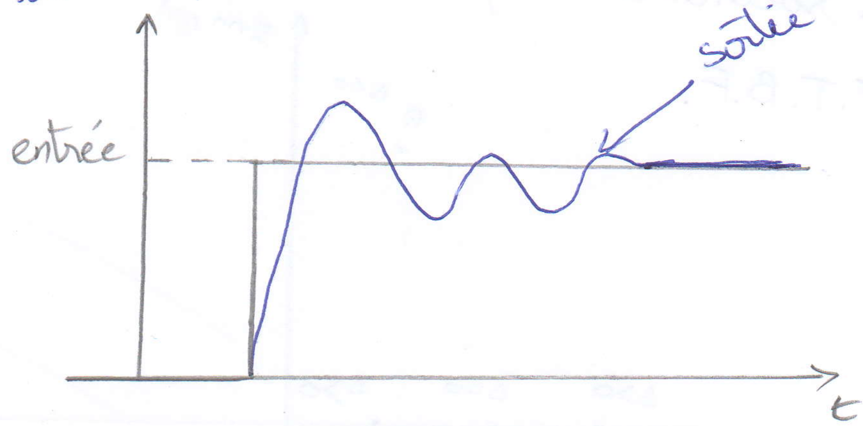
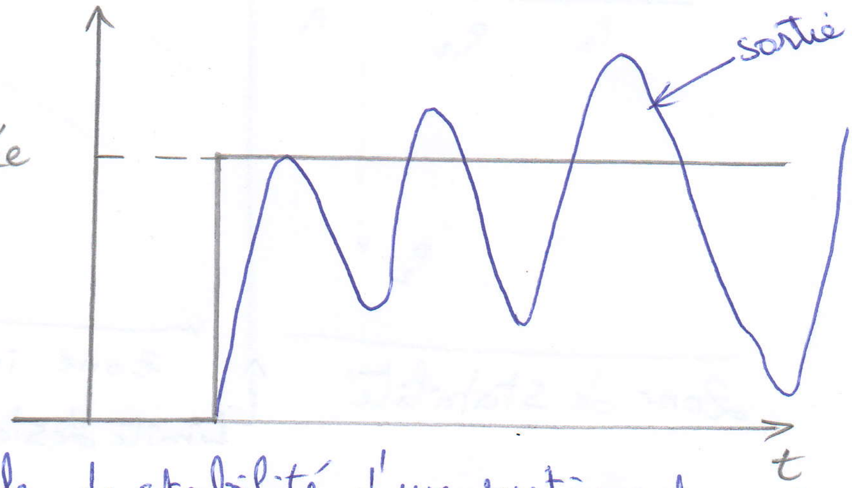
CHAP01 : Rappels : Stabilité des systèmes en boucle fermé dans le domaine fréquentiel.

* Notion de stabilité et définition :

Définition : on dit que le système est stable si pour une entrée bornée, la sortie reste bornée quelles que soient les perturbations

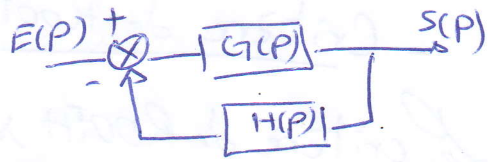




* Condition fondamentale de stabilité d'un système Asservi :

Soit le système Asservi avec Retour Non unitaire (S.A.R.N.U)

La fonction de transfert en Boucle ouverte (F.T.B.O)



$T(P) = G(P) \cdot H(P)$.

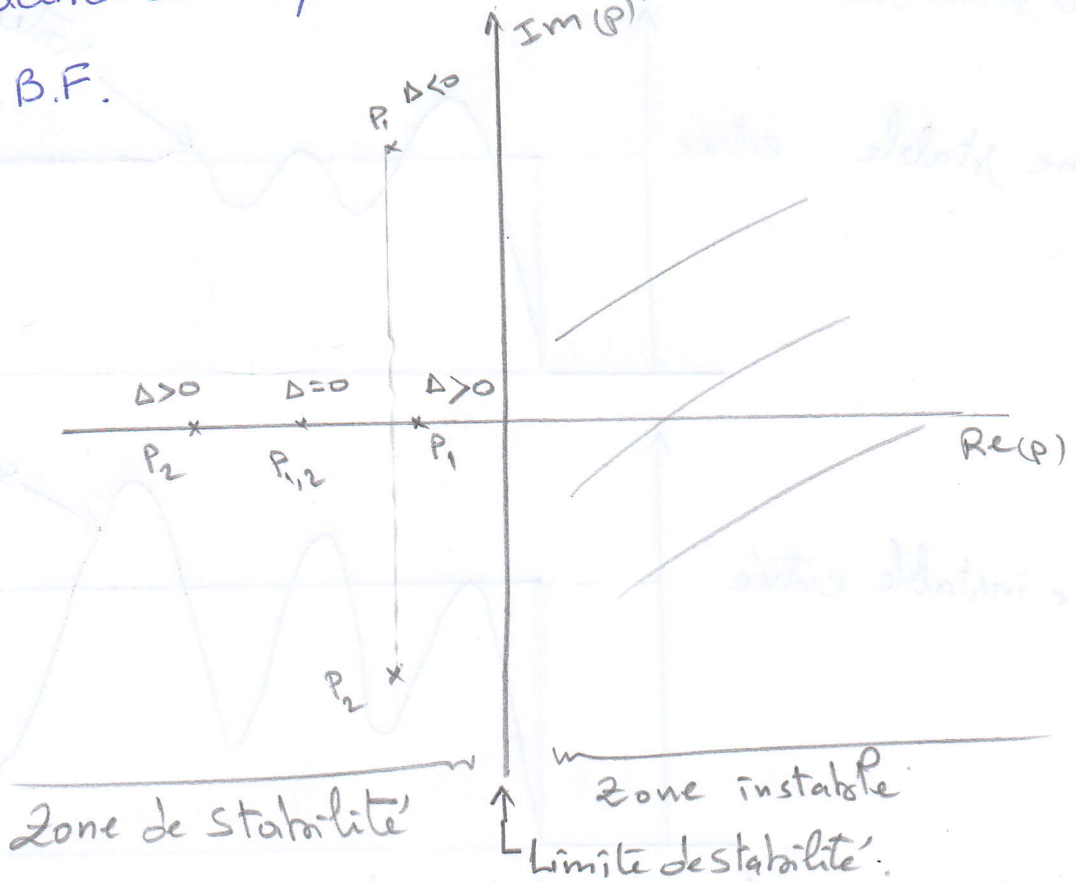
La Fonction de tansfert en Boucle fermée

(F.T.B.F) $F(P) = \dfrac{S(P)}{E(P)} = \dfrac{G(P)}{1+T(P)}$

$1+T(P)$: L'équation caractéristique.

Les conditions nécéssaires et suffisante de stabilité d'un sys du 1^{er} et $2^{ème}$ ordre est que les pôles de la F.T.B.F soient à <u>parties Réelles</u> négatives.

* Pôle de $F(P) < 0 \Rightarrow$ système est stable.
* pôle de $F(P) > 0 \Rightarrow$ système est instable.
* Les racines de l'equt caractéristique $1+T(P)=0$ sont les pôles de F.T.B.F.



* <u>Critère algébrique de stabilité</u> :

- <u>Critère de RootH</u> :

Le critère de ROOTH s'applique sans restriction à tous les systèmes linéaires. Soit un système asservi dont l'equt caractéristique $1+T(P)=0$.

$a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \dots + a_2 P^2 + a_1 P + a_0 = 0.$

Avant d'appliquer le critère de ROOTH il faut vérifier les signes de a_i.

<u>1er test</u> : si les a_i ne sont pas de même signe ou si certains sont nuls (l'éqnt caractéristique a des racines à droite dans le plan complexe $\Rightarrow$ à partie réelle positive donc, le système est instable et pas la peine d'aller la loi.

<u>2ème test</u> : si les a_i sont tous de m̂ signe on ne peut connaître la place des pôles après l'examen de la 1er colonne du Tableau de ROOTH.

<u>Construction de la table de ROOTH</u> :

1er ligne p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6} …
2e ligne p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}
p^{n-2}	R_1	R_2	R_3	
⋮	R_4	R_5		
p^0				

$$R_1 = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-2}) - (a_{n-3} \cdot a_n)}{a_{n-1} \ (\text{Pivot})}.$$

$$R_3 = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-6}) - (a_{n-7} \cdot a_n)}{a_{n-1}}$$

$$R_2 = \frac{(a_{n-1} \cdot a_{n-4}) - (a_{n-5} \cdot a_n)}{a_{n-1}}$$

$$R_4 = \frac{(R_1 \cdot a_{n-3}) - (R_2 \cdot a_{n-1})}{R_1 \ \text{Pivot}}.$$

$$R_5 = \frac{(R_1 \cdot a_{n-5}) - (R_3 \cdot a_{n-1})}{R_1}.$$

La stabilité du système considéré est alors assurée si les termes de la 1^{er} colonne de la table de ROOTH sont tous de m̂ signe, Alors les racines de l'eqnt caractéristiques sont tous à partie réelle négative $\Rightarrow$ système stable.

* Si dans la lecture de haut en bas de cette même colonne il apparait x changement de signe $\Rightarrow$ l'eqnt caractéristique possède x racines à parties réelles positives $\Rightarrow$ sys instable.

* Si tous les coéfficiants d'une ligne sont nules $\Rightarrow$ le système possède des pôles imaginaires pures conjugués $\Rightarrow$ sys juste oscillant

Exemple 1 :

$$F_1(p) = \frac{1}{p^3+2p^2+p+1}$$

C.N.N.S $\Rightarrow$ les coef sont de m̂ signe.

C.N.S $\Rightarrow$ Table de ROOTH.

p^3	1	1
p^2	2	1
p	$\frac{(2)(1)-(1)(1)}{2} = \frac{1}{2}$	0
p^0	$\frac{\frac{1}{2}(1)-(2)(0)}{\frac{1}{2}}$ 1	

Toute les coef de la 1^{er} colonne sont de m̂ signe $\Rightarrow$ sys stable.

Exemple 02 :

$$F_2(p) = \frac{K}{p^4 + 2p^3 + p^2 + 4p + 2}$$

C.N.N.S → verifier.

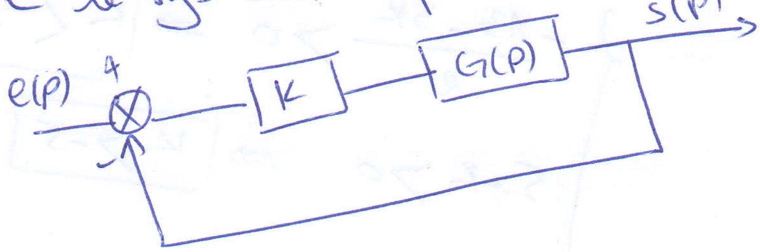
p^4	1	1	2
p^3	2	4	0
p^2	-1	2	0
p	8	0	
p^0	2		

On a deux changement de signe ⇒ On a 2 racines à partie réelle positive.

⇒ le sys instable.

Exercice d'application

On considère le sys donné par le schéma bloc suivant.



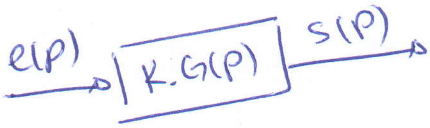
$$G(p) = \frac{1}{3p^3 + 2p^2 + p + 5}$$

1) Le système en B.O est il stable ?

2) pour quelle valeur de K le système en B.F sera stable.

Solution :

Eqt caract : $3p^3 + 2p^2 + p + 5 = 0$ C.N.N.S est verifier.

F.T.B.O 

$$K.G(p) = \frac{K}{3p^3 + 2p^2 + p + 5}$$

Table de ROOTH :

p^3	3	1	0
p^2	2	5	0
p^1	$\frac{-13}{2}$	0	
p^0	5		

On 2 changement de signe

$\Rightarrow$ 2 racines à partie réelle positive

donc le sys en B.O est instable.

* La F.T.B.F :

$$F(p) = \frac{K\,G(p)}{1 + K.G(p)} = \frac{K}{3p^3 + 2p^2 + p + 5 + K}$$

eqt caract : $3p^3 + 2p^2 + p + 5 + K$.

C.N.N.S : $5 + K > 0 \Rightarrow \boxed{K > -5}$

Table de ROOTH :

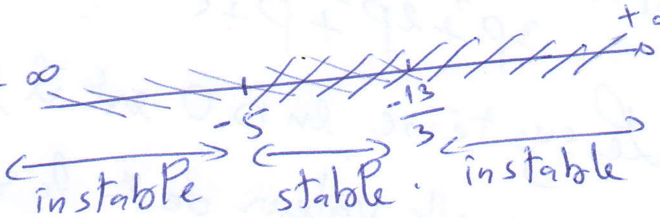
p^3	3	1	
p^2	2	$5+K$	
p^1	$\frac{-13-3K}{2}$	0	
p^0	$5+K$		

pour que le sys soit stable :

$$\begin{cases} \frac{-13-3K}{2} > 0 \Rightarrow \boxed{K < -\frac{13}{3}} \\ 5 + K > 0 \Rightarrow \boxed{K > -5} \end{cases}$$

$K > -5 \Rightarrow K \in]-5, +\infty[$

$K < -\frac{13}{3} \Rightarrow K \in]-\infty, \frac{-13}{3}[$



pour avoir un système stable en BF on doit introduire un gain de valeur $K \in]-5, -\frac{13}{3}[$.

* Cas d'une ligne nulle :

p^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}
p^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}
p^{n-2}	α_1	α_2	α_3
$\vdots$			
p^0			

les coef d'une lignes tous nuls $\Rightarrow$ sys juste Oscillant.

Le sys possede des racines imaginaires pures Conjugués.

Ces racines sont Calculés Comme suit :

$$\alpha_1 p^n + \alpha_2 p^{n-2} + \dots = 0 .$$

Exemple 1 :

$$D(p) = p^3 + 10p^2 + 16p + 160 = 0 .$$

p^3	1	16
p^2	10	160
p	0	0
p^0	0	

Le système est juste Oscillant donc on a 2 racines imaginaires pures : $10p^2 + 160 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{1,2} = \pm 4j}$.

Exemple 02 :

$$D(p) = p^4 + p^3 + 5p^2 + 4p + 4 = 0$$

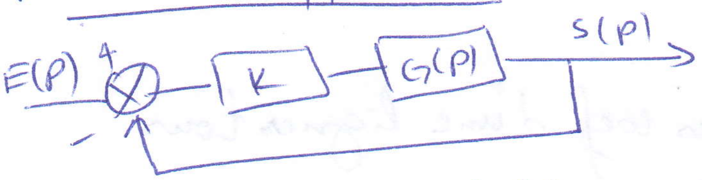
p^4	1	5	4
p^3	1	4	0
p^2	1	4	0
p^1	0	0	0
p^0	4		

$\Rightarrow$ le sys est juste Oscillant

$\Rightarrow$ 2 racines imaginaires pures

$p^2 + 4 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{1,2} = \pm 2j}$

Exercice d'application :



$$G(p) = \frac{1}{p^3 + 2p^2 + 4p}$$

① Etudier la stabilité en B.F.

② Déterminer les pôles pour $K = 8$.

Solution :

F.T.B.F. $F(P) = \frac{K \cdot G(P)}{1 + K \cdot G(P)} = \frac{K}{P^3 + 2P^2 + 4P + K}$.

Eq caract : $P^3 + 2P^2 + 4P + K$

C.N.N.S $\Rightarrow K > 0$.

p^3	1	4
p^2	2	K
p	$\frac{8-K}{2}$	0
p^0	K	

le sys est stable si

$$\begin{cases} \frac{8-K}{2} > 0 \\ K > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} K < 8 \\ K > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow K \in]0, 8[$.

② pour $K = 8$ (limite de stabilité) $\Rightarrow$ 2 pôles Im pures.

Eq caract : $P^3 + 2P^2 + 4P + 8$.

p^3	1	4
p^2	2	8
p^1	0	
p^0	8	

$2P^2 + 8 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{1,2} = \pm 2j}$.

Lieu de transfert :

* **Diagramme de Bode** : Le passage au domaine fréquentiel s'effectue en remplaçant $p = j\omega$, $\omega = 2\pi f$.

$$T(j\omega) = A(\omega)\, e^{j\varphi\omega}.$$

$A(\omega)$: module de $T(j\omega)$ $|T(j\omega)|$

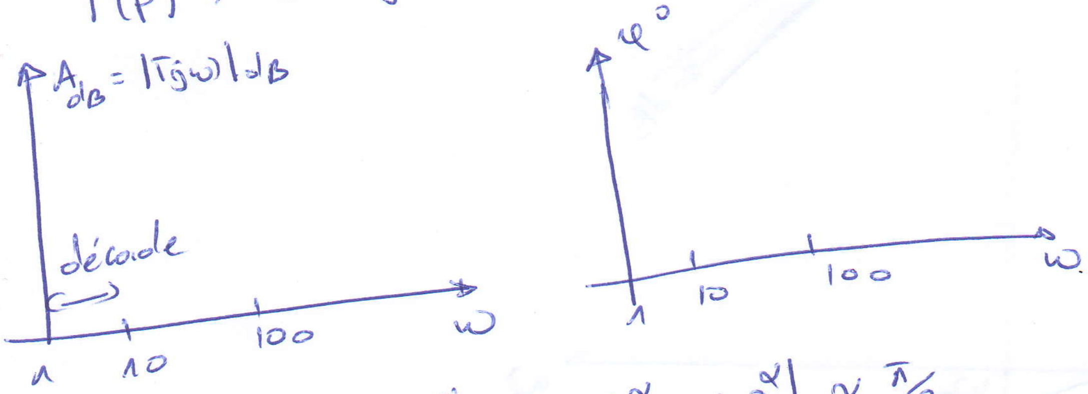
$\varphi(\omega)$: argument de $T(j\omega)$. $\arg(T(j\omega))$.

* L'amplitude est reportée suivant une échelle linéaire en décibels.

$$A(\omega) = |T(j\omega)| = 20 \log |T(j\omega)|.$$

* Pour la phase φ est reportée suivant une échelle linéaire exprimée en degré et ω en échelle logarithmique en abscisse.

$$T(p) \longrightarrow T(j\omega) \longrightarrow |T(j\omega)|_{dB} \text{ et } \varphi(\omega)$$



Note : $T(p) = p^{\alpha} = (j\omega)^{\alpha} = \omega^{\alpha} \underline{| \alpha . \pi/2}$

$$20 \log \omega^{\alpha} = 20 . \alpha . \log \omega .$$

Exemples : Tracer le diagramme de Bode de la fonction suivante : $T(p) = \dfrac{K}{1 + \tau p}$ avec $\tau = \dfrac{1}{\omega_0}$

$\omega_0 = \dfrac{1}{\tau}$ (pulsation de coupure).

$$T(j\omega) = \frac{K}{1+\tau j\omega} = \frac{K}{\sqrt{1+\tau^2\omega^2}} \underline{\left| -\operatorname{artg} \tau\omega \right.}$$

$$A_{dB} = 20\log \frac{K}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = 20\log K - 20\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right).$$

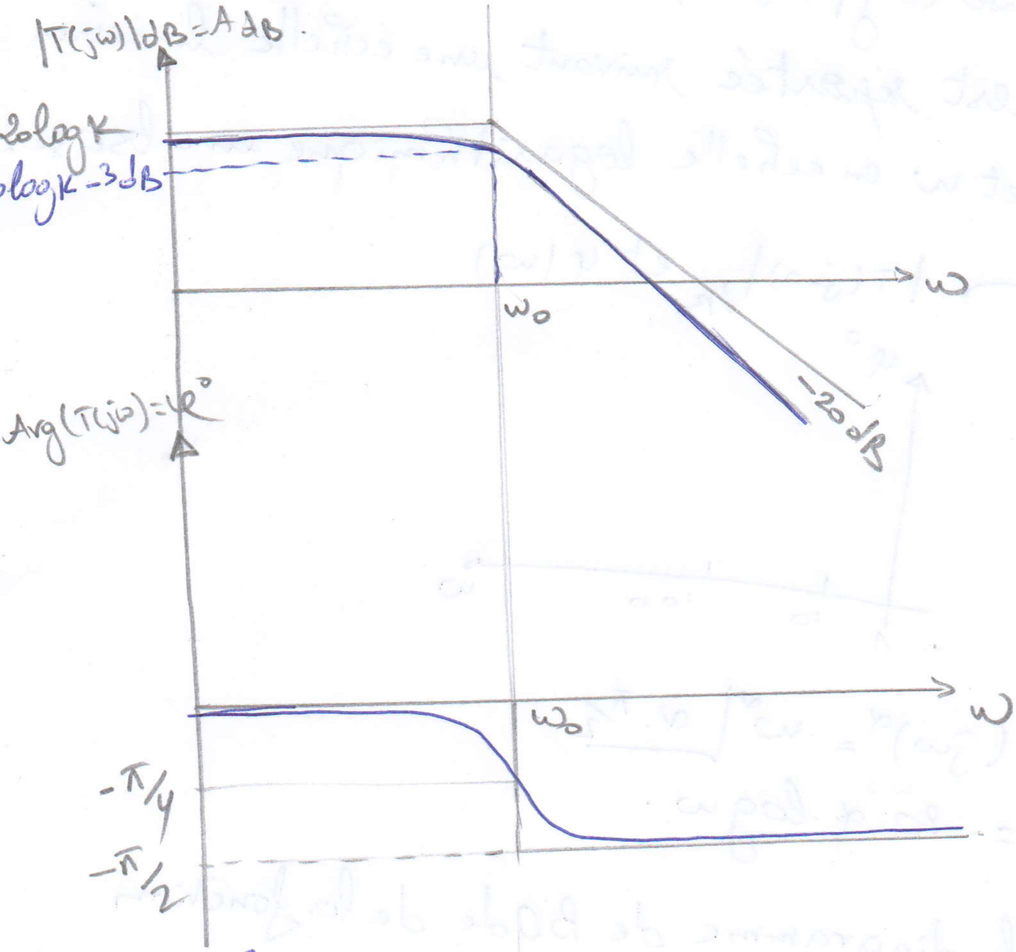
$$Arg(T(j\omega)) = -Actg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

1^{er} cas : $\omega << \omega_0$

$$|T(j\omega)|_{dB} = A_{dB} = 20\log K. \qquad Arg(T(j\omega)) = 0.$$

$2^{ème}$ cas : $\omega >> \omega_0$.

$$A_{dB} = 20\log K - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \qquad Arg(T(j\omega)) = -\frac{\pi}{2}.$$



Exemple 02 :

$$T(P) = \frac{1}{1+10P}.$$

Tracer le diagramme de Bode.

Solution :

$w_0 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{10} = 0,1.$

$T(p) = \frac{1}{1+10p} \Rightarrow T(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+100\omega^2}} \angle -\text{arctg}\, 10\omega.$

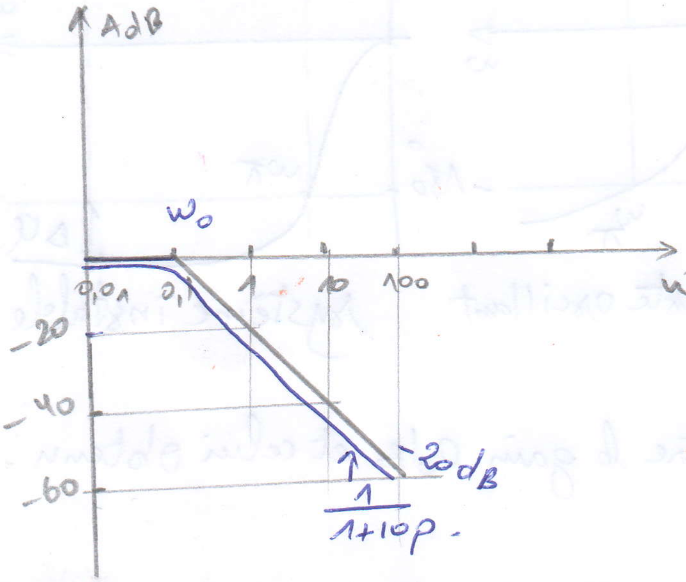
pour $w_0 < 0,1 \Rightarrow A_{dB} \simeq 0.$

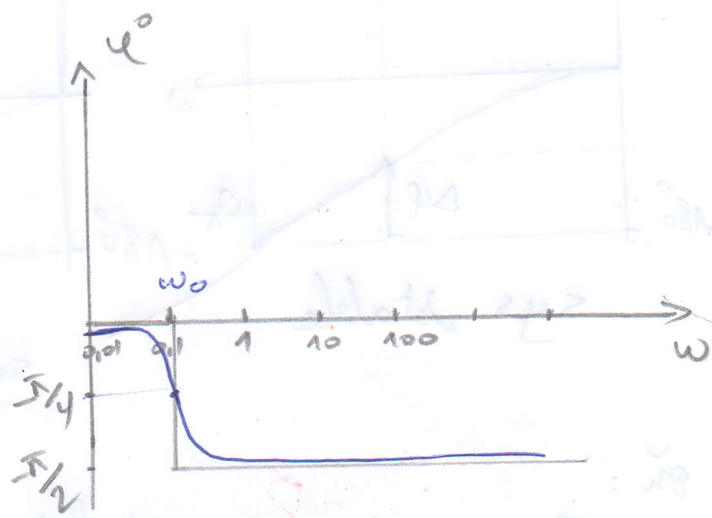
$A_{dB} = -20 \log \sqrt{1+100\omega^2}$

si $\omega = 1 \Rightarrow A_{dB} = -20 dB$

$\omega = 10 \Rightarrow A_{dB} = -40 dB$ et $\varphi^\circ = -\pi/2.$

$\omega = 100 \Rightarrow A_{dB} = -60 dB.$

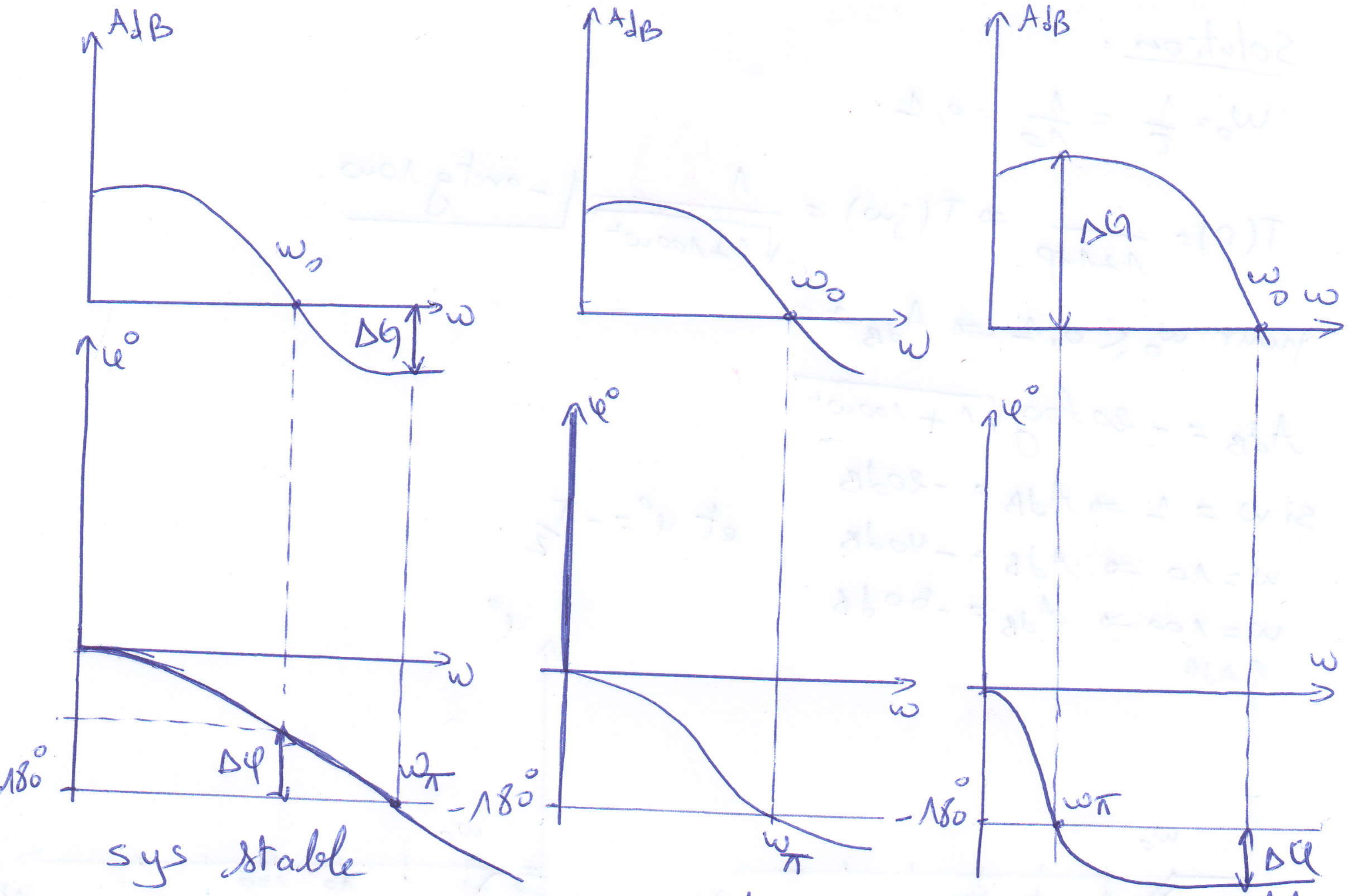




théoreme de stabilité des systèmes en B.F :

* Stabilité dans le plan de Bode :

Un système est stable si la pulsation w_0 pour laquelle $20 \log |T(j\omega)| = 0 dB$ lui correspond un déphasage φ supérieur à $(-180°)$ de la réponse en fréquence en boucle ouverte.



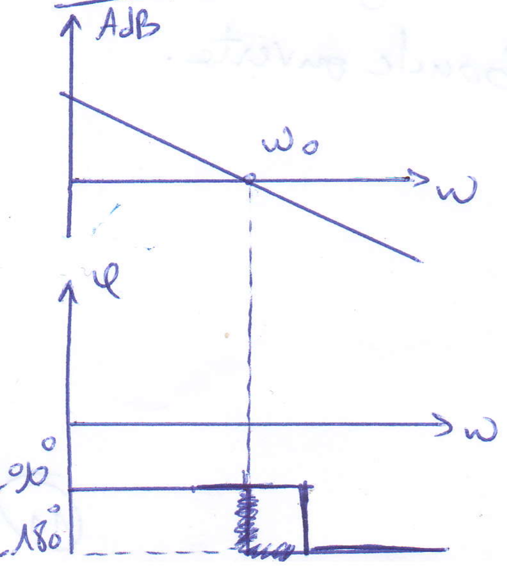
sys stable — sys juste oscillant — système instable.

où :

ΔG : La marge du gain : est l'écart entre le gain 0 dB et celui obtenu pour la phase $-180°$.

$\Delta\varphi$: La marge de phase : est l'écart entre la phase $-180°$ et celle obtenue pour le gain 0 dB.

Exemple 1 :

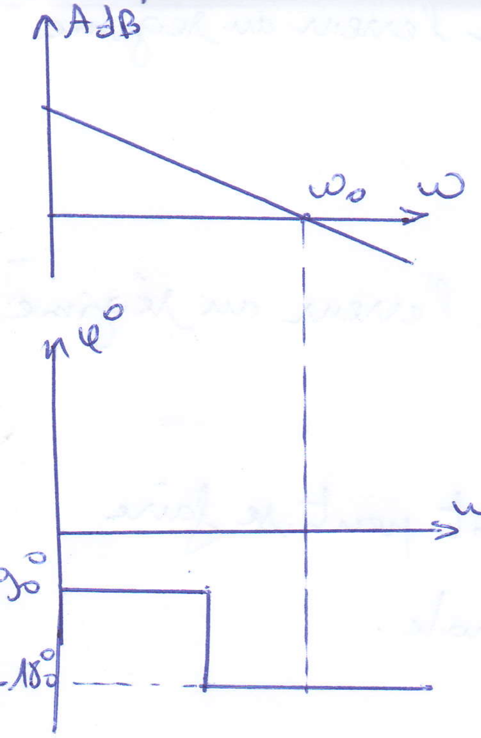


$\omega = \omega_o$ pulsation pour laquelle le module en dB = 0.

le système est stable car

$$\varphi = -90° > -180°.$$

Exemple 2 :



La phase qui correspond à 0 dB est $\varphi = -180°$ $\Rightarrow$ système juste oscillant.

Remarque :

→ La marge du gain $\boxed{\Delta G = -20\log(T(j\omega_\pi))}$.

→ La marge de phase $\boxed{\Delta\varphi = \pi + \arg(T(j\omega_0))}$

* Précision :

Déf : La précision est définit comme étant la quantification de l'écart vrai (ou erreur) "ε" existant entre la grandeur de référence Y_{ref} et la grandeur asservie (ou de sortie).

$$\boxed{\varepsilon(t) = Y_{ref}(t) - y(t)}$$

Le système idéal se définit par celui pour lequel l'écart est nul en toutes circonstance $\varepsilon(t) = 0$.

* **Précision dynamique :**

La Précision dynamique est carctérisée par l'erreur au régime transitoire.

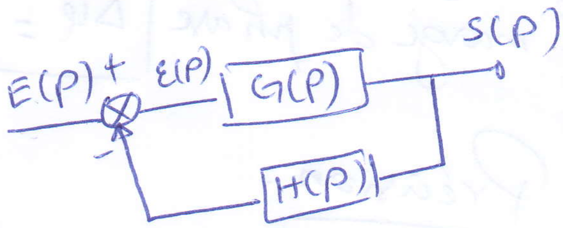
* **Précision statique :**

La Précision statique est caractérisée par l'erreur au régime permanent.

* Le calcul d'erreur au régime permanent peut se faire en utilisant le théorème de la valeur finale.

$$\boxed{\varepsilon(\infty) = \lim_{t \to \infty} \varepsilon(t) = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p)}.$$

L'expréssion de l'erreur :



1er Cas :

$T(p) = G(p) \cdot H(p)$.

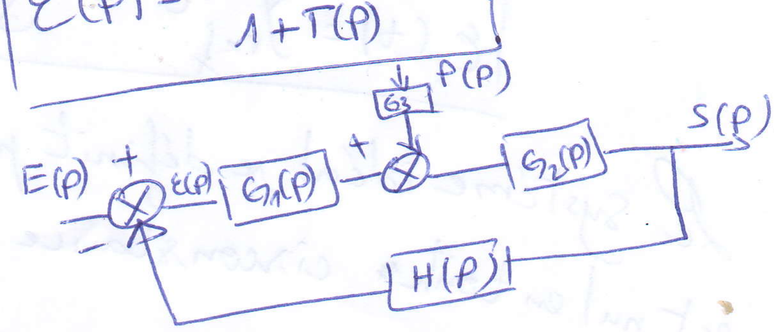
$\varepsilon(p) = E(p) - H(p) \cdot S(p)$ — (1)

$S(p) = \varepsilon(p) \cdot G(p)$. — (2)

(2) dans (1)

$\varepsilon(p) = E(p) - H(p) \cdot \varepsilon(p) \cdot G(p)$.

$$\varepsilon(p)\,[1 + \underbrace{H(p) \cdot G(p)}_{T(p)}] = E(p) \Rightarrow \boxed{\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + T(p)}}$$



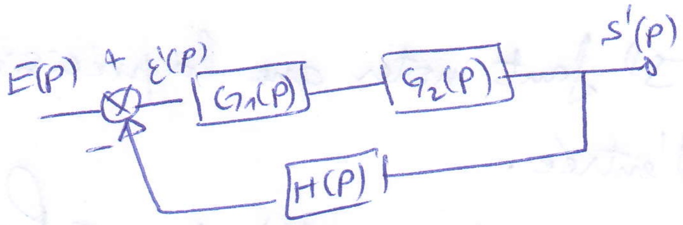
2ème Cas :

$S(p) = S'(p) + S''(p)$

$S'(p)$ si $P(p) = 0$ $(\varepsilon'(p))$

$S''(p)$ si $E(p) = 0$ $(\varepsilon''(p))$

* Si $P(p) = 0 \Rightarrow S'(p) = ?$



$$\frac{S'(p)}{E(p)} = \frac{G_1(p) \cdot G_2(p)}{1 + G_1 G_2 \cdot H(p)}$$

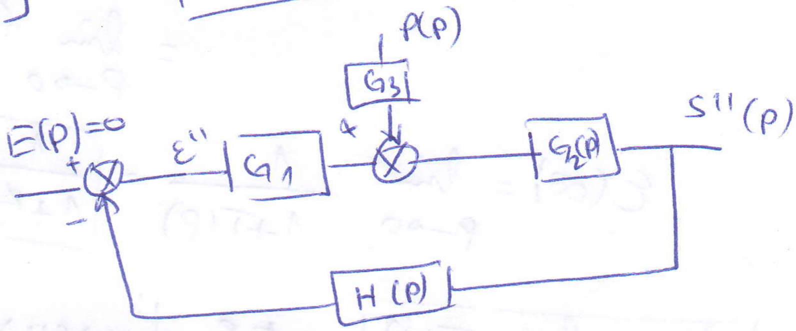
$$\boxed{S'(p) = E(p) \cdot \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + T(p)}}$$

$$\varepsilon'(p) = E(p) - S'(p) \cdot H(p)$$

$$= E(p) - E(p) \cdot \frac{G_1 \cdot G_2}{1 + T(p)} H(p)$$

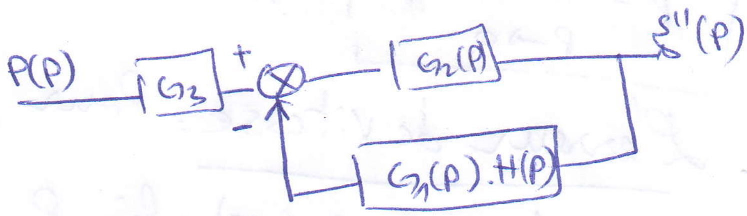
$$= E(p) \left[1 - \frac{\overbrace{G_1 G_2 (H(p)}^{T(p)}}{1 + T(p)} \right] \Rightarrow \boxed{\varepsilon'(p) = \frac{E(p)}{1 + T(p)}}$$

* Si $E(p) = 0 \Rightarrow S''(p) = ?$



$$\varepsilon''(p) = E(p) - H(p) \cdot S''(p).$$

$$\boxed{\varepsilon''(p) = -H(p) \cdot S''(p)}$$



$$\frac{S''(p)}{P(p)} = G_3 \cdot \frac{G_2}{1 + G_1 G_2 H(p)}$$

$$= \frac{G_2 \cdot G_3}{1 + T(p)}$$

$$S''(p) = P(p) \frac{G_2 \cdot G_3}{1 + T(p)}.$$

$$\boxed{\varepsilon''(p) = -H(p) \cdot \frac{P(p) \cdot G_2 G_3}{1 + T(p)}}$$

où : $\varepsilon(p) = \varepsilon'(p) + \varepsilon''(p)$; $S(p) = S'(p) + S''(p)$

$$\boxed{\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon'(p) + \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon''(p)}$$

Il faut noter que la précision dépend de la nature du signal d'entrée.

$E(p)$
- $\to \frac{1}{p} \Rightarrow e(t) = 1$ Echelon — Erreur de position
- $\to \frac{1}{p^2} \Rightarrow e(t) = t$ Rampe — " de vitesse
- $\to \frac{1}{p^3} \Rightarrow e(t) = \frac{t^2}{2}$ Parabole. — " d'accélération.

1 <u>L'erreur de Position</u>: Pour une entrée Echelon.

$$E(p) = \frac{1}{p} \Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} p\,\varepsilon(p)$$

$$= \lim_{p \to 0} \cancel{p} \frac{\frac{1}{\cancel{p}}}{1+T(p)}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{1+T(p)} = \boxed{\frac{1}{1+K_p}}$$ erreur de position.

$$\boxed{K_p = \lim_{p \to 0} T(p)}$$ cste d'erreur de position.

2 <u>L'erreur de vitesse</u>: Pour une entrée Rampe:

$$E(p) = \frac{1}{p^2} \Rightarrow \varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} p \frac{\frac{1}{p^2}}{1+T(p)} = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p(1+T(p))}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{pT(p)}$$

$$\boxed{\varepsilon(\infty) = \frac{1}{K_v}}$$ erreur de vitesse.

$$\boxed{K_v = \lim_{p \to 0} p.T(p)}$$ cste d'erreur de vitesse.

3 Erreur d'accélération : pour une entrée parabole :

$$E(p) = \frac{1}{p^3}$$

$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} p \, \frac{\frac{1}{p^3}}{1+T(p)} = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p^2 + p^2 T(p)}$$

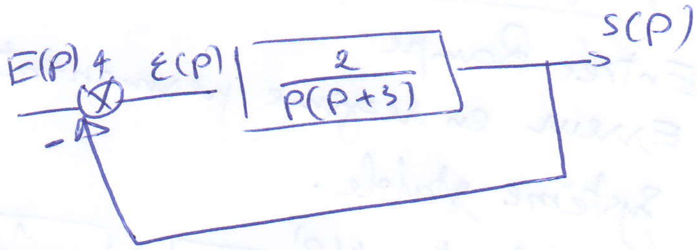
$$\varepsilon(\infty) = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p^2 T(p)}$$

$$\boxed{\varepsilon(\infty) = \frac{1}{K_a}}$$ erreur d'accélération

$$\boxed{K_a = \lim_{p \to 0} p^2 T(p)}$$ csté d'erreur d'accélération.

Exemple d'application :

Déterminer l'erreur pour les 3 entrées [Echelon, Rampe et Parabole]



Solution :

1// **Entrée Echelon :** $E(p) = \frac{1}{p}$.

$$H(p) = 1 \; ; \; G(p) = \frac{2}{p(p+3)} \; ; \; T(p) = G(p) \cdot H(p) = \frac{2}{p(p+3)}$$

$$\varepsilon(\infty) = \frac{1}{1+K_p} \; ; \; K_p = \lim_{p \to 0} T(p) = \lim_{p \to 0} \frac{2}{p(p+3)} = \infty .$$

$$\boxed{\varepsilon(\infty) = \frac{1}{1+K_p} = 0}$$ Erreur de position.

2// **Entrée Rampe :** $E(p) = \frac{1}{p^2}$

$$\varepsilon(\infty) = \frac{1}{K_v}$$

$$K_v = \lim_{p \to 0} p T(p) = \lim_{p \to 0} \cancel{p} \cdot \frac{2}{\cancel{p}(p+3)} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{\varepsilon(\infty) = \frac{1}{K_v} = \frac{3}{2}}$$ erreur de vitesse.

* Entrée parabole : $E(p) = \frac{1}{p^3}$

$\varepsilon(\infty) = \frac{1}{K_a}$.

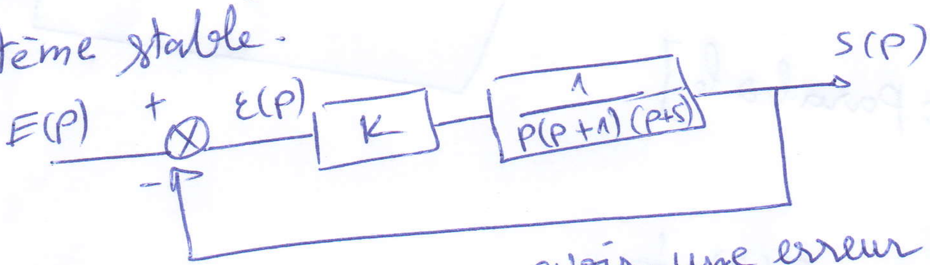
$$K_a = \lim_{p \to 0} p^2 T(p) = \lim_{p \to 0} p^{\cancel{2}} \frac{2}{\cancel{p}(p+3)} = 0.$$

$$\boxed{\varepsilon(\infty) = \frac{1}{K_a} = \infty}$$ erreur d'accélération.

Dilemme stabilité_Précision :

Les spécification exigées :

1// Entrée Rampe
2// Erreur en régime permanent $\leq 1\%$
3// Système stable.



1// La valeur du gain K pour avoir une erreur en Régime permanent

$\varepsilon(\infty) \leq 1\%$.

Entrée Rampe : $\varepsilon(\infty) = \frac{1}{K_v}$.

$$K_v = \lim_{p \to 0} p T(p) = \lim_{p \to 0} \cancel{p} \frac{K}{\cancel{p}(p+1)(p+5)} = \frac{K}{5}$$

$$K_v = \frac{K}{5} \Rightarrow \boxed{\varepsilon(\infty) = \frac{5}{K}}.$$

$$\varepsilon(\infty) \leq 1\% \Rightarrow \frac{5}{K} \leq 1\% \Rightarrow \frac{5}{K} \leq 0{,}01 \Rightarrow \boxed{K \geq 500}.$$

* Pour avoir un $\varepsilon(\infty) \leq 1\%$. $\Rightarrow \boxed{K \geq 500}$.

2// La condition sur K pour avoir la stabilité :

ROOTH :

$$1+T(P) = 1 + \frac{K}{P(P+1)(P+5)} = \frac{P(P+1)(P+5)+K}{P(P+1)(P+5)}$$

$$1+T(P)=0 \Rightarrow P(P+1)(P+5)+K=0.$$

$$\Rightarrow P^3+5P^2+6P+K=0.$$

P^3	1	6
P^2	5	K
P^1	$\frac{30-K}{5}$	0
P^0	K	

$\frac{30-K}{5} > 0 \Rightarrow \boxed{K<30}$

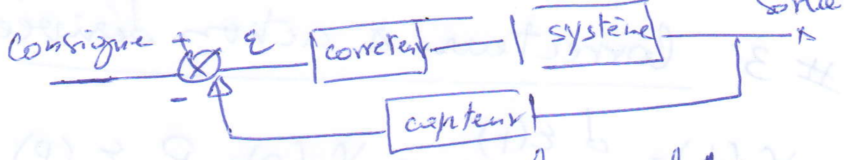
$K>0 \Rightarrow \boxed{0<K<30}$

Le système est stable pour $0<K<30$.

Donc : pour Précision $K \geqslant 500$.
" stabilité $0<K<30$ } Dielemme stabilité précision.

Et pour réduir ce dielemme on utilise les correcteurs

Les correcteurs :



- Objectif : Le correcteur et chargé d'améliorer la qualité de l'asservissement. Il doit en particulier :

* stabiliser ou améliorer la stabilité du système
* Diminuer l'erreur statique.
* Diminuer le temps de réponse.