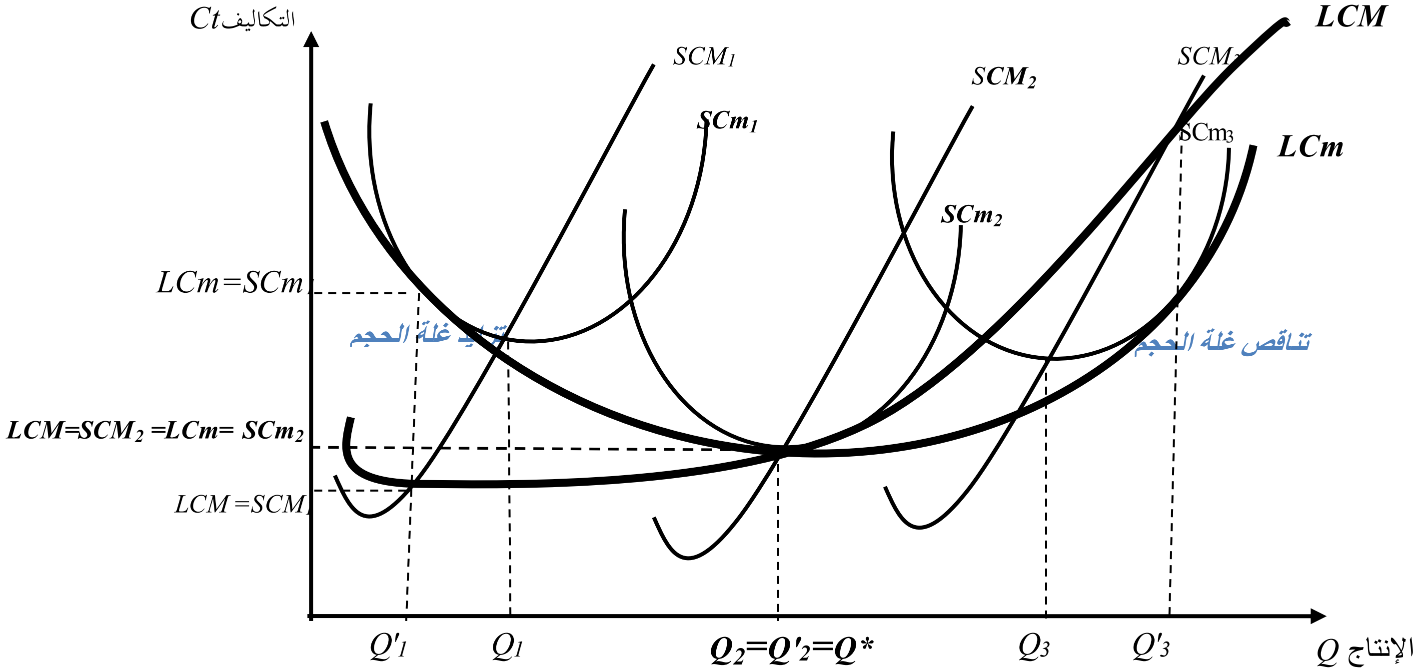
حل السلسلة 04

حل المسألة 01: الإجابة على الأسئلة المطروحة تكون كالتالي:

1- التكاليف في المدى الطويل كلها تكاليف متغيرة، نظرا لأن كل عوامل الإنتاج تكون متغيرة، لهذا يكون من البديهي التكلم عن نوعان من التكاليف على مستوى الوحدة المنتجة وهما: التكلفة المتوسطة في المدى الطويل LCM والتكلفة الحدية في المدى الطويل LCm، وكما هو الحال في المدى القصير، فإن منحنى التكلفة الحدية LCm يقطع منحنى LCM عند أدنى مستوى لها، كما هو مبين في الشكل التالي:



منحنى التكلفة المتوسطة ومنحنى التكلفة الحدية في المدى الطويل

2- نظرية التكاليف ركزت على **قانون غلة الحجم** في المدى الطويل، واعتبرت أن منحنى LCm هو منحنى **غطاء** لمنحنيات التكاليف المتوسطة في المدى القصيرSCm، كما يعتبر **منحى تخطيط** لأن شكله يعكس التوقعات المستقبلية للمؤسسة حول مستويات الطلب على منتجاتها، كما يعكس في جزئه المتناقص **تزايد غلة الحجم** وفي جزئه المتزايد **تناقص غلة الحجم** (**أنظر محاضرات المقياس من ص 46 إلى ص52**).

أما بالنسبة للعوامل المؤثرة في التكاليف في المدى الطويل فهي: **الإنتاج، العامل التكنولوجي وأسعار عوامل.**

يعتبر الإنتاج Q عاملا مؤثرا في التكاليف من خلال الانتقال على منحنيات التكاليف من مستوى إلى أخر، أما العامل التكنولوجي T وأسعار عوامل الإنتاج P_f فهما **متغيران ناقلان** (*Shifted Variables*) لمنحنيات التكاليف إلى أعلى أو إلى أسفل، فعلى سبيل المثال، عندما تستخدم مؤسسة ما تكنولوجيا أكثر تطورا، فإن ذلك يعمل على نقل منحنى LCm بالكامل إلى أسفل ومنه بقية المنحنيات والمحافظة على نفس العلاقات.

3- يتحدد مستوى توازن المؤسسة في المدى الطويل (السياسة الاستثمارية المثلى) عند تساوي معدلات التكاليف في الأمدين القصير والطويل عند مستوى الإنتاجQ^* (أنظر الشكل أعلاه)، أي عند تحقق الشرط الأساسي التالي:

$$LCM = SCM = LCm = SCm$$

(أنظر محاضرات المقياس من ص 46 إلى ص52).

L: تعبر عن المدى الطويل (*Long-run*)
S: تعبر عن المدى القصير (*Short-run*)

حل المسألة 02: لتكن لدينا دالة التكاليف التالية:

$$C_t = \frac{12}{Q+1} + 5Q + 20Q^2$$

1- الدالة هي دالة تكاليف في المدى القصير، حيث أن:

- دالة التكاليف الثابتة: $C_f = 12$ (أي أنه عند Q=0، C_t =12)
- دالة التكاليف المتغيرة Cv:

$$C_v = \frac{12}{Q+1} + 5Q + 20Q^2 - 12$$

(أي أنه عند Q=0، C_v =0).

2- دالة التكلفة المتوسطة Cm:

$$C_m = \frac{C_t}{Q} = \frac{12}{Q(Q+1)} + 5 + 20Q$$

- دالة التكلفة الحدية CM:

$$CM = \frac{dC_t}{dQ} = -\frac{12}{(Q+1)^2} + 5 + 40Q$$

حل المسألة 03: تعتمد مؤسسة ما على استخدامات العمل L في إنتاج السلعة Q في المدى القصير، حيث دالة تكاليفها معطاة بالعلاقة التالية:

$$C_{tL} = 5/3Q^3 - 5Q^2 + 1180Q + 20/3$$

بعد عدة سنوات من النشاط وإجراء عدة دورات تكوينية للعمال، مما أكسبهم مهارات عالية وساعد ذلك على تحسن الإنتاج والتحكم أكثر في التكاليف، أصبحت دالة تكاليف تأخذ الصيغة الرياضية التالية:

$$C_t = 5Q^3 - 20Q^2 + 1200Q$$

1- يتحقق المستوى الأمثل للإنتاج في المدى الطويل عند أدنى مستوى للتكلفة المتوسطة في المدى الطويل LCm أي عند نقطة تقاطع منحنى LCm مع منحنى LCM، أي عند مستوى الإنتاج Q^* **(أنظر الشكل في المسألة 01).**
نعلم من المعطيات أن دالة التكاليف في المدى الطويل هي الدالة الثانية، وبالتالي فإن البحث عن أدنى قيمة لـ LCm يكون كالتالي:

$$LCm = 5Q^2 - 20Q + 1200$$

ومنه: $\frac{dLCm}{dQ} = 0 \Rightarrow 10Q - 20 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{Q^* = 2}$ وحدة

2- تكون المؤسسة في حالة توازن في المدى الطويل إذا تحقق شرط التوازن عند Q^*=2، أي:

$$LCM = SCM = LCm = SCm$$

ومنه:

$$LCm = 5Q^2 - 20Q + 1200 \quad = \quad 5(2)^2 - 20(2) + 1200 \quad = 1180$$
$$LCM = 15Q^2 - 40Q + 1200 \quad = 15(2)^2 - 40(2) + 1200 \quad = 1180$$
$$SCm = \frac{5}{3}Q^2 - 5Q + 1180 + \frac{20}{3Q} \quad = \frac{5}{3}(2)^2 - 5(2) + 1180 + \frac{20}{6} \quad = 1180$$
$$SCM = 5Q^2 - 10Q + 1180 \quad = 5(2)^2 - 10(2) + 1180 \quad = 1180$$

كل معادلات التكاليف متساوية (1180ون)، وعليه نقول أن المؤسسة في حالة توازن في المدى الطويل عند الكمية: Q^*=2.

حل المسألة 04: دالة تكاليف مؤسسة ما في المدى الطويل معطاة بالعلاقة التالية:

$$C_t = 2.5Q^3 - 50Q^2 + 300Q$$

1- البحث عن المستوى الأمثل للإنتاج في المدى الطويل، يتم بإتباع نفس الخطوات في المسألة 03، ويكون كالتالي:

دالة التكلفة المتوسطة LCm:

$$LCm = 2.5Q^2 - 50Q + 300$$

ومنه أدنى قيمة لـ LCm:

$$\frac{dLCm}{dQ} = 0 \Rightarrow 5Q - 50 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{Q^* = 10}$$ وحدات

2- المؤسسة أمامها الخيار بين تصنيع منتج كثيف العمل L أو منتج كثيف رأس المال K في المدى القصير:

ا- القرار المناسب للمؤسسة هو اختيار المنتج الذي يحقق لها التوازن في المدى الطويل عند $Q^*=10$، وعليه سنختبر أي الدالتين تحقق شرط التوازن في المدى الطويل، ويكون كالتالي:

الدالة 01: $C_{t\,L} = 2.5Q^3 - 40Q^2 + 100Q + 1000$

$$LCm = 2.5Q^2 - 50Q + 300 = 2.5(10)^2 - 50(10) + 300 = 50$$
$$LCM = 7.5Q^2 - 100Q + 300 = 7.5(10)^2 - 100(10) + 300 = 50$$
$$SCm_L = 2.5Q^2 - 40Q + 100 + 1000/Q = 2.5(10)^2 - 40(10) + 100 + 1000/(10) = 50$$
$$SCM_L = 7.5Q^2 - 80Q + 100 = 7.5(10)^2 - 80(10) + 100 = 50$$

الدالة 02: $C_{t\,K} = 2.5Q^3 - 30Q^2 + 100Q + 1000$

$$LCm = 2.5Q^2 - 50Q + 300 = 2.5(10)^2 - 50(10) + 300 = 50$$
$$LCM = 7.5Q^2 - 100Q + 300 = 7.5(10)^2 - 100(10) + 300 = 50$$
$$SCm_k = 2.5Q^2 - 30Q + 100 + 1000/Q = 2.5(10)^2 - 30(10) + 100 + 1000/(10) = 150$$
$$SCM_k = 7.5Q^2 - 60Q + 100 = 7.5(10)^2 - 60(10) + 100 = 250$$

- **ما يلاحظ من النتائج أن المؤسسة تكون في حالة توازن في المدى الطويل باختيارها المنتج كثيف العمل L (أي: الدالة 01).**

ب- لمعرفة المرحلة التي تمر بها غلة الحجم بالمؤسسة عند اعتماد الخيار البديل عن (أ)، أي، لو تم اختيار المنتج كثيف رأس المال، فعلينا أن نتأكد ما إذا كانت التكلفة الحدية في المدى الطويل LCM والتكلفة المتوسطة في المدى الطويل LCm هما أكبر أم أقل من التكلفة المتوسطة SCm_k والتكلفة الحدية SCM_k في المدى القصير **(أنظر الشكل في حل المسألة 01).**

ما يلاحظ أنه لو تم اختيار المنتج كثيف رأس المال K سيكلف المؤسسة 150 ون لكل وحدة منتجة من Q، أي بزيادة 100ون عن اختيار المنتج كثيف العمل L، وهو ما يمكننا القول أن اختيار المنتج الثاني يتطلب من المؤسسة تخفيض حجم نشاطها أو استخدام تكنولوجيا أكثر تطورا، وهو ما يساعد على تخفيض التكاليف (التكلفة المتوسطة SCm_k والتكلفة الحدية SCM_k) لتصبح متساوية مع التكلفة الحدية في المدى الطويل LCM والتكلفة المتوسطة في المدى الطويل LCm، أي أن **المؤسسة لو اختارت المنتج كثيف رأس المال K فستكون في مرحلة تناقص غلة الحجم في المدى الطويل.**

حل المسألة 05: دالة الإنتاج لكوب - دوغلاس معطاة بالعلاقة التالية:

$$Q = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

-1 بافتراض أن L وK متغيران وسعرهما على التوالي: s وi، يتم اشتق معادلة التكاليف في المدى الطويل باستخدام مضاعف لاغرانج كالتالي:

$$Min\ Ct = sL + iK$$
$$St:$$
$$Q = AL^{\alpha}K^{1-\alpha}$$

دالة لاغرانج:

$$\mathcal{L} = sL + iK - \lambda(AL^{\alpha}K^{1-\alpha} - Q)$$

تعظيم الدالة:

$$d\mathcal{L}/dL = s - \lambda\alpha AL^{\alpha-1}K^{1-\alpha} = 0 \qquad \dots\ \mathbf{1}$$

$$d\mathcal{L}/dK = i - \lambda(1-\alpha)AL^{\alpha}K^{-\alpha} = 0 \qquad \dots\ \mathbf{2}$$

$$d\mathcal{L}/d\lambda = -AL^{\alpha}K^{1-\alpha} + Q = 0 \qquad \dots\ \mathbf{3}$$

من المعادلتين 1 و 2 نجد:

$\frac{s}{i} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{K}{L}$ الشرط 1 للتوازن

الشرط 2: تناقص $TMST_{L,K}$

$$d^2\mathcal{L}/dL^2 < 0 \Rightarrow -\lambda\alpha(\alpha-1)AL^{\alpha-2}K^{1-\alpha} < 0$$

$$d^2\mathcal{L}/dK^2 < 0 \Rightarrow -\lambda\alpha(1-\alpha)AL^{\alpha}K^{-\alpha-1} < 0$$

ومنه:

$$\frac{s}{i} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)\frac{K}{L} \Rightarrow K = L\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)$$

بالتعويض في المعادلة 3 نجد:

$$Q = AL^{\alpha}\left(L\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha} = AL\left(\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha}$$

$$\boldsymbol{L} = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{A}\left(\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha}}$$

$$\boldsymbol{K} = \left(\frac{Q}{A\left(\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha}}\right)\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) = \frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{A}\left(\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{-\alpha}}$$

عند التعويض بقيمتي L وK في دالة التكاليف نجد:

$$Ct = sL + iK = s\left(\frac{Q}{A\left(\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha}}\right) + i\left(\frac{Q}{A\left(\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{-\alpha}}\right)$$

- دالة التكاليف في المدى الطويل

$$Ct = \left(\frac{\boldsymbol{Q}}{\boldsymbol{A}\left(\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha}}\right)\left(\boldsymbol{s} + \boldsymbol{i}\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)$$

-2 إذا افترضنا أن: $s = 2$، $i = 3$، A=10 وα=0.4:

أ- التكلفة المتوسطة LCm:

$$LCm=\frac{Ct}{Q}=\left(\frac{1}{A\left(\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha}}\right)\left(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{i}\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)$$

$$LCm=\left(\frac{1}{10\left(\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{0.6}{0.4}\right)\right)^{0.6}}\right)\left(\mathbf{2}+\mathbf{3}\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{0.6}{0.4}\right)\right)=\mathbf{0.5}$$

- التكلفة الحدية LCM:

$$LCM=\frac{dCt}{dQ}=\left(\frac{1}{A\left(\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha}}\right)\left(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{i}\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)=\mathbf{0.5}$$

ب- تأثير انخفاض الفائدة على رأس المال بالثلث، أي: $i'=2$، على LCm وLCM :

$$LCm=\left(\frac{1}{10\left(\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{0.6}{0.4}\right)\right)^{0.6}}\right)\left(\mathbf{2}+\mathbf{2}\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{0.6}{0.4}\right)\right)=\mathbf{0.39}$$

$$LCM=\left(\frac{1}{10\left(\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{0.6}{0.4}\right)\right)^{0.6}}\right)\left(\mathbf{2}+\mathbf{2}\left(\frac{2}{2}\right)\left(\frac{0.6}{0.4}\right)\right)=\mathbf{0.39}$$

الملاحظ أن انخفاض في الفائدة على رأس المال i بالثلث أدى إلى نقصان التكاليف في المدى الطويل، سواء المتوسطة أو الحدية، وهو ما يتوافق مع تحليل نظرية التكاليف والتي تعتبر أن أسعار عوامل الإنتاج من المتغيرات الأساسية المؤثرة في التكاليف في المدى الطويل.

ج- دالة التكاليف المتوصل إليها سابقا هي:

$$Ct=\left(\frac{Q}{A\left(\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha}}\right)\left(\boldsymbol{s}+\boldsymbol{i}\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)=Q\left(\frac{s+i\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)}{A\left(\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha}}\right)$$

لو افترضنا أن:

$$Ct'=\lambda Q\left(\frac{s+i\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)}{A\left(\left(\frac{s}{i}\right)\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\right)^{1-\alpha}}\right)=\lambda\, Ct$$

عند زيادة الإنتاج Q بالنسبة λ زادت التكاليف بالنسبة λ، وهو ما يؤكد **أن غلة الحجم تمر بمرحلة ثبات، أو نقول أن قانون غلة الحجم ثابت**، وهو ما يعرف دوما على دوال الإنتاج لكوب- دوغلاس.