Usinage des surfaces gauches

Master II Fabrication mécanique et productique

Par Dr. Slamani Mohamed

Modélisation des courbes

Modélisation des courbes

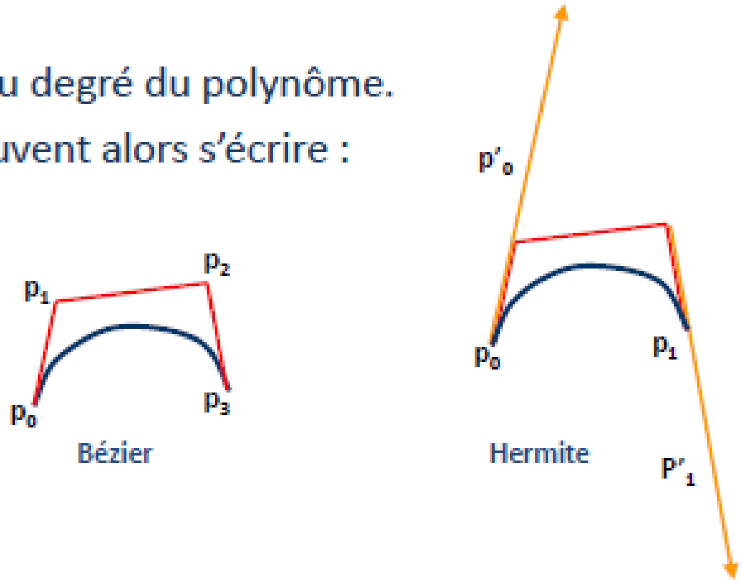
- Introduction
- Courbes de Bézier
- Courbes Spline
- Courbes B-spline
- Courbes NURBS

Courbes de Bézier

- Introduction
  - Même avec la forme de Hermite, l'équation polynomiale de degré 3 reste difficile à manipuler pour un concepteur.
  - Prédire la forme de la courbe en modifiant les tangentes n'est pas intuitif
  - Pierre Bézier, un ingénieur de Renault, propose une nouvelle forme pour cette équation qui porte son nom:
    - Introduit dans Unisurf, le système de modélisation de surfaces dans les années 1960.
    - Initialement pour la définition de panneaux de carrosserie.
    - L'objectif est de fournir un moyen plus intuitif que les courbes de Hermite pour la définition de courbes 3D (pas de valeurs de pentes à spécifier).
    - Utilisation d'un polygone de contrôle en lieu et place des points et des pentes de la courbe de Hermite.
    - Approximation du polygone par un polynôme dont le degré est un de moins que le nombre de sommets du polygone.
      - Polygone de N sommets -> Polynôme de degré N-1
      - Exemple : Polynôme cubique (degré 3) -> Polygone de contrôle à 4 sommets

Courbes de Bézier

- Définition mathématique (courbe polynomiale cubique)
  - Courbe polynomiale cubique de Bézier -> Polygone à 4 points.
  - Correspondance des sommets du polygone de Bézier avec les paramètres de la courbe de Hermite:
    - p_0 et p_3 Bézier équivalent à p_0 et p_1 Hermite
    - p_1 et p_2 Bézier sont définis comme étant au tiers de la longueur des vecteurs de tangence aux points p_0 et p_3
    - La proportion du tiers est l'inverse du degré du polynôme.
    - Les vecteurs tangents en p_0 et p_3 peuvent alors s'écrire :
      - $p_0' = 3(p_1 - p_0)$
      - $p_3' = 3(p_3 - p_2)$



Courbes de Bézier

- Définition mathématique (suite)
  - Substitution dans la forme finale du polynôme de Hermite :

$$p = p(u) = p_0 (1 - 3u^2 + 2u^3) + p_1 (3u^2 - 2u^3) + p_0'(u - 2u^2 + u^3) + p_1'(-u^2 + u^3)$$

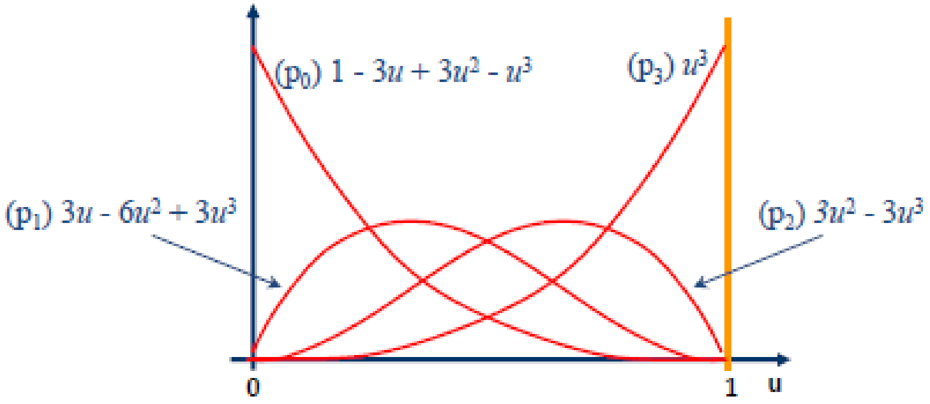
avec

$$p_0' = 3 (p_1 - p_0)$$

$$p_3' = 3 (p_3 - p_2)$$

d'où $p = p(u) = p_0 (1 - 3u + 3u^2 - u^3) + p_1 (3u - 6u^2 + 3u^3) + p_2 (3u^2 - 3u^3) + p_3 (u^3)$

  - Fonctions d'influence correspondantes:



$(P0,P1,P0',P1')$ Hermite $\longrightarrow$ $(P0,P3,3(P1-P0),3(P3-P2))$ Bèzier

Courbes de Bézier

- Représentation matricielle
  - L'équation obtenue peut être exprimée sous forme matricielle:

$$p = p(u) = p_0\,(1 - 3u + 3u^2 - u^3) + p_1\,(3u - 6u^2 + 3u^3) + p_2\,(3u^2 - 3u^3) + p_3\,(u^3)$$

$$\mathbf{p} = \qquad \mathbf{U} \qquad \mathbf{M_B} \qquad \mathbf{P}$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} 1 & u & u^2 & u^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

MB : Matrice des coefficients de Bézier

P : Vecteur des contraintes géométriques de Béziers

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Courbes de Bézier

- Formulation générale de Bézier-Bernstein (Courbe de degré n)

$$p(u) = \sum_{i=0}^{n} \left[\frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} P_i \right]$$

- Fonction d'influence : fonction polynomiale de Bernstein:

$$B_{i,n}(u) = \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i}$$

avec $u \in [0, 1]$

- Ces fonctions peuvent être représentée graphiquement comme précédemment par (n + 1) courbes.

Courbes de Bézier

- Exemple:
  - Formulation générale de Bézier-Bernstein pour une Courbe de degré 3

$$p(u)=\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{n!}{i!(n-i)!}u^{i}(1-u)^{n-i}P_i\right] \qquad p(u)=\sum_{i=0}^{3}\left[\frac{3!}{i!(3-i)!}u^{i}(1-u)^{3-i}P_i\right]$$

$$p(u)=(1-u)^3P_0+3u(1-u)^2P_1+3u^2(1-u)P_2+u^3P_3$$

$$p(u)=(1-3u+3u^2-2u^3)P_0+(3u-6u^2+u^3)P_1+(3u^2-3u^3)P_2+u^3P_3$$

  - Fonction d'influence : fonction polynomiale de Bernstein:

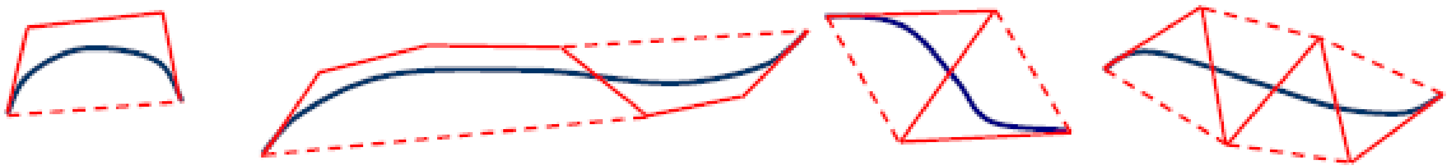
$$B_{i,n}(u)=\frac{n!}{i!(n-i)!}u^{i}(1-u)^{n-i}$$

avec $u \in [0, 1]$

  - Ces fonctions peuvent être représentée graphiquement comme précédemment par (n + 1) courbes.

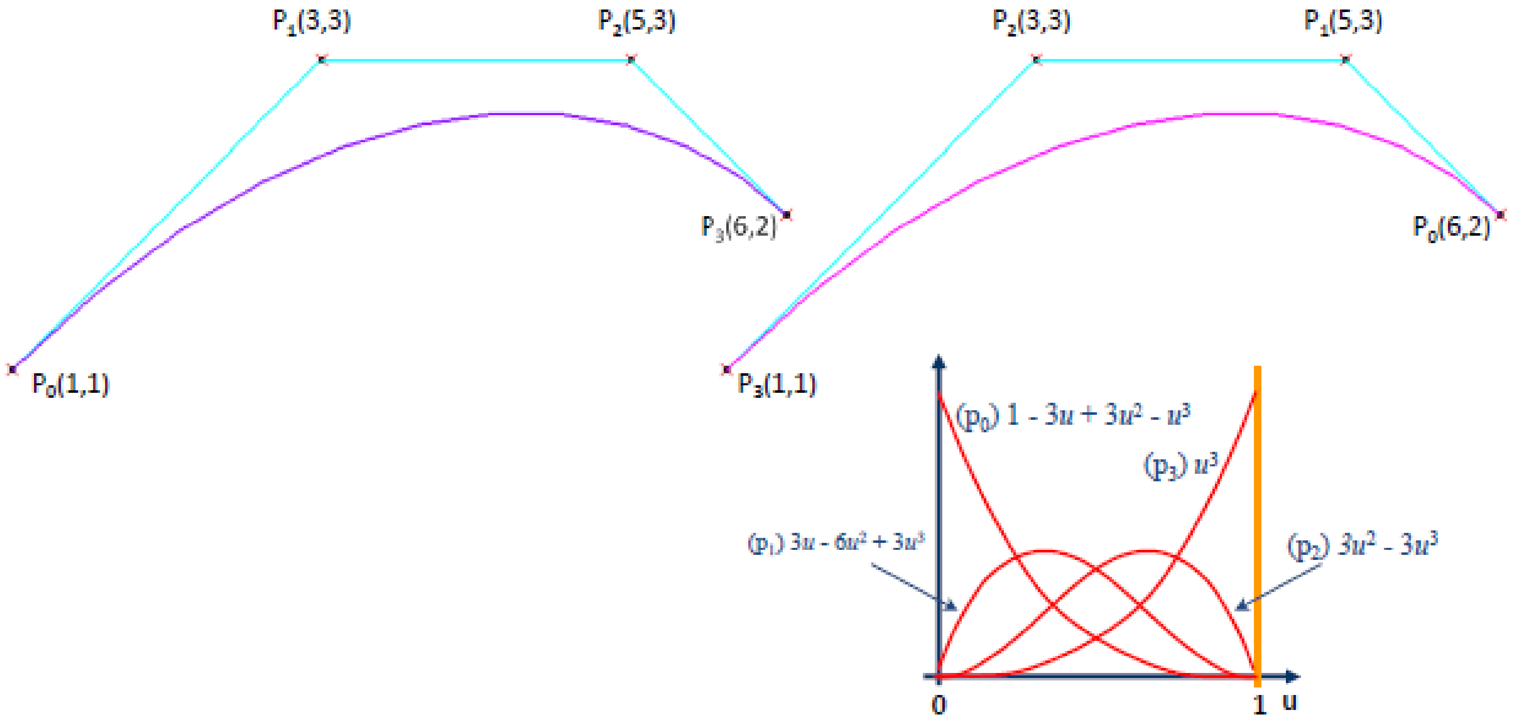
Courbes de Bézier

- Caractéristiques principales des courbes de Bézier
  - La courbe passe par les premier et dernier points.
  - La dérivée $n^{ième}$ de la courbe au point de départ ou d'arrivée dépend des $(n + 1)$ points voisins du polygone.
    - Dérivée première : La courbe est tangente aux vecteurs formés par les 2 premiers et les 2 derniers points.
    - Propriété intéressante pour raccorder des courbes de Bézier avec des contraintes de continuité.
  - Pour tous les autres points intermédiaires, la courbe adoucit la forme du polygone en atténuant ses variations.
  - La courbe se situe toujours à l'intérieur de l'enveloppe convexe formée par le polygone de contrôle



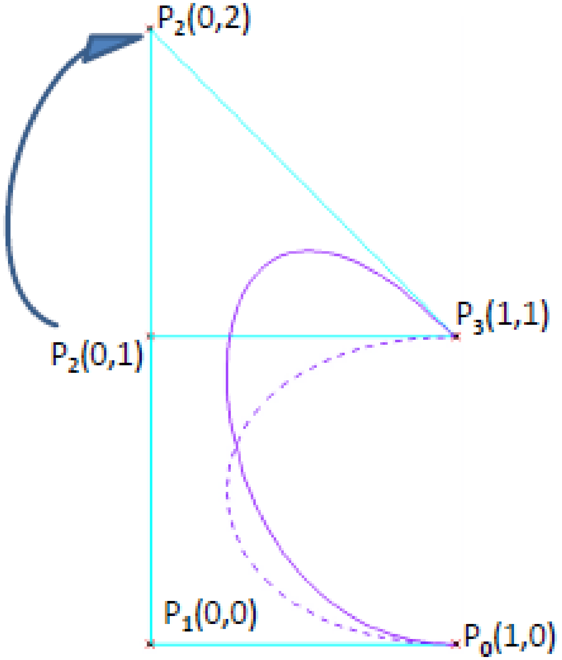
Courbes de Bézier

- Caractéristiques principales des courbes de Bézier
  - La même courbe est générée en inversant l'ordre des points dans le polynôme de contrôle
    - Exemple numérique:



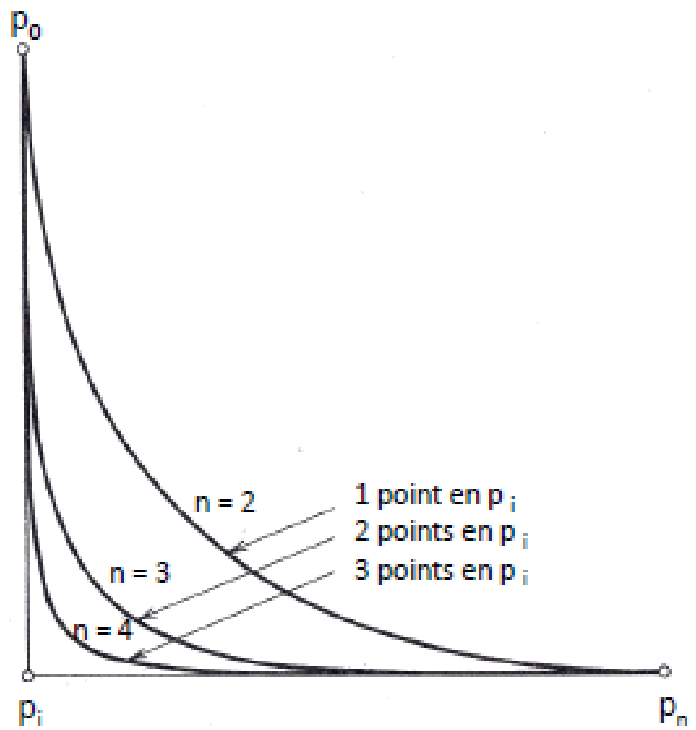
Courbes de Bézier

- Caractéristiques principales des courbes de Bézier
  - Effet du déplacement d'un point du polygone de contrôle
    - Courbe principalement affectée dans la région autour des points où le paramètre u prend la valeur *i/n*
    - Courbe à déformation globale



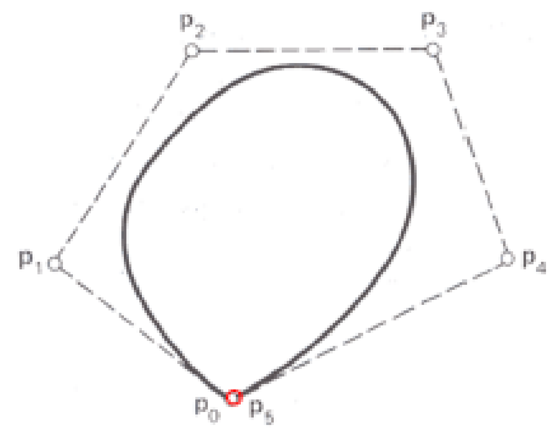
Courbes de Bézier

- Caractéristiques principales des courbes de Bézier
  - Un point du polygone de contrôle peut être un point double ou triple ou même équivalent à n points
    - Effet d'attirance lorsqu'un point du polygone de contrôle est un
      - Point simple
      - Point double
      - Point triple
    - Le degré du polynôme augmente

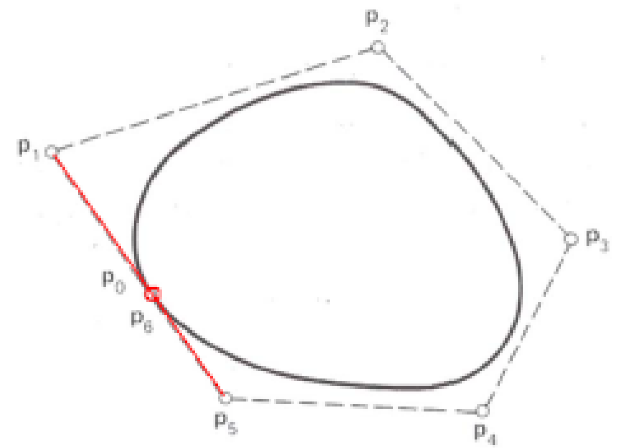


Courbes de Bézier

- Caractéristiques principales des courbes de Bézier
  - Courbe fermé
    - Premier et dernier point coïncident (G_0)

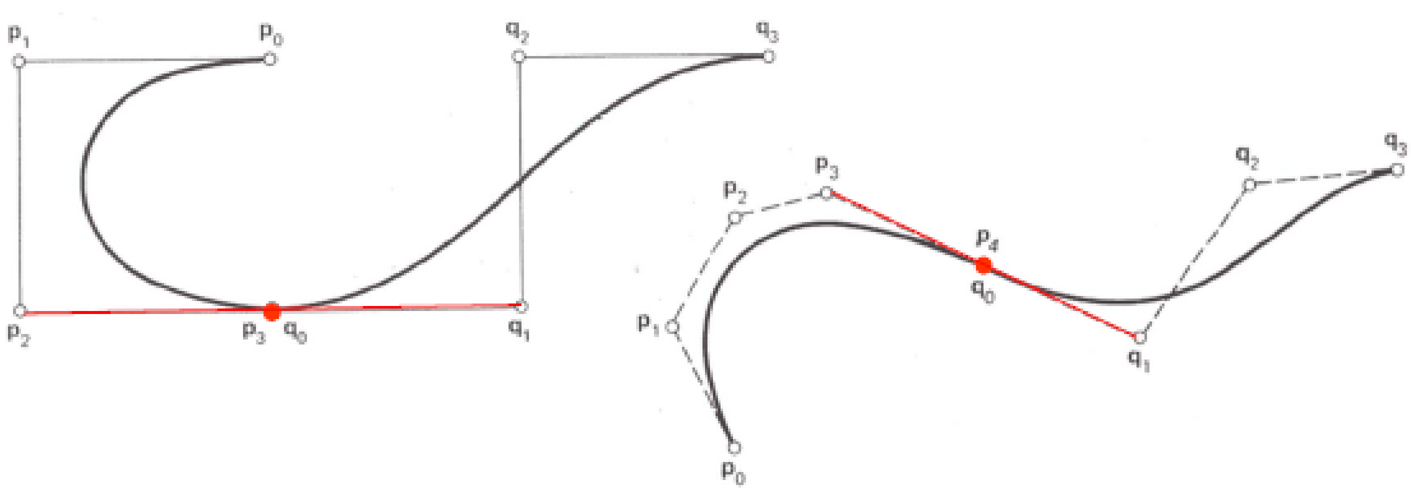


  - Points adjacents colinéaires
    - Continuité G_1
  - Continuité C_1...



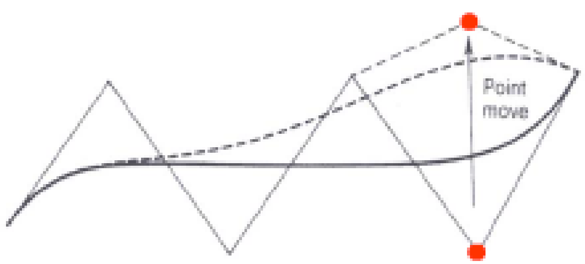
Courbes de Bézier

- Courbes de Bézier par segments
  - Continuité G_1 à la jonction de deux segments de courbe de Bézier
    - Dernier point du polygone = Premier point du polygone de la courbe suivante
    - Point précédent, Point commun, Point suivant colinéaires
  - Les 2 segments de courbe de Bézier peuvent être de degré différent

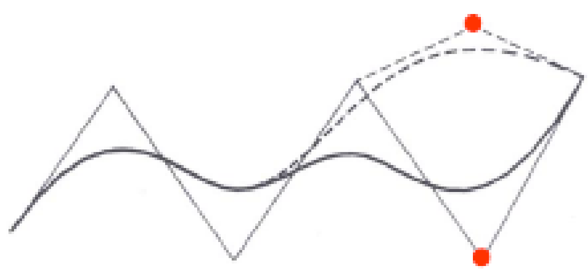


Courbes de Bézier

- Une courbe de Bézier est modifiable localement ou globalement?
- Une courbe de Bézier par segment est modifiable globalement ou localement ?



Modification d'un point du polygone
Courbe modifiée globalement



Modification d'un point du polygone
Courbe modifiée localement

1985

جامعة محمد بوضياف - المسيلة
Université Mohamed Boudiaf - M'sila

Courbes de Bézier

- Caractéristiques principales des courbes de Bézier
  - Lorsque la courbe à représenter devient complexe, le degré de la courbe augmente
  - En modifiant un point de contrôle du polygone, toute la courbe est affectée
  - Lorsque le degré du polynôme augmente, la courbe peut osciller
  - La charge de calcul augmente avec le degré de la courbe
  - Courbe complexe représentée par plusieurs courbes de Bézier, l'édition de la courbe en maintenant la continuité aux jonctions est pénible
  - Les limitations des courbes de Béziers proviennent de ses fonctions de base (blending functions)