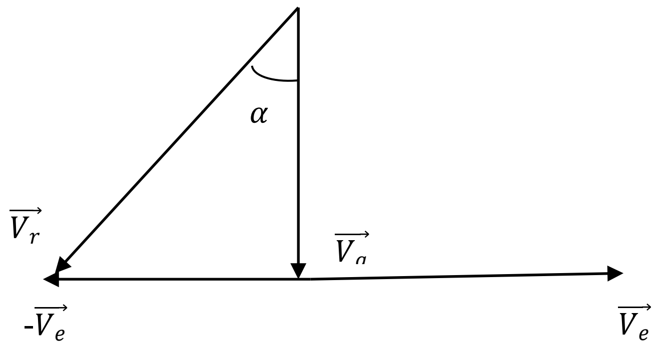
La vitesse relative de B par rapport à A ($V_{B/A}$) à la même grandeur, mais de direction opposée $40.92° W$.

3.2-Exercice 02

Des flocons de neige tombent verticalement avec une vitesse de $8m/s$. Avec quelle vitesse ces flocons frappent-ils le pare-brise d'une voiture roulant avec une vitesse de $50\ km/h$.

3.2.1-Corrigé

$\overrightarrow{V_e}$: Vitesse de la voiture par rapport au sol. (vitesse d'entrainement).
$\overrightarrow{V_a}$: vitesse des flocons par rapport au sol (vitesse absolue).
$\overrightarrow{V_r}$: vitesse des flocons par rapport à la voiture (vitesse relative).



On a :

$$\overrightarrow{V_r} = \overrightarrow{V_a} - \overrightarrow{V_e}$$
$$\Rightarrow\ V_r = \sqrt{V_a^2 + V_e^2}$$

$$V_a = 8\frac{m}{s}, V_e = 50\frac{km}{h} = 50 \times \frac{1000}{3600} = 13.88\frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow V_r = 16.02\frac{m}{s}.$$

La direction du vecteur vitesse relative :

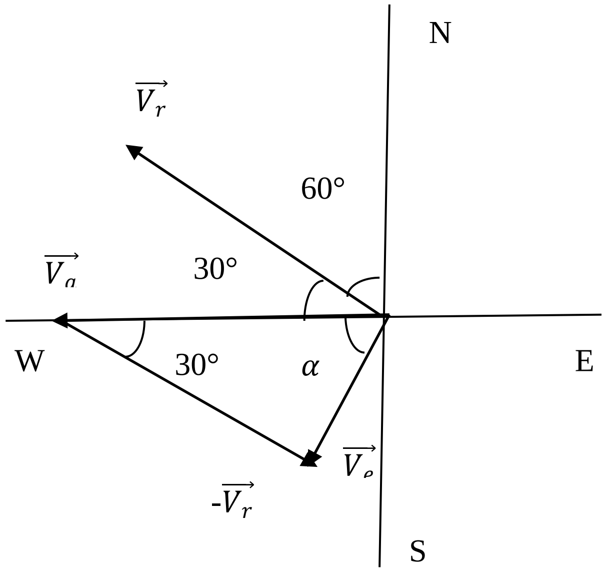
$$\tan\alpha = \frac{V_e}{V_a} = 1.74\ \Rightarrow \alpha = 60.11°.$$

3.3-Exercice 03

Un bateau prend la mer en direction du nord $60°$ ouest à la vitesse de $4km/h$ par rapport à l'eau. La direction du courant d'eau est tel que le mouvement résultant par rapport à la terre s'effectue dans la direction de l'ouest à la vitesse de $5km/h$. Calculer la vitesse et la direction du courant d'eau par rapport au sol.

3.3.1-Corrigé

$\overrightarrow{V_e}$: Vitesse du courant d'eau par rapport au sol. (vitesse d'entrainement).
$\overrightarrow{V_a}$: vitesse du bateau par rapport au sol (vitesse absolue).
$\overrightarrow{V_r}$: vitesse du bateau par rapport à l'eau de mer (vitesse relative).



On a :

$$\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_a} - \overrightarrow{V_r}$$

$$\Rightarrow V_e = \sqrt{{V_a}^2 + V_r^2 - 2V_aV_r cos\theta}$$

$$V_a = 5\frac{km}{h}, V_r = 4\frac{km}{h}, \qquad \theta = 30°$$

$$\Rightarrow V_e = 2.52\frac{km}{h}$$

La direction de la vitesse d'entrainement :

On a :

$$\frac{V_r}{sin\alpha} = \frac{V_e}{sin30°}$$

$$\Rightarrow sin\alpha = \frac{V_r}{V_e} sin30° = \frac{4}{2.52} \times \frac{1}{2} = 0.8$$

$$\Rightarrow \alpha = 53.13°.$$

3.4-Exercice 04

Les coordonnées d'une particule mobile dans le référentiel (R) muni du repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont données en fonction du temps : $x = t^2 - 4t + 1;\ y = -2t^4; z = 3t^2$. Dans un deuxième référentiel $R'(O',\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})$, avec $\vec{\imath} = \vec{i'}, \vec{\jmath} = \vec{j'}, \vec{k} = \vec{k'}$, elles ont pour expression : $x' = t^2 + t + 2; y' = -2t^4 + 5; z' = 3t^2 - 7$.

1-Exprimer la vitesse $\overrightarrow{Va}$ de M dans (R) en fonction de sa vitesse $\overrightarrow{Vr}$ dans (R').

2-Procéder de même pour les accélérations.

3-Calculer l'accélération de Coriolis.

4-Définir le mouvement d'entrainement de (R) par rapport à (R').

3.4.1-Corrigé

1-L'expression de $\overrightarrow{V_a}$ en fonction de $\overrightarrow{V_r}$:

$$\overrightarrow{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}/_R = \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2t - 4 \\ \dfrac{dy}{dt} = -8t^3 \\ \dfrac{dz}{dt} = 6t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{V_a} = (2t - 4)\vec{\imath} - 8t^3\vec{\jmath} + 6t\vec{k}$$

$$\overrightarrow{V_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/_{R'} = \begin{cases} \dfrac{dx'}{dt} = 2t + 1 \\ \dfrac{dy'}{dt} = -8t^3 \\ \dfrac{dz'}{dt} = 6t \end{cases}$$

$$\overrightarrow{V_r} = (2t + 1)\vec{\imath'} - 8t^3\vec{\jmath'} + 6t\vec{k'}$$

avec : $\vec{\imath} = \vec{i'}, \vec{\jmath} = \vec{j'}, \vec{k} = \vec{k'}$

$$\overrightarrow{V_r} = (2t + 1)\vec{\imath} - 8t^3\vec{\jmath} + 6t\vec{k}$$

On a :

$$\overrightarrow{V_a} = (2t - 4)\vec{\imath} - 8t^3\vec{\jmath} + 6t\vec{k}$$

$$= (2t + 1 - 5)\vec{\imath} - 8t^3\vec{\jmath} + 6t\vec{k}$$

$$\overrightarrow{V_a} = (2t + 1)\vec{\imath} - 8t^3\vec{\jmath} + 6t\vec{k} - 5\vec{\imath}$$

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_r} - 5\vec{\imath}$$

2-pour les accélérations :

-accélération absolu :

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}/_R = \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = 2 \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -24t^2 \\ \dfrac{d^2z}{dt^2} = 6 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = 2\vec{\imath} - 24t^2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

-accélération relative :

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{d^2\overrightarrow{O'M}}{dt^2}/_{R'} = \begin{cases} \dfrac{d^2x'}{dt^2} = 2 \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} = -24t^2 \\ \dfrac{d^2z'}{dt^2} = 6 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\gamma_r} = 2\overrightarrow{\imath'} - 24t^2\overrightarrow{\jmath'} + 6\overrightarrow{k'}$$

$$= 2\vec{\imath} - 24t^2\vec{\jmath} + 6\vec{k}$$

On observe que : $\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r}$.

3-accélération de Coriolis :

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\left(\dot{x}'\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} + \dot{y}'\frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} + \dot{z}'\frac{d\overrightarrow{k'}}{dt}\right)$$

$\frac{d\overrightarrow{\imath'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\jmath'}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{k'}}{dt} = \vec{0}$, donc $\overrightarrow{\gamma_c} = \vec{0}$.

4- Définition du mouvement d'entrainement de (R) par rapport à (R').

On a :

$$\overrightarrow{V_a} = \overrightarrow{V_e} + \overrightarrow{V_r}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_a} - \overrightarrow{V_r}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{V_e} = -5\vec{\imath}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_c} + \overrightarrow{\gamma_r}$$

On a :

$$\overrightarrow{\gamma_c} = \vec{0}\ , \overrightarrow{\gamma_a} = \overrightarrow{\gamma_r}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma_e} = \vec{0}$$

$\begin{cases} V_e = 5 = C^{te} \\ \gamma_e = \gamma_c = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ Mouvement uniforme et rectiligne.

3.5-Exercice 05

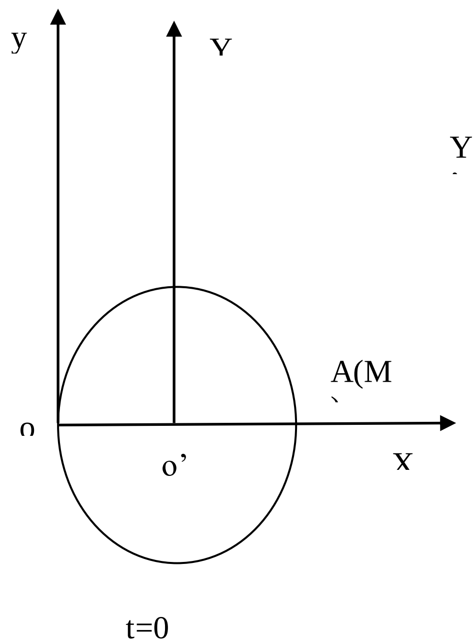
Dans le plan , un cercle de rayon R , de diamètre OA , tourne à la vitesse angulaire constante ω autour du point O. On lie à son centre mobile O' deux axes rectangulaires $O'x'y'$ (l'axe $O'x'$ est dirigé suivant). A l'instant $t = 0, A$ est sur Ox et $O'x'$ étant alors colinéaires. Un point M, initialement en A , parcourt la conférence dans le sens positif avec la même vitesse angulaire ω_0.

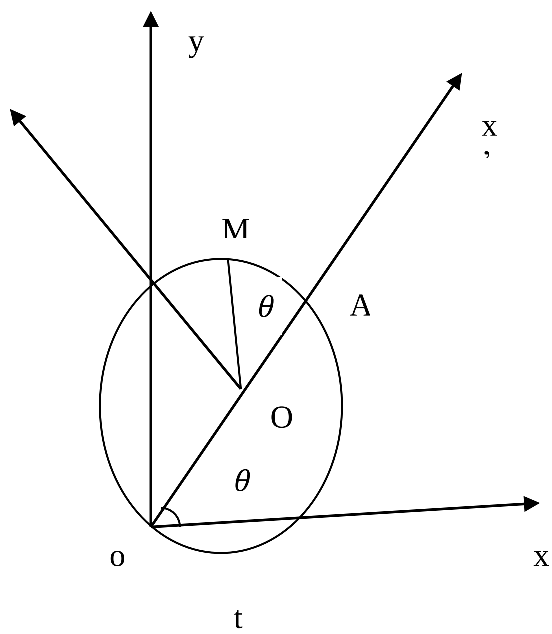
1. Calculer directement les composantes des vecteurs vitesse et accélération de M dans le repère Oxy (en dérivant les composantes de vecteur position).
2. Calculer les composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de M dans le repère $O'x'y'$ puis dans Oxy.
3. a) Calculer les composantes de la vitesse d'entrainement dans le repère Oxy. Retrouver ce résultat par la loi de composition des vitesses.

   b) Calculer de même les composantes de l'accélération d'entrainement dans le repère Oxy.

   c)Calculer l'accélération complémentaire. Retrouver ce résultat en utilisant la loi de composition de l'accélération.

3.5.1-Corrigé





1-Calcul directement des composantes des vecteurs vitsesse et accélération de M dans le repère Oxy :

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

$$\overrightarrow{OO'} = Rcos\theta\vec{\imath} + Rsin\theta\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{O'M} = Rcos\theta\overrightarrow{\imath'} + Rsin\theta\overrightarrow{\jmath'}$$

$$\overrightarrow{\imath'} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{\jmath'} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{O'M} = Rcos\theta(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}) + Rsin\theta(-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})$$

$$\overrightarrow{O'M} = R[(cos^2\theta - sin^2\theta)\vec{\imath} + 2sin\theta cos\theta\vec{\jmath}]$$

On a :

$$cos^2\theta - sin^2\theta = cos2\theta, \qquad 2sin\theta cos\theta = sin2\theta, \qquad \theta = \omega t$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{O'M} = Rcos2\theta\vec{\imath} + Rsin2\theta\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{OM} = R[(cos\theta + cos2\theta)\vec{\imath} + (sin\theta + sin2\theta)\vec{\jmath}]$$

$$\overrightarrow{V_a} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$\overrightarrow{V_a} = R\omega[-(sin\theta + 2sin2\theta)\vec{\imath} + (cos\theta + 2cos2\theta)\vec{\jmath}]$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = \frac{d\overrightarrow{V_a}}{dt}$$

$$\overrightarrow{\gamma_a} = -R\omega^2[(cos\theta + 4cos2\theta)\vec{\imath} + (sin\theta + 4sin2\theta)\vec{\jmath}]$$

2-Calcul des composantes de la vitesse et de l'accélération relatives de M dans le repère $O'x'y'$ puis dans Oxy :

-calcul de $\overrightarrow{V_r}$:

$$\overrightarrow{V_r} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}/_{R'}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[Rcos\theta\overrightarrow{\imath'} + Rsin\theta\overrightarrow{\jmath'}\right]$$

$$= R\omega\left[-sin\theta\overrightarrow{\imath'} + cos\theta\overrightarrow{\jmath'}\right]$$

Pour trouver $\overrightarrow{V_r}$ dans (R), on remplace $\overrightarrow{\imath'}\ et\ \overrightarrow{\jmath'}$,

$$\overrightarrow{V_r} = R\omega[-sin\theta(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}) + cos\theta(-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})]$$

$$\overrightarrow{V_r} = R\omega[-sin2\theta\vec{\imath} + cos2\theta\vec{\jmath}]$$

-calcul de $\overrightarrow{\gamma_r}$:

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{d\overrightarrow{V_r}}{dt}/_{R'}$$

$= R\omega \frac{d}{dt}\left[-sin\theta\overrightarrow{i'} + cos\theta\overrightarrow{j'}\right]_{R'}$

$= -R\omega^2(cos\theta\overrightarrow{i'} + sin\theta)\overrightarrow{j'}$

Pour trouver $\overrightarrow{\gamma_r}$ dans (R), on remplace $\overrightarrow{i'}\ et\ \overrightarrow{j'}$,

$\overrightarrow{\gamma_r} = -R\omega^2[cos\theta(cos\theta\vec{i} + sin\theta\vec{j}) + sin\theta(-sin\theta\vec{i} + cos\theta\vec{j})]$

$\overrightarrow{\gamma_r} = -R\omega^2[cos2\theta\vec{i} + sin2\theta\vec{j}]$

3-a) Calcul des composantes de la vitesse d'entrainement dans le repère Oxy :

$$\overrightarrow{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/_R + \left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/_R = R\omega(-sin\theta\vec{i} + cos\theta\vec{j}$$

$\vec{\omega} = \omega\overrightarrow{k'} = \omega\vec{k}$

$$\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ Rcos2\theta & Rsin2\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -R\ \omega sin2\theta\vec{i} + R\omega cos2\theta\vec{j}$$

$\overrightarrow{V_e} = R\ \omega[-(sin\theta + sin2\theta)\vec{i} + (cos\theta + cos2\theta)\vec{j}]$

$\overrightarrow{V_e}$ par la loi de composition de vitesse,

$\overrightarrow{V_e} = \overrightarrow{V_a} - \overrightarrow{V_r}$

$\overrightarrow{V_e} = R\omega[-(sin\theta + 2sin2\theta)\vec{i} + (cos\theta + 2cos2\theta)\vec{j}] - R\omega[-sin2\theta\vec{i} + cos2\theta\vec{j}]$

$\overrightarrow{V_e} = R\ \omega[-(sin\theta + sin2\theta)\vec{i} + (cos\theta + cos2\theta)\vec{j}]$

C'est le même résultat précédent.

b) calcul de $\overrightarrow{\gamma_e}$:

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

On a :

$$\omega = C^{te} \Rightarrow \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}$$

$$\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} == -R\omega^2(cos\theta\vec{i} + sin\theta\vec{j})$$

$$\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) = \omega\vec{k}\wedge(-R\ \omega sin2\theta\vec{\imath} + R\omega cos2\theta\vec{\jmath})$$
$$= -R\omega^2(cos2\theta\vec{\imath} + sin2\theta\vec{\jmath})$$

(On a utilisé la propriété suivante :$\vec{k}\wedge\vec{\imath} = \vec{\jmath},\ \ \vec{k}\wedge\vec{\jmath} = -\vec{\imath}$).

$$\overrightarrow{\gamma_e} == -R\omega^2[(cos\theta + cos2\theta)\vec{\imath} + (sin\theta + sin2\theta)\vec{\jmath}]$$

c) calcul de $\overrightarrow{\gamma_c}$:

$$\overrightarrow{\gamma_c} = 2\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r}\right)$$
$$= 2\omega\vec{k}\wedge R\omega[-sin2\theta\vec{\imath} + cos2\theta\vec{\jmath}]$$
$$= -2\ R\omega^2(cos2\theta\vec{\imath} + sin2\theta\vec{\jmath})$$

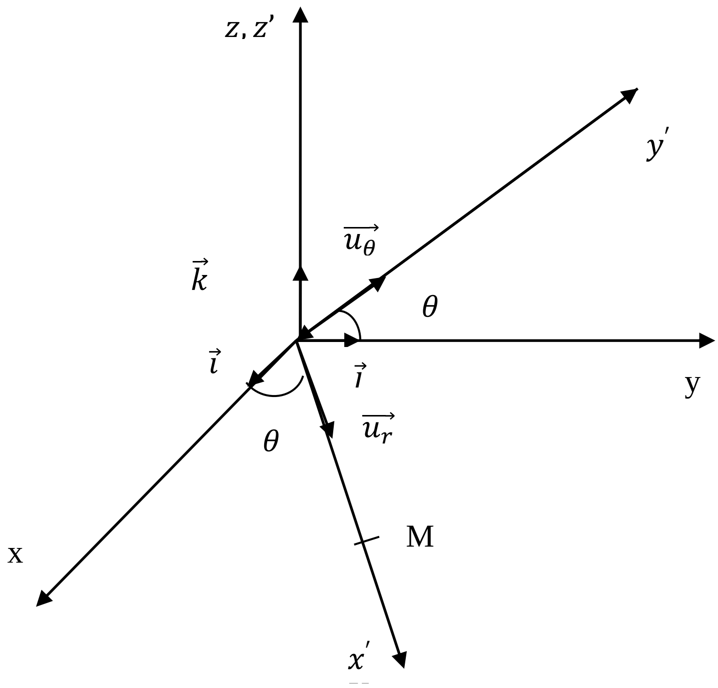
Par la loi d composition des accélérations :

$$\overrightarrow{\gamma_c} = \overrightarrow{\gamma_a} - \overrightarrow{\gamma_e} + \overrightarrow{\gamma_r}$$
$$= -R\omega^2[(cos\theta + 4cos2\theta)\vec{\imath} + (sin\theta + 4sin2\theta)\vec{\jmath}] + R\omega^2[(cos\theta + cos2\theta)\vec{\imath} + (sin\theta + sin2\theta)\vec{\jmath}] + 2\ R\omega^2(cos2\theta\vec{\imath} + sin2\theta\vec{\jmath})$$
$$\overrightarrow{\gamma_c} = -2\ R\omega^2(cos2\theta\vec{\imath} + sin2\theta\vec{\jmath})$$

C’est le même résultat précédent.

3.6-Exercice 06

On considère dans le repère fixe $oxyz$ le système des axes $o'x'y'z'$ mobiles tel que l’axe ox forme l’angle θ avec l’axe $o'x'$ (o coincide avec ’). Un point matériel M se déplace sur l’axe $o\ x'$, sa position est définit par $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Calculer ; (1) la vitesse et l’accélération relatives du point M (2) la vitesse et l’accélération d’entrainements de ce point (3) l’accélération de Coriolis (4) en déduire la vitesse et l’accélération absolues.



3.6.1-Corrigé

Le mouvement de M dans le système $o'x'y'z'$ de base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$.

1-la vitesse et l'accélération relatives:

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{r'} = \vec{r} = r\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{V_r} = \frac{d\overrightarrow{r'}}{dt} = \dot{r}\overrightarrow{u_r}$$

$$\overrightarrow{\gamma_r} = \frac{\overrightarrow{V_r}}{dt} = \ddot{r}\overrightarrow{u_r}$$

2-la vitesse et l'accélération d'entrainements :

$$\overrightarrow{V_e} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}/_R + \left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) = \vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}$$

$$= \begin{vmatrix} \overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \overrightarrow{u_z} \\ 0 & 0 & \omega \\ r & 0 & 0 \end{vmatrix} = r\omega\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e} = \frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2} + \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) + \vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\vec{\omega}\wedge\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right) = \ \omega\overrightarrow{u_z}\wedge(r\omega\overrightarrow{u_\theta}) = -r\omega^2\overrightarrow{u_r}$$

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}=\begin{vmatrix}\overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \overrightarrow{u_z}\\ 0 & 0 & \alpha\\ r & 0 & 0\end{vmatrix}=r\alpha\overrightarrow{u_\theta}$$

Où $\alpha=\frac{d\omega}{dt}$ est l'accélération angulaire.

$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma_e}=-r\omega^2\overrightarrow{u_r}+r\alpha\overrightarrow{u_\theta}$

3-l'accélération de Coriolis :

$$\overrightarrow{\gamma_c}=2\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{V_r}\right)=2\begin{vmatrix}\overrightarrow{u_r} & \overrightarrow{u_\theta} & \overrightarrow{u_z}\\ 0 & 0 & \omega\\ \dot{r} & 0 & 0\end{vmatrix}=2\dot{r}\omega\overrightarrow{u_\theta}$$

4- la vitesse et l'accélération absolues :

$\overrightarrow{V_a}=\overrightarrow{V_e}+\overrightarrow{V_r}=\dot{r}\overrightarrow{u_r}+r\omega\overrightarrow{u_\theta}$

$\overrightarrow{\gamma_a}=\overrightarrow{\gamma_e}+\overrightarrow{\gamma_c}+\overrightarrow{\gamma_r}=-r\omega^2\overrightarrow{u_r}+r\alpha\overrightarrow{u_\theta}+2\dot{r}\omega\overrightarrow{u_\theta}+\ddot{r}\overrightarrow{u_r}$

$\Rightarrow \overrightarrow{\gamma_a}=(\ddot{r}-\ r\omega^2)\overrightarrow{u_r}+(r\alpha+2\dot{r}\omega)\overrightarrow{u_\theta}$

3.7-Exercice 07

Un véhicule, que l'on peut considérer comme un point matériel M, se déplace par rapport un référentiel $R(O,x,y,z)$ avec un mouvement de translation uniforme de vitesse $\vec{V}_{(M/R)}$ telle que : $\left\|\vec{V}_{(M/R)}\right\|=V$.

Le véhicule roule sur une bosse dont le profil peut être représenté par $=f(x)$. On s'intéresse au segment de la route $[A,B]$;

1-Calculer la vitesse $\vec{V}_{(M/R)}$ en fonction de $\dot{x}$ et de la dérivée première $f'(x)=\frac{df(x)}{dx}$ par rapport à .

2-Calculer l'accélération $\vec{\gamma}_{(M/R)}$.

3-En déduire que la composante de l'accélération selon Oy peut se mettre sous la forme :

$$\gamma_y=\frac{V^2f''}{(1+f'^2)^2}$$

Où $f''(x)$ étant la dérivée seconde de $f(x)$ par rapport à .

3.7.1-Corrigé

1-Calculer la vitesse $\vec{V}_{(M/R)}$:

On a :

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

$$\vec{V} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath}$$

On a :

$y = f(x)$

$$\Rightarrow \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{df}{dt} = \frac{df}{dx}.\frac{dx}{dt}$$

$\Rightarrow \dot{y} = \dot{x}f'$

$\Rightarrow \vec{V} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{x}f'\vec{\jmath}$

$V = \dot{x}\sqrt{1 + f'^2}$

2-Calculer l'accélération $\vec{\gamma}_{(M/R)}$:

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{x}\vec{\imath} + \frac{d}{dt}(\dot{x}f')\vec{\jmath}$$

On a :

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}f') = \ddot{x}f' + \dot{x}\frac{df'}{dt}$$

$$\frac{df'}{dt} = \frac{df'}{dx}.\dot{x} = \dot{x}f''$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\dot{x}f') = \ddot{x}f' + \dot{x}^2 f''$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{x}\vec{\imath} + (\ddot{x}f' + \dot{x}^2 f'')\vec{\jmath}$$

$\Rightarrow \gamma_y = \ddot{x}f' + \dot{x}^2 f''$

D'un autre coté, on a :

$V = \dot{x}\sqrt{1 + f'^2}$

$$\Rightarrow \dot{x}^2 = \frac{V^2}{1 + f'^2}$$

On dérive, on obtient :

$$2\dot{x}\ddot{x} = \frac{-2V^2\dot{x}f'f''}{(1 + f'^2)^2}$$

$$\Rightarrow \ddot{x} = \frac{-V^2 f'f''}{(1 + f'^2)^2}$$

Donc,

$$\Rightarrow \gamma_y = \frac{-V^2 f'^2 f''}{(1+f'^2)^2} + \frac{V^2 f''}{1+f'^2}$$

$$\Rightarrow \gamma = \frac{V^2 f''}{(1+f'^2)^2}.$$

4-Exercices supplémentaires sans solution

4.1-Exercice 01

Deux voitures A et B circulent sur deux routes qui font un angle θ ente eux avec les vitesses $V_A = 90Km/h$ et $V_B = 70Km/h$ respectivement. 1-Calculer la vitesse de A par rapport à B en fonction de $V_A, V_B et\ \theta$. Appliquer pour : a- les deux routes sont parallèles(en même direction), b-les deux routes sont perpendiculaires, c- les deux voitures roulent sur deux directions opposées.

4.2-Exercice 02

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille sans vitesse initiale. La chute de celle-ci s'effectue à la verticale selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération .

1-Quelle est la vitesse et la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse V_0 et passant à la verticale de chute au moment de lacher.

2-Quelle est la vitesse et la trajectoire de la bille dans le même référentiel si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération γ ? (Représenter dans chaque cas la trajectoire demandée).

4.3-Exercice 03

La vitesse du son en air calme à $25°\ C$ est $358\ m/s$.

Quelle est la vitesse mesurée par un observateur se déplaçant à la vitesse de $90\ km/h$?

1-En s'éloignant de la source

2-Dans la direction de la source

3-Perpendiculairement à direction de propagation dans l'air

4-Dans une direction telle que le son semble se propager perpendiculairement à l'observateur mobile

On supposera que la source est immobile par rapport au sol.

4.4-Exercice 04

soit un repère mobile $R'(o', x', y', z')$ en mouvement par rapport à un autre fixe $R(o, x, y, z)$ avec une vitesse $\overrightarrow{V_e}\,(1{,}0{,}0)$. On suppose que $x', y'\ et\ z'$ sont les coordonnés d'un point matériel M dans le repère R' tel que : ($x' = 6t^2 + 3t$; $y' = -3t^2\ et\ z' = 3$), on suppose qu'à l'instant $t = 0$ ce point est a la position $O(0{,}0{,}0)$ dans le repère fixe R.

a) Donner la vitesse relative de ce point ainsi que sa vitesse absolue.

b) En déduire les coordonnés du point M dans le repère fixe R.

c) Déterminer l'expression de l'accélération relative et absolue.

4.5-Exercice 05

Dans le plan , une droite Ox' tourne autour de Oz avec une vitesse angulaire constante. Un mobile M se déplace sur la droite Ox' suivant la loi : $r = a \sin\theta \ avec\ \theta = wt\ et\ a = cte$.

1. Déterminer à l'instant t en fonction de a et w, la vitesse relative et la vitesse d'entraînement de M par leurs projections dans le repère mobile $x'Oy'$. En déduire la vitesse absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant.

2. Déterminer à l'instant t en fonction de a et w, l'accélération relative, l'accélérationd'entraînement et l'accélération complémentaire de M par leurs projections dans le repère mobile $x'Oy'$. En déduire l'accélération absolue exprimée dans cette même base de projection, et montrer que le module de celle-ci est constant