Chapter one

الفصل الأول

مسلّمات ميكانيك الكم

Postulates of Quantum Mechanics

1. مقدمة

يقوم كل فرع من فروع الفيزياء الأساسية على جملة من المسلمات التي تطرح كفرضيات لبحث المسائل المختلفة التي يعالجها هذا الفرع. فمنها ما يكون عقلانيا مثل مبادئ نيوتن للميكانيك الكلاسيكي ومبادئ الديناميك الحراري[1]، ومنها ما يكون ثوريا على التفكير الكلاسيكي لأجل الإجابة عن الإشكالات التجريبية الملحة التي تطرحها الفيزياء المعاصرة في وجه الفيزياء الكلاسيكية التي عجزت مبادئها عن تفسيرها، مثل مسلمات النسبية الخاصة ومسلمات ميكانيك الكم. هذه الأخيرة هي التي سنقدمها في هذا الفصل والتي نبني عليها كل النتائج والتفسيرات عند دراستنا للمسائل المختلفة التي يعالجها هذا الفرع المهم من الفيزياء المعاصرة. طبعا يتم التأكد من صحة أي مسلمات مطروحة بمقارنة النتائج النظرية التي تقدمها مع النتائج التجريبية، وقد تخطت مسلمات ميكانيك الكم كل ذلك، فهي لا تزال لحد الآن صامدة أمام أقسى التجارب، وليس ذلك فقط، بل لقد قدمت النظرية جملة من التوقعات النظرية أدت فيما بعد إلى تطور تكنولوجي كبير خاصة مع ظهور الليزر، لذلك فالجانب الرياضي للنظرية ليس محلا للخلاف. غير أن الجانب التفسيري الفلسفي لهذه المسلمات وما ينبني عنها من عدم حتمية سلوك الأنظمة الكمومية يعد الجانب الغامض من هذه النظرية ولهذا لم يحدث اتفاق بين العلماء حوله لحد الساعة. لكن تفسير بور الذي قدمه لميكانيك الكم، والمعروف بتفسير مدرسة كوبنهاغن، هو الذي يلقى قبولا كبيرا وهو الذي سنعتمده عند حديثنا عن المسلمات الخاصة بالقياس في ميكانيك الكم.

إن مسلمات ميكانيك الكم تعالج النقاط الأساسية الثلاث التالية:

1- الوصف الرياضي لحالة الجملة الكمومية ومقاديرها الفيزيائية.

2- نتائج قياس مختلف المقادير الفيزيائية.

3- التطور الزمني للجملة.

سنتعرض إذن في هذا الفصل إلى نصوص هذه المسلمات التي تسمح بالإجابة عن النقاط الثلاثة السابقة. إن قولنا "مسلمات" يعني أن هذه النصوص ليس لها أساس رياضي تقوم عليه، بل تعتبر هي القاعدة التي يؤسس عليها بناء النظرية الكمومية. لكن في المقابل أيضا، لم تكن هذه المسلمات محضَ تفكير مجرد، بل كانت وليدة التجارب الكثيرة التي أجريت قبل وأثناء بناء النظرية. لذلك فمنشؤها الأصلي هي التجربة التي استدعى التفكير في نتائجها وضع هذه المجموعة من القواعد التي تتلاءم معها وتسمح بتفسيرها.

[1] عدا مبدأ الأنتروبي الذي يصعب فهمه عقليا بدون تفسيرات الفيزياء الإحصائية الكمومية.

2. نصوص مسلمات ميكانيك الكم

1.2 الوصف الرياضي لحالة الجملة الكمومية ومقاديرها الفيزيائية

❖ المسلّمة 1 – (وصف الحالة الكمومية لجملة)

" توصف الحالة الكمومية لجملة فيزيائية في لحظة ما t بواسطة شعاع حالة، نسميه كات – ket، $|\psi(t)\rangle$ ينتمي لفضاء الحالات $\mathcal{E}$ "

❖ المسلّمة 2 – (وصف المقادير الفيزيائية)

" يتم وصف كل مقدار فيزيائي $\mathscr{A}$ قابل للقياس بواسطة مؤثر A يعمل في فضاء الحالات $\mathcal{E}$. إن هذا المؤثر عبارة عن ملحوظة -Observable "

2.2 قياس المقادير الفيزيائية في ميكانيك الكم

1.2.2 نتائج قياس المقادير الفيزيائية

❖ المسلّمة 3 – (نتائج الممكن الحصول عليها عند قياس مقدار فيزيائي)

" إن لا يمكن أن تكون نتيجة قياس مقدار فيزيائي ما $\mathscr{A}$ إلا أحد القيم الذاتية للملحوظة A الموافقة لهذا المقدار الفيزيائي "

ملاحظة:

إذا كان طيف الملحوظة A (أي مجموعة قيمه الذاتية) متقطعا، فإننا نقول عن نتائج القياس أنها مكمّمة.

2.2.2 مبدأ التحليل الطيفي

لنفترض أن حالة الجملة في لحظة ما t تكون موصوفة بالشعاع الحالة $|\psi\rangle$ الموحّد

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \qquad (1\text{-}1)$$

كما أننا سنعتبر في كل ما سيأتي سنعتبر أن المقدار الفيزيائي $\mathscr{A}$ توافقه الملحوظة A في الوصف الكمومي للجملة المدروسة. سنقدم فيما سيأتي المسلّمة الخاصة باحتمال الحصول على نتيجة ما عند قياس مقدار فيزيائي للجملة في هذه اللحظة t. إن طيف الملحوظة A الممثلة لهذا المقدار يمكن أن يكون متقطعا أو مستمرا، منحلا أو بسيطا، ونتيجة لذلك فإن نص المسلمة يختلف قليلا من حالة إلى أخرى.

1.2.2.2 حالة الطيف المتقطع

أ. القيم الذاتية غير المنحلة (البسيطة)

إذا كانت كل القيم الذاتية a_n للملحوظة A متقطعة وغير منحلة، وكانت مجموعة الأشعة الذاتية المتعمحدة المرفقة بها هي $\{|u_n\rangle\}$ فإن

$$A|u_n\rangle = a_n|u_n\rangle\ ;\ a_n \in \mathbb{R} \qquad (2\text{-}1)$$

يقابل كل قيمة من القيم الذاتية a_n البسيطة شعاع واحد فقط من المجموعة $\{|u_n\rangle\}$. وبما أن A هي ملحوظة، فإن المجموعة $\{|u_n\rangle\}$ تشكل إذن أساسا لفضاء الحالات $\mathcal{E}$ والتي نكتب علاقة تعمحدها وانغلاقها كما يلي

$$\begin{cases} \langle u_n|u_{n'}\rangle = \delta_{nn'} \\ \sum_n |u_n\rangle\langle u_n| = \mathrm{I} \end{cases} \qquad (3\text{-}1)$$

حيث I هو مؤثر المطابقة (أو الوحدة). إذن يمكن نشر أي شعاع ينتمي إلى فضاء الحالات $\mathcal{E}$ على أشعة هذا الأساس، وبشكل خاص الكات $|\psi\rangle$ التي تصف حالة الجملة في لحظة معينة كما يلي

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n|u_n\rangle \tag{4-1}$$

حيث أن c_n هي معاملات النشر على هذه القاعدة والتي عبارتها تعطي بالجداء السلمي التالي

$$c_n = \langle u_n|\psi\rangle = \int u_n^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r} \tag{5-1}$$

هذه المعاملات تعتبر مساقط لشعاع الحالة $|\psi\rangle$ على أشعة القاعدة $|u_n\rangle$.

رأينا في المسلمة الثالثة أننا نتحصل عند قياسنا للمقدار الفيزيائي $\mathscr{A}$ على القيم الذاتية للملحوظة A فقط، ولا يمكن الحصول على غير ذلك. لكن نتائج القياس في ميكانيك الكم ليست حتمية كما أثبتته التجربة، فيمكن أن نحضِّر نفس الجملة الكمومية في كل مرة بحيث تكون في نفس الحالة الابتدائية (نفس الشروط الابتدائية) ونعيد عليها مرارا التجربة التي تسمح بقياس المقدار$\mathscr{A}$، ولكننا لن نتحصل على نفس النتائج في كل مرة. وهذا هو الجانب الاحتمالي من ميكانيك الكم. (وبشكل مكافئ، يمكن أن تُحضّر مجموعة كبيرة من نفس الجملة بحيث تكون كلها في نفس الشروط ونجري عليها عملية القياس في نفس الوقت، سنتحصل على مجموعة إحصائية من النتائج التجريبية). فلو كانت الجملة ذات طبيعة كلاسيكية، أو نقول بالأحرى، لو عالجنا المسألة من وجهة نظر كلاسيكية فينبغي أن نتحصل دائما على نفس نتيجة القياس مادامت الشروط الابتدائية هي نفسها في كل مرة ! لكن الحقيقة غير ذلك تماما.

للتبسيط نضرب المثال التالي: لنفرض أن الملحوظة A تملك قيمتين ذاتيتين فقط (a_1, a_2). إذن فنتيجة قياس المقدار $\mathscr{A}$ ستكون إما a_1 أو a_2 فقط، وذلك في كل مرة نعيد فيها تجربة القياس بعد إعادة تحضير الجملة لتكون في نفس الشروط الابتدائية. فإن أعدنا التجربة 1000 مرة مثلا، وتحصلنا على القيمة a_1 كنتيجة لهذا القياس 430 مرة بينما سجلنا 570 مرة القيمة a_2. إن احتمال الحصول على هاتين النتيجتين هو إذن

$$\mathcal{P}(a_1) = \frac{430}{1000} = 0.43 < 1 \;\; ; \; \mathcal{P}(a_2) = \frac{570}{1000} = 0.57 < 1 \tag{6-1}$$

في الحقيقة، وحتى تكون قيمة الاحتمال صحيحة يجب أن نعيد التجربة عددا $\mathcal{N}$ كبيرا جدا من المرات، أي $\mathcal{N} \to \infty$. أو نجري التجربة على $\mathcal{N}$ جملة متماثلة محضّرة في نفس الشروط. وعلى كل حال، فالمقصود من هذا المثال البسيط هو أن نتائج القياس في ميكانيك الكم احتمالية وليست يقينية مثل الميكانيك الكلاسيكي.

إن احتمال الحصول $\mathcal{P}(a_n)$ على نتيجة ما a_n من قيم طيف الملحوظة A عند قياس المقدار$\mathscr{A}$، في لحظة معينة، مرتبط ارتباطا وثيقا بنشر شعاع الحالة $|\psi\rangle$ على الأشعة الذاتية $\{|u_n\rangle\}$ لهذه الملحوظة والمعطي بالعبارة (4-1). في ميكانيك الكم، نقبل كمسلمّة أن هذا الاحتمال يساوي مربع مسقط شعاع الحالة $|\psi\rangle$ على الشعاع الذاتي $|u_n\rangle$ المرفق بالقيمة a_n، أي

$$\boxed{\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2 = |c_n|^2} \tag{7-1}$$

وهو موضوع المسلمة الرابعة لميكانيك الكم التي تنص على

❖ المسلّمة 4 – 1 (احتمال الحصول على نتيجة قياس مقدار فيزيائي طيفه متقطع وغير منحل)

" عندما نقيس مقدارا فيزيائيا $\mathscr{A}$ لجملة موجودة في الحالة $|\psi\rangle$ الموحّدة فإن احتمال حصولنا، كنتيجة لهذا القياس، على القيمة الذاتية البسيطة a_n للملحوظة A الموافقة لهذا المقدار الفيزيائي هو

$$\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n|\psi\rangle|^2$$

حيث $|u_n\rangle$ هو الشعاع الذاتي المرفق بهذه القيمة a_n.

ملاحظة

لا بد أن ننتبه إلى أن هذا الاحتمال محسوب في لحظة زمنية معينة بالاعتماد على شعاع الحالة $|\psi\rangle$ الذي يصف الجملة في هاته اللحظة، ولذلك حتى نظهر التعلق الزمني لاحتمال الحصول على نتيجة قياس مقدار ما، لا بد أن نظهر وسيط الزمن في شعاع الحالة بأن نكتب $|\psi(t)\rangle$ ، وبالتالي فإن (7-1) تكتب الآن

$$\mathcal{P}(a_n,t) = |\langle u_n|\psi(t)\rangle|^2 = |c_n(t)|^2 \qquad (8\text{-}1)$$

فاحتمال الحصول على نتائج القياس متعلق عموما بالزمن. في الحقيقة، إنها حالة كل المقادير الفيزيائية التي لا تكون ثوابت حركة للجملة. لكن بالنسبة لثوابت الحركة فإن هذه الاحتمالات ستكون ثابتة. سنرى ذلك عند تعريف معنى ثابت الحركة في ميكانيك الكم.

ب. القيم الذاتية المنحلة

إذا كانت بعض قيم طيف الملحوظة A منحلة، ولتكن a_n، ودرجة انحلالها هي g_n، فإنه يكون لدينا إذن g_n شعاعا ذاتيا $|u_n^i\rangle$ مرفقا بهذه القيمة. أي

$$A|u_n^i\rangle = a_n|u_n^i\rangle \; ; i = 1,2, \dots g_n \qquad (9\text{-}1)$$

وتُختار هذه الأشعة بحيث تكوّن أساس لفضاء الحالات والتي نكتب علاقة انغلاقها وتعمحدها في هذه الحالة كما يلي

$$\begin{cases} \langle u_n^i|u_{n'}^j\rangle = \delta_{nn'}\delta_{ij} \\ \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} |u_n^i\rangle\langle u_n^i| = \mathrm{I} \end{cases} \qquad (10\text{-}1)$$

فإن كان $g_n = 1$ فهذا يعني أن القيمة الذاتية a_n غير منحلة، ونستعمل إذن نص المسلمة 4-1 لحساب احتمال الحصول عليها عند قياس $\mathscr{A}$.

لكن إن كان طيف الملحوظة A منحل جزئيا أو كليا فإن نشر الشعاع $|\psi\rangle$ على مجموعة الأشعة الذاتية لـ A يأخذ في هذه الحالة الشكل التالي

$$|\psi\rangle = \sum_n \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i|u_n^i\rangle \;\; ; \;\; c_n^i = \langle u_n^i|\psi\rangle \qquad (11\text{-}1)$$

رأينا في حالة الطيف غير المنحل أن احتمال الحصول على قيمة ذاتية بسيطة معينة يساوي مربع مسقط شعاع الحالة الذي يصف الجملة في لحظة القياس على الشعاع الذاتي (الوحيد) المرفق بهذه القيمة. فإن كانت القيمة التي نريد حساب احتمال الحصول عليها كنتيجة للقياس منحلة g_n مرة، فإن هذا الاحتمال سيساوي في هذه الحالة مجموع مربعات مساقط شعاع الحالة $|\psi\rangle$ على الأشعة $|u_n^i\rangle$ المرفقة بهذه القيمة. أي

$$\boxed{\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} \left|\langle u_n^i|\psi\rangle\right|^2 = \sum_{i=1}^{g_n} \left|c_n^i\right|^2} \qquad (12\text{-}1)$$

وعلى هذا فإن نص المسلمة الرابعة في هذه الحالة هو

❖ **المسلمّة $4-2$ (احتمال الحصول على نتيجة قياس مقدار فيزيائي طيفه متقطع ويملك قيما منحلة)**

" عندما نقيس مقدارا فيزيائيا $\mathscr{A}$ لجملة موجودة في الحالة $|\psi\rangle$ الموحدة فإن احتمال حصولنا، كنتيجة لهذا القياس، على القيمة الذاتية a_n للملحوظة A الموافقة لهذا المقدار الفيزيائي، والمنحلة g_n مرة، هو

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} \left|\langle u_n^i|\psi\rangle\right|^2$$

حيث $\{|u_n^i\rangle;\; i = 1,2, \dots g_n\}$ هي مجموعة الأشعة الذاتية المرفقة بهذه القيمة a_n.

إن المجموعة $\{|u_n^i\rangle;\ i=1,2,\dots g_n\}$ تشكل أساسا لفضاء الحالات الجزئي $\mathcal{E}(a_n)$ المرفق بالقيمة الذاتية a_n. ونعرف مؤثر الإسقاط P_{a_n} على هذا الفضاء الجزئي كما يلي

$$P_{a_n}=\sum_{i=1}^{g_n}|u_n^i\rangle\langle u_n^i| \qquad (13\text{-}1)$$

إن تطبيق مؤثر الإسقاط P_{a_n} على شعاع الحالة $|\psi\rangle$ يعطي الجزء $|\psi_n\rangle$ المنتمي من هذا الشعاع للفضاء الجزئي $\mathcal{E}(a_n)$. أي يعطي مسقط $|\psi\rangle$ على $\mathcal{E}(a_n)$. لدينا

$$|\psi_n\rangle=P_{a_n}|\psi\rangle=\sum_{i=1}^{g_n}|u_n^i\rangle\langle u_n^i|\psi\rangle=\sum_{i=1}^{g_n}c_n^i|u_n^i\rangle\quad;\quad |\psi_n\rangle\in\mathcal{E}(a_n) \qquad (14\text{-}1)$$

إن مؤثر الإسقاط، أو المُسقِط Projector، يمكّن من كتابة (12-1) بشكل مستقل عن الأشعة $\{|u_n^i\rangle\}$. في الحقيقة نجد أن

$$\boxed{\mathcal{P}(a_n)=\langle\psi|P_{a_n}|\psi\rangle=\sum_{i=1}^{g_n}\left|\langle u_n^i|\psi\rangle\right|^2=\sum_{i=1}^{g_n}\left|c_n^i\right|^2} \qquad (15\text{-}1)$$

❖ تمريـــن 1

إذا كانت حالة الجملة موصوفة بالكات $|\psi\rangle$ التالي

$$|\psi\rangle=\frac{1}{2}|u_1\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle+\frac{1}{2}|u_3\rangle$$

حيث $\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,|u_3\rangle\}$ هي ثلاثة أشعة ذاتية للملحوظة A الممثلة لمقدار فيزيائي $\mathscr{A}$ والمرفقة بالقيم الذاتية a_1، a_2، a_3. علما أن هذه الأشعة متعمدة:

1°. ما هو احتمال الحصول على كل قيمة من هذه القيم الذاتية؟

2°. إذا كان $a_2=a_3$، فاحسب احتمال الحصول على a_2.

3°. أوجد عبارة مؤثر الإسقاط P_{a_2} على الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(a_2)$ المرفق بالقيمة a_2 المنحلة مرتان.

4°. أعد حساب احتمال الحصول على a_2 باستعمال المُسقِط P_{a_2}.

❖ الحـــــــــل

1°. حسب المسلمة 1-4 لدينا

$$\mathcal{P}(a_1)=|\langle u_1|\psi\rangle|^2=\frac{1}{4}\ ;\ \mathcal{P}(a_2)=|\langle u_2|\psi\rangle|^2=\frac{1}{2}\ ;\ \mathcal{P}(a_3)=|\langle u_3|\psi\rangle|^2=\frac{1}{4}$$

2°. إذا كان $a_2=a_3$ فهذا يعني أن هذه القيمة منحلة مرتان ويرفق بها كلا الشعاعين $\{|u_2\rangle,|u_3\rangle\}$. باستعمال المسلمة 2-4 نجد

$$\mathcal{P}(a_2)=|\langle u_2|\psi\rangle|^2+|\langle u_3|\psi\rangle|^2=\frac{3}{4}$$

3°. عبارة مؤثر الإسقاط P_{a_2} حسب (13-1) هي

$$P_{a_2}=|u_2\rangle\langle u_2|+|u_3\rangle\langle u_3|$$

يمكن أن نرى أن تطبيق هذا المؤثر على شعاع الحالة $|\psi\rangle$ يعطي مسقطه على الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(a_2)$ الذي تشكل الأشعة $\{|u_2\rangle,|u_3\rangle\}$ قاعدة له. في الحقيقة، باستعمال خاصية تعمحد الأشعة $\{|u_1\rangle,|u_2\rangle,|u_3\rangle\}$، كما تبينه (3-1)، نجد

$$P_{a_2}|\psi\rangle=(|u_2\rangle\langle u_2|+|u_3\rangle\langle u_3|)\left(\frac{1}{2}|u_1\rangle+\frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle+\frac{1}{2}|u_3\rangle\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle+\frac{1}{2}|u_3\rangle$$

4°. يمكن حساب الاحتمال $\mathcal{P}(a_2)$ باستعمال المُسقط P_{a_2} حسب العلاقة (1-15) حيث

$$\mathcal{P}(a_2) = \langle\psi|P_{a_2}|\psi\rangle = \langle\psi|u_2\rangle\langle u_2|\psi\rangle + \langle\psi|u_3\rangle\langle u_3|\psi\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

لأن معاملات نشر $|\psi\rangle$ على القاعدة $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ هي أعداد حقيقة. لدينا حسب عبارة $|\psi\rangle$ أعلاه

$$\begin{cases} \langle\psi|u_2\rangle = \langle u_2|\psi\rangle = 1/\sqrt{2} \\ \langle\psi|u_3\rangle = \langle u_3|\psi\rangle = 1/2 \end{cases}$$

2.2.2.2 حالة الطيف المستمر

إذا كان طيف الملحوظة A مستمرا وغير منحل، أي أن مجموعة القيم الذاتية α تأخذ قيما متصلة. فإننا نكتب معادلة القيم الذاتية الخاصة به كما يلي

$$A|w_\alpha\rangle = \alpha|w_\alpha\rangle\ ;\ \alpha \in \mathbb{R} \tag{16-1}$$

وتكوّن مجموعة الأشعة الذاتية المتصلة $\{|w_\alpha\rangle\}$ أساسا مستمرا لفضاء الحالات $\mathcal{E}$ ونكتب علاقة الانغلاق والتعمحد الخاصة بها كالتالي

$$\begin{cases} \langle w_\alpha|w_{\alpha'}\rangle = \delta(\alpha - \alpha') \\ \displaystyle\int |w_\alpha\rangle\langle w_\alpha| d\alpha = \mathrm{I} \end{cases} \tag{17-1}$$

بحيث أن أي شعاع حالة $|\psi\rangle$ ينتمي لهذا الأخير يمكن نشره على أشعة هذه القاعدة على الشكل التالي

$$|\psi\rangle = \int c(\alpha)|w_\alpha\rangle d\alpha \tag{18-1}$$

حيث أن عبارة معاملات النشر $c(\alpha)$ تعطى بالجداء السلمي

$$c(\alpha) = \langle w_\alpha|\psi\rangle = \int w_\alpha^*(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r})d\mathbf{r} \tag{19-1}$$

إن نتائج قياس المقدار الفيزيائي $\mathscr{A}$ تشكل إذن طيفا متصلا من القيم، ولا يمكن الحديث هنا إذن عن نتيجة قياس قيمتها α بدقة متناهية إذ مهما كانت دقة الأجهزة التجريبية فلن نتمكن من عزل قيمة بذاتها من مجموعة هذه القيم المتصلة. كل ما يسعنا فعله إذن سيكون حصرا لنتيجة القياس حول قيمة α، ويكون هذا الحصر جيدا كلما زادت دقة أدوات القياس المستعملة. ولذلك نتكلم هنا عن احتمال الحصول على نتيجة للقياس محصورة بين α و $\alpha + d\alpha$ والتي نُسلِّم أنها تعطى بالعبارة

$$d\mathcal{P}(\alpha) = |\langle w_\alpha|\psi\rangle|^2 d\alpha = |c(\alpha)|^2 d\alpha \tag{20-1}$$

تدعى القيمة $|\langle w_\alpha|\psi\rangle|^2$ بكثافة الاحتمال، بينما تدعى $\langle w_\alpha|\psi\rangle$ بسعة الاحتمال. إن قياس موضع جسيم في ميكانيك الكم يعتبر مثالا جيدا في هذا السياق. ففي تمثيل الموضع تكون $|\psi(\mathbf{r})|^2$ هي كثافة احتمال وجود الجسيم في الحجم $d\mathbf{r}$ حول الموضع $\mathbf{r}$ وليس احتمال وجوده في الموضع $\mathbf{r}$ بالضبط. بينما تمثل $\psi(\mathbf{r})$ سعة هذا الاحتمال. فلا شك أنه لا يمكن تحديد موضع هذا الجسيم بدقة متناهية وذلك مهما أُدخل على أجهزة القياس من تحسينات. وعلى كل حال، فهذا يتعارض، على الأقل، مع مبدأٍ رئيس في ميكانيك الكم وهو مبدأ الارتياب لهايزنبارغ. تنص المسلمة الرابعة في هذه الحالة على ما يلي

❖ المسلمّة 4 – 3 (احتمال الحصول على نتيجة قياس مقدار فيزيائي طيفه متصل وغير منحل)

" عندما نقيس مقدارا فيزيائيا $\mathscr{A}$ لجملة موجودة في الحالة الموحدة $|\psi\rangle$،فإن احتمال حصولنا، كنتيجة لهذا القياس، على قيمة محصورة بين α و $\alpha + d\alpha$، حيث α هي قيمة ذاتية للملحوظة A الموافقة لهذا المقدار الفيزيائي، هو

$$d\mathcal{P}(\alpha) = |\langle w_\alpha|\psi\rangle|^2 d\alpha$$

حيث $|w_\alpha\rangle$ هو الشعاع الذاتي للملحوظة A المرفق بالقيمة α.

ملاحظات

عند استعمال هذه المسلمات الأربع الأولى يجب الانتباه إلى مجموعة الملاحظات التالية:

1- إذا كانت حالة الجملة موصوفة بشعاع حالة $|\psi\rangle$ غير موحَّد، أي $\langle\psi|\psi\rangle \neq 1$، فإنه يجب علينا قسمة كل العلاقات (1-7) ، (1-12) ، (1-15) ، (1-20)، التي تعطي عبارة الاحتمال على العدد الحقيقي $\langle\psi|\psi\rangle$. في الحقيقة، إن لم نفعل ذلك في هذه الحالة فلن نتحصل على احتمال كلي يساوي الواحد. ولنأخذ كمثال حالة الطيف المتقطع غير المنحل للتبسط. يجب أن يكون الاحتمال الكلي إذن

$$\sum_n \mathcal{P}(a_n) = 1 \quad (21\text{-}1)$$

ولذلك يجب أن نعيد كتابة (1-7) كما يلي

$$\mathcal{P}(a_n) = \frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle}|\langle u_n|\psi'\rangle|^2 = \frac{1}{\langle\psi|\psi\rangle}|c_n|^2 \quad (22\text{-}1)$$

لأنه لدينا حسب العلاقة (1-3) والنشر (1-4) ما يلي

$$\langle\psi|\psi\rangle = \sum_n\sum_{n'} c_{n'}^* c_n \underbrace{\langle u_{n'}|u_n\rangle}_{=\delta_{nn'}} = \sum_n |c_n|^2 \quad (23\text{-}1)$$

وبتعويض كل من (1-22) و (1-23) في (1-21) نجد أنها محققة بسبب وجود $\langle\psi|\psi\rangle$ في المقام في العلاقة (1-22). فإن كانت $|\psi\rangle$ موحدة فمن الواضح أنه لا حاجة للقسمة عليها.

2- إن شعاعا الحالة $|\psi\rangle$ و $|\psi'\rangle$ بحيث

$$|\psi'\rangle = e^{i\theta}|\psi\rangle$$

حيث θ عدد حقيقي، يصفان نفس الحالة الفيزيائية لأنهما يقودان لنفس نتائج الاحتمالات. فمعامل الطور الكلي $e^{i\theta}$ لا يؤثر على هذه الاحتمالات كون هذه الأخيرة تتعلق بمربع طويلة يتضمن شعاع الحالة ومرافقه (كات وبرا). أي يتضمن، في تمثيل الموضع، جداء الدالة الموجية والمرافق المركب لها حيث سيختفي عامل الطور الكلي نتيجة لذلك. فإذا كان $|\psi\rangle$ موحّد فسيكون $|\psi'\rangle$ أيضا موحدا لأن

$$\langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|e^{-i\theta}e^{i\theta}|\psi\rangle = \langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad (24\text{-}1)$$

وحساب الاحتمال لن يتأثر بوجود $e^{i\theta}$. لدينا حسب (1-7) مثلا

$$\mathcal{P}(a_n) = |\langle u_n|\psi'\rangle|^2 = \left|e^{i\theta}\langle u_n|\psi\rangle\right|^2 = |\langle u_n|\psi\rangle|^2$$

نفس الملاحظة بالنسبة لـ

$$|\psi'\rangle = N|\psi\rangle \Rightarrow \langle\psi'|\psi'\rangle = \langle\psi|N^*N|\psi\rangle = |N|^2\langle\psi|\psi\rangle = |N|^2 \quad (25\text{-}1)$$

فإن أردنا حساب الاحتمالات باستعمال $|\psi\rangle$ فلا ضرورة للقسمة على $\langle\psi|\psi\rangle = 1$ لأنه موحّد، لكن ان استعملنا $|\psi'\rangle$ غير الموحد فيجب القسمة على $\langle\psi'|\psi'\rangle$ كما ذكرنا في الملاحظة 1 أعلاه.

3- في المقابل، لا يصف الشعاعان $|\psi\rangle$ و $|\varphi\rangle$ التاليان

$$\begin{cases}|\psi\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle \\ |\varphi\rangle = \lambda_1 e^{i\theta_1}|\psi_1\rangle + \lambda_2 e^{i\theta_2}|\psi_2\rangle\end{cases} \quad (26\text{-}1)$$

نفس الحالة الفيزيائية لأن $e^{i\theta_1}$ و $e^{i\theta_2}$ هما معاملا طور نسبيان وليسا كليان. أي أن كل منهما متعلق بشعاع من أشعة النشر. وبالتالي سيكون لهما تأثير في حساب احتمال نتائج القياس عبر ظهور حد نسميه حد التداخل بينهما. فتراكب الحالات الذي تصفه $|\psi\rangle$ في (26-1) غير تراكب الحالات الذي تصفه $|\varphi\rangle$. يمكن توضيح ذلك ببساطة في حالة الطيف المتقطع غير المنحل. سنجد أن حساب الاحتمال باستعمال $|\psi\rangle$ لا يعطي نفس نتيجة الاحتمال المحسوب باستعمال $|\varphi\rangle$. في الحقيقية، حسب (7-1) نجد أن الاحتمال باستعمال $|\psi\rangle$ هو

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\psi(a_n) &= |\langle u_n|\psi\rangle|^2 = |\lambda_1\langle u_n|\psi_1\rangle + \lambda_2\langle u_n|\psi_2\rangle|^2 \\ &= |\lambda_1|^2|\langle u_n|\psi_1\rangle|^2 + |\lambda_2|^2|\langle u_n|\psi_2\rangle|^2 + \lambda_1^*\lambda_2\langle\psi_1|u_n\rangle\langle u_n|\psi_2\rangle + \lambda_1\lambda_2^*\langle u_n|\psi_1\rangle\langle\psi_2|u_n\rangle\end{aligned} \quad (27\text{-}1)$$

لكن النتيجة ستكون باستعمال $|\varphi\rangle$ كما يلي

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_\varphi(a_n) &= |\langle u_n|\varphi\rangle|^2 = \left|\lambda_1 e^{i\theta_1}\langle u_n|\psi_1\rangle + \lambda_2 e^{i\theta_2}\langle u_n|\psi_2\rangle\right|^2 \\ &= |\lambda_1|^2|\langle u_n|\psi_1\rangle|^2 + |\lambda_2|^2|\langle u_n|\psi_2\rangle|^2 + \lambda_1^*\lambda_2 e^{-i\theta_1+i\theta_2}\langle\psi_1|u_n\rangle\langle u_n|\psi_2\rangle \\ &\quad + \lambda_1\lambda_2^* e^{i\theta_1-i\theta_2}\langle u_n|\psi_1\rangle\langle\psi_2|u_n\rangle\end{aligned} \quad (28\text{-}1)$$

من الواضح إذن من خلال هاتين النتيجتين أن $\mathcal{P}_\psi(a_n) \neq \mathcal{P}_\varphi(a_n)$ لاختلافهما في حد التقاطع (الحد الأخير من كل علاقة)، ماعدا في الحالة التي يكون فيها $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ لأنه سيكون

$$e^{-i\theta_1+i\theta_2} = e^{-i\theta_1+i\theta_2} = e^{\pm 2k\pi} = 1 \quad (29\text{-}1)$$

من خلال (26-1) و (29-1) سنجد في هذه الحالة الخاصة أن

$$|\varphi\rangle = e^{i\theta_1}\big(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2 e^{-i\theta_1+i\theta_2}|\psi_2\rangle\big) = e^{i\theta_1}(\lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle) = e^{i\theta_1}|\psi\rangle \quad (30\text{-}1)$$

أين يصير $e^{i\theta_1}$ عامل طور كلي، وبالتالي لا فرق بين الحالة التي يصفها $|\varphi\rangle$ أو $|\psi\rangle$ كما سجلنا ذلك في الملاحظة السابقة.

❖ **تمريـــن 2**

إذا كان لدينا جسيم كتلته m يتحرك في بعد واحد (1D) على المحور Ox وحالته الكمومية موصوفة موصوفة بالكات $|\psi\rangle$ الموحد

°1. ما هو احتمال العثور عليه في المنطقة المحصورة بين x و $x + dx$؟

°2. ما هو احتمال العثور عليه في المنطقة $[x_1, x_2]$؟

°3. لنفرض أن هذا الجسيم محصور في المنطقة $[0, L]$ و أن حالته في لحظة معينة موصوفة بالكات

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\sqrt{6}|\varphi_1\rangle + \sqrt{3}|\varphi_3\rangle + |\varphi_5\rangle\right)$$

التي هي تركيب خطي من الأشعة الذاتية المتعمحدة $\{|\varphi_n\rangle\}$ لهاملتوني الجسيم بحيث تكون الدوال الموجية $\varphi_n(x)$ المرفقة بها في تمثيل الموضع $\{|x\rangle\}$ وكذا مستويات طاقة الجسم في هذا المجال معطاة بـ

$$\begin{cases}\langle x|\varphi\rangle = \varphi_n(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin\left(\dfrac{n\pi}{L}x\right); & n = 1,2,\ldots \\ E_n = \varepsilon_0 n^2 & ; \quad \varepsilon_0 = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\end{cases}$$

أ- إذا قمنا بقياس طاقة الجسيم، فما هو احتمال العثور على القيمتين $4\varepsilon_0$ و $9\varepsilon_0$؟

ب- ماهي قيم الطاقة التي يمكن الحصول عليها في الحالة $|\psi\rangle$؟ وبأي احتمال؟

4°. لنفرض الان أن الجسم أصبح موجودا في لحظة زمنية لاحقة في حالته الأساسية. أي أصبحت حالته موصوفة في هذه اللحظة بالشعاع الذاتي $|\varphi_1\rangle$ بدلا من $|\psi\rangle$.

أ- ما هو الموضع الذي يكون فيه العثور على الجسيم أكبر احتمالا؟ .وما قيمة هذا الاحتمال؟

ب- ما هو احتمال وجود الجسيم في موضع محصور في المجال $[0, L/4]$؟

❖ **الحـــــــــل**

1°. احتمال العثور على الجسيم بين x و $x + dx$

إن المقدار الفيزيائي الذي نقيسه هنا هو موضع الجسيم x على محور الحركة Ox. نرفق بهذا المقدار الملحوظة X ذات القيم الذاتية x والأشعة المرفقة $|x\rangle$ بحيث أن

$$X|x\rangle = x|x\rangle \tag{31-1}$$

وبما أن طيف هذه الملحوظة X متصل، فإن احتمال الحصول على قيمة الموضع محصورة بين x و $x + dx$ حسب المسلّمة 4-3 هو

$$d\mathcal{P}(x) = |\langle x|\psi\rangle|^2 dx = |\psi(x)|^2 dx \tag{32-1}$$

2°. احتمال العثور على الجسيم في المنطقة $[x_1, x_2]$

إن احتمال العثور عليه في المنطقة $[x_1, x_2]$ نجده بتكامل الاحتمال $d\mathcal{P}(x)$ بين هاتين القيمتين. أي

$$\mathcal{P}(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} d\mathcal{P}(x) \int_{x_1}^{x_2} |\psi(x)|^2 dx \tag{33-1}$$

هذه العبارات في الجوابين السابقين تأخذ الشكل العام لأننا لم نميز إن كان الجسيم محصورا في منطقة ما أو في حالة تشتت.

3°. إن حصر جسيم كمومي في منطقة من الفضاء يؤدي إلى تكميم مستوياته الطاقوية. ففي حالة جسيم يتحرك في بعد واحد محصور في المنطقة $[0, L]$ نرى أن مستوياته الطاقوية (التي نتحصل عليها بحل معادلة شرودينغر) مكمّمة (طيف متقطع). لكن موضع الجسيم، على عكس طاقته، يبقى مقدارا مستمرا. سنحسب في هذا السؤال إذن احتمال الحصول على قيم الطاقة وموضع الجسيم باعتبارهما مقدارين أحدهما متقطع والآخر مستمر على الترتيب وذلك لنميز الفرق بين الصيغ المختلفة لنص المسلمة 4.

أ- احتمال العثور على القيمتين $4\varepsilon_0$ و $9\varepsilon_0$

توافق هاتان القيمتان المستويين الطاقويين $E_2 = 4\varepsilon_0$ و $E_3 = 9\varepsilon_0$ اللذين تُرفق بهما الدالتين الموجيتين $\varphi_2(x)$ و $\varphi_3(x)$ على الترتيب.

وبما أن كل المستويات الطاقوية لهذا الجسيم غير منحلة. فحسب المسلمة 4-1 سيكون احتمال الحصول على كل منهما هو

$$\begin{cases} \mathcal{P}(E_2) = |\langle\varphi_2|\psi\rangle|^2 = 0 \\ \mathcal{P}(E_3) = |\langle\varphi_3|\psi\rangle|^2 = \dfrac{3}{10} \end{cases}$$

ينعدم احتمال الحصول على القيمة E_2 لأن مسقط الكات $|\psi\rangle$ على الشعاع $|\varphi_2\rangle$ معدوم كما نرى ذلك من نشر $|\psi\rangle$ التي تصف حالة الجسيم.

ب- قيم الطاقة التي يمكن الحصول عليها واحتمالاتها

حسب عبارة نشر $|\psi\rangle$ على الأشعة $\{|\varphi_n\rangle\}$ فإن قيم الطاقة الممكن الحصول عليها بالقياس في هذه الحالة هي القيم التالية فقط

$$E_1 = \varepsilon_0\ ;\ E_3 = 9\varepsilon_0\ ;\ E_5 = 25\varepsilon_0$$

واحتمال الحصول على E_1 و E_5 هو

$$\begin{cases} \mathcal{P}(E_1) = |\langle\varphi_1|\psi\rangle|^2 = 6/10 \\ \mathcal{P}(E_5) = |\langle\varphi_5|\psi\rangle|^2 = 1/10 \end{cases}$$

يمكن أن نلاحظ أن

$$\mathcal{P}(E_1) + \mathcal{P}(E_3) + \mathcal{P}(E_5) = 1$$

4°. إذا افترضنا أن الجسيم موجود في حالته الأساسية فهذا يعني أن الدالة الموجية التي تصفه هي

$$\varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

أ- الاحتمال الأعظمي

نحن الان بصدد التعامل مع المقدار المتصل x. فيكون احتمال العثور عليه في موضع معين x داخل المجال $[0, L]$ حسب (1-32) هو

$$d\mathcal{P}(x) = |\langle x|\varphi_1\rangle|^2 dx = |\varphi_1(x)|^2 dx = \frac{2}{L}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx$$

ويكون هذا الاحتمال أعظميا عند موضع معين إذا كانت كثافته أعظمية، أي

$$\frac{d}{dx}|\varphi_1(x)|^2 = \frac{d}{dx}\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}$$

نستطيع معرفة أنه قيمة عظمى من تغير إشارة المشتق طبعا. ويكون احتمال وجوده في هذا الموضع مساويا لـ

$$d\mathcal{P}\left(x = \frac{L}{2}\right) = \left|\varphi_1\left(x = \frac{L}{2}\right)\right|^2 dx = \left(\frac{2}{L}\right) dx$$

ب- احتمال وجود الجسيم في موضع محصور في المجال $[0, L/4]$

نتحصل على هذا الاحتمال باستعمال (1-33) حيث نجد أن

$$\mathcal{P}(0 \le x \le L/4) = \int_0^{L/4} |\varphi_1(x)|^2 dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/4} \sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{4}$$

3.2 حالة الجملة بعد القياس (انهيار دالة الموجة)

تمثل عملية القياس في ميكانيك الكم أهم النقاط المثيرة للجدل من ناحية تفسير تأثيرها على حالة الجملة الكمومية. ففي حين أن القيام بعملية القياس على جملة كلاسيكية لا يؤثر على الجملة ومتغيراتها الديناميكية، نجد أن القياس (جهاز القياس) يؤثر تأثيرا كبيرا على الحالة الكمومية للجملة التي نجري عليا القياس. هذه المسألة ليست راجعة إلى خشونة أجهزة القياس أو عدم دقتها، بل الأمر يتعدى ذلك إلى إحدى الحقائق الجوهرية التي تظهرها المعالجة الكمومية للجمل المجهرية. فالجملة الكمومية يبدو أنها "تنزعج" من عملية القياس هذه فتغير حالتها مباشرة بعد القياس. فبالنسبة للنظرة الكلاسيكية لعملية القياس، لا يؤثر جهاز القياس على حالة الجملة، بينما تتفاعل هذه الأخيرة معه من وجهة نظر كمومية بطريقة تجعلها تغير من حالتها المجهرية. أي أن دالة الموجة التي كانت تصف حالة الجملة قبل القياس "تنهار= تتقلص = تُختصر" بعد عملية القياس مباشرة للتأقلم مع الوضع الجديد حسب عملية القياس، أي حسب المقدار الذي قمنا بقياسه، فتكون بذلك الحالة الكمومية الجديدة موافقة لنتيجة القياس المتحصل عليها. وهذا التغير لا يكون نفسه في كل مرة كما ذكرنا ذلك سابقا، فإن إعادة القياس على الجملة في ظل نفس الشروط لا يؤدي إلى نفس النتيجة بالضرورة، بل عموما يعطي نتائج مختلفة، وهذا هو سبب الطابع الاحتمالي للنظرية الكمومية. لذلك فإن انهيار دالة الموجة يختلف في كل مرة تكون فيها نتيجة القياس مختلفة. ومهما كان التفسير الذي يكمن وراء هذه الحقيقة الكمومية، فإن المسلمة الخامسة التي سنقوم بتقديمها هنا تتفق مع الواقع التجريبي. إن المقصود بكلمة " انهيار" ليس تلاشي دالة الموجة كلها بطبيعة الحال، بل نقصد أن جزءا منها يختفي أو يلغى بعملية القياس بينما يبقى جزؤها الآخر الذي يوافق نتيجة القياس.

إن قياس مقدار فيزيائي $\mathscr{A}$ يُحدث اضطرابا لحالة الجملة فتتغير هذه الأخيرة بصورة مفاجئة مباشرة بعد عملية القياس. فإن كانت نتيجة قياس هذا المقدار هي القيمة الذاتية غير المنحلة a_n للملحوظة A فإنّ الكات $|\psi\rangle$ الذي كان يصف حالة الجملة قبل القياس، يُختصر مباشرة إلى الشعاع الذاتي $|u_n\rangle$ المرفق بالقيمة الذاتية a_n التي تحصلنا عليها كنتيجة للقياس. ونقول عن هذه الوضعية أنه حدث انهيار (اختصار) لشعاع الحالة مباشرة

بعد القياس ونكتب

$$\boxed{\underbrace{|\psi\rangle = \sum_n c_n|u_n\rangle}_{\text{قبل القياس}} \xrightarrow[\text{نتيجة القياس هي القيمة غير المنحلة}(a_n)]{} \underbrace{|u_n\rangle}_{\text{بعد القياس}}} \tag{34-1}$$

فبعد أن كانت حالة الجملة عبارة عن تركيب خطي من الحالات الذاتية للمقدار$\mathcal{A}$، تهدّم هذا التركيب ليصبح شعاعا واحدا هو الشعاع الذي يصف الحالة الجديدة للجملة. وكأن عملية القياس قامت بإسقاط الشعاع $|\psi\rangle$ على هذا الشعاع الذاتي فقط وألغت جميع المساقط الأخرى المرفقة بنتائج أخرى للقياس (القيم الذاتية الأخرى للطيف). وهذا هو معنى الاختصار لحالة الجملة الذي نقصده. صحيح أن إسقاط $|\psi\rangle$ على الشعاع $|u_n\rangle$ يعطي $c_n|u_n\rangle$، لكننا نفضل دائما العمل بأشعة حالة تكون موحّدة، لذلك وحسب الملاحظة 2 (ص 8) فإننا نأخذ الشعاع الموحد $|u_n\rangle$ ليمثل الحالة بعد القياس. يجب أن ننبه هنا إلى أن وصف الجملة بشعاع ذاتي موافق لنتيجة القياس لا يعني أن الجملة لا تكون في حالة تركيب خطي بعد القياس. فنحن نعلم أن نشر أي شعاع يعتمد على أشعة القاعدة المختارة. صحيح أن شعاع الحالة بعد القياس مباشرة لم يعد في حالة تركيب خطي للأشعة الذاتية للملحوظة A (لأنها أشعة مستقلة)، لكنه يمكن أن يكون عبارة عن تركيب خطي لأشعة ذاتية لملحوظة أخرى B.

أما إن كانت نتيجة القياس قيمة ذاتية منحلة g_n مرة، فإن الاختصار الناتج عن عملية القياس يتمثل في إسقاط شعاع الحالة على فضاء الحالات الجزئي $\mathcal{E}(a_n)$ المرفق بالنتيجة a_n. ولذلك يكون من المستحسن استعمال مؤثر الإسقاط P_{a_n} على هذا الفضاء الجزئي ونكتب حسب (1-11) و (1-13) و (1-14) ما يلي

$$\underbrace{|\psi\rangle = \sum_n\sum_{i=1}^{g_n} c_n^i|u_n^i\rangle}_{\text{قبل القياس}} \xrightarrow[\text{نتيجة القياس هي القيمة المنحلة}(a_n)]{} \underbrace{P_{a_n}|\psi\rangle = \sum_{i=1}^{g_n} c_n^i|u_n^i\rangle \in \mathcal{E}(a_n)}_{\text{بعد القياس}} \tag{35-1}$$

فإن كان $|\psi\rangle$ شعاعا موحّدا فلن يكون مسقطه $P_{a_n}|\psi\rangle$ على $\mathcal{E}(a_n)$ موحدا، ولأننا فضلنا العمل بأشعة حالة موحدة سنستعمل بدلا من $P_{a_n}|\psi\rangle$ غير الموحد الشعاع التالي

$$\boxed{\underbrace{|\psi\rangle}_{\text{قبل القياس}} \xrightarrow[\text{نتيجة القياس هي القيمة المنحلة}(a_n)]{} \overbrace{|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{g_n}\left|c_n^i\right|^2}}\sum_{i=1}^{g_n} c_n^i|u_n^i\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi|P_{a_n}|\psi\rangle}}P_{a_n}|\psi\rangle}^{\text{بعد القياس}}} \tag{36-1}$$

من الواضح من خلال هذا أن $|\psi_n\rangle$ هو شعاع ذاتي للملحوظ A مرفق بالقيمة الذاتية a_n، لأن

$$A|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{g_n}\left|c_n^i\right|^2}}\sum_{i=1}^{g_n} c_n^i \overbrace{A|u_n^i\rangle}^{a_n|u_n^i\rangle} = a_n|\psi_n\rangle \tag{37-1}$$

إن النتيجة (1-34) تظهر كحالة خاصة من هذه النتيجة (1-36). في الحقيقة، إذا كان $g_n = 1$ فإن المسقط المقنن $|\psi_n\rangle$ لشعاع الحالة $|\psi\rangle$ على الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(a_n)$ يصبح

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{|c_n^1|}c_n^1|u_n^1\rangle = e^{i\beta}|u_n^1\rangle \equiv |u_n\rangle \tag{38-1}$$

لأن المعامل $e^{i\beta}$، الناتج من قسمة العدد المركب c_n^1 على طويلته، ليس إلا عامل طور كلي ليس له أهمية من الناحية الفيزيائية كما بينا ذلك في الملاحظة 2 (ص8).

نود أن نوضح هنا نقطتين بخصوص حالة الجملة بعد القياس مباشرة. الأولى هي أن كلمة " مباشرة " تعني في هذا السياق ألا يكون هناك وقت كاف لتبدأ الجملة في التطور مع الزمن. لأن هذا التطور يغير من الحالة بين لحظة القياس المباشرة ولحظة زمنية أخرى لاحقة (إلا إن كانت هذه الحلة

عبارة عن حالة مستقرة، سواء بكونها حالة ذاتية للهاملتوني أو حالة ذاتية لملحوظة أخرى تمثل ثابت حركة كما سنرى فيما بعد). أما النقطة الثانية، وهي أننا بحصولنا على القيمة الذاتية a_n كنتيجة لقياس $\mathscr{A}$، فإننا لو أعدنا قياس هذا المقدار مباشرة بعد عملية القياس سنتحصل حتما على نفس النتيجة إذا كان الوقت بين القياسين لا يسمح بتطور الحالة. فإن لم يكن$\mathscr{A}$ ثابت حركة، فإن ترك وقت للجملة لتتطور بعد القياس لنعيد القياس مرة ثانية سيجعل احتمال الحصول على a_n مرة ثانية احتماليا وليس يقينيا كما فعلناه في حالة عدم الفصل بين القياسين.

تنص المسلمة الخاصة باختصار شعاع الحالة بعد القياس على ما يلي:

❖ **المسلّمة 5 – (حالة الجملة بعد عملية القياس مباشرة)**

" إذا قمنا بقياس المقدار الفيزيائي$\mathscr{A}$ لجملة كمومية موجودة في الحالة الموصوفة بالكات الموحد $|\psi\rangle$ وكانت نتيجة القيا هي القيمة الذاتية a_n للملحوظة A، فإن حالة الجملة مباشرة بعد عملية القياس يصفها المسقط العمودي الموحّد للكات $|\psi\rangle$ على فضاء الحالات الجزئي $\mathcal{E}(a_n)$ المرفق بالقيمة الذاتية a_n. أي المسقط العمودي $|\psi_n\rangle$ الذي عبارته الموحدة هي:

$$|\psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi|P_{a_n}|\psi\rangle}} P_{a_n}|\psi\rangle$$

و $|\psi_n\rangle$ هو شعاع ذاتي للملحوظ A مرفق بالقيمة الذاتية a_n.

❖ **تمريـــن 3**

نعتبر نفس الكات $|\psi\rangle$التي تناولناها في التمرين 1 والتي تصف حالة الجملة قبل لحظة القياس مباشرة بحيث

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|u_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle$$

حيث $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ هي ثلاثة أشعة ذاتية للملحوظة A الممثلة لمقدار فيزيائي $\mathscr{A}$ والمرفقة بالقيم الذاتية a_1، a_2، a_3. علما أن هذه الأشعة متعمدة:

1°. إذا أعطى القياس النتيجة a_1 البسيطة، فما هي حالة الجملة مباشرة بعد هذا القياس؟

2°. إذا كانت نتيجة القياس هي $a_2 = a_3$، فما هي حالة الجملة بعد القياس مباشرة؟

❖ **الحـــــــــل**

1°. حسب المسلمة 5، ولأن القيمة a_1 بسيطة، فإن شعاع الحالة مباشرة بعد القياس حسب (1-34) هو

$$\underbrace{|\psi\rangle}_{\text{قبل القياس}} \xrightarrow[\text{نتيجة القياس هي القيمة غير المنحلة}(a_1)]{} \underbrace{|u_1\rangle}_{\text{بعد القياس}}$$

إن مؤثر الاسقاط على الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(a_1)$ هو $P_{a_1} = |u_1\rangle\langle u_1|$، فتطبيقه على $|\psi\rangle$ حسب نص المسلمة

$$|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi|P_{a_1}|\psi\rangle}} P_{a_1}|\psi\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{1/4}}\right)\left(\frac{1}{2}|u_1\rangle\right) = |u_1\rangle$$

2°. إذا كانت نتيجة القياس هي القيمة المنحلة مرتان $a_2 = a_3$ التي يرفق بها كلا الشعاعين $\{|u_2\rangle, |u_3\rangle\}$ فإن مؤثر الإسقاط على الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(a_2 = a_3)$ هو

$$P_{a_2} = |u_2\rangle\langle u_2| + |u_3\rangle\langle u_3|$$

ويكون شعاع الحالة الموحد للجملة بعد القياس مباشرة هو إذن

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{\langle\psi|P_{a_2}|\psi\rangle}} P_{a_2}|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|u_2\rangle + \frac{1}{2}|u_3\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|u_2\rangle + |u_3\rangle\right)$$

من الواضح أن $|\psi_1\rangle$ و $|\psi_2\rangle$ متعمحدان (مساقط عمودية وموحدة لشعاع الحالة $|\psi\rangle$)

$$\langle\psi_i|\psi_j\rangle = \delta_{ij} \quad i,j = 1,2$$

4.2 تطور حالة الجملة مع الزمن

تخص هذه المسلمة المعادلة التي تحكم تطور الجملة بمرور الزمن والتي ليست إلا معادلة شرودينغر التي نكتبها في تمثيل الموضع $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ كما يلي

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{r},t) = H(t)\psi(\mathbf{r},t) \tag{39-1}$$

حيث أن عبارة هاملتوني الجملة $H(t)$ هي

$$H(t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(\mathbf{r},t) \tag{40-1}$$

في الواقع، لم يقدم شرودينغر برهانا على اشتقاق هذه المعادلة الموجية (1-39)، بل وضعها بصورة حدسية لدراسة حركة إلكترون ذرة الهيدروجين كما هو معلوم. أصبحت هذه المعادلة أحد القواعد التي يجب التعامل معها كمسلمة أثبتت صحتها اتفاق نتائجها مع التجربة. وللتخلص من أي تمثيل يمكن أن يحد من عموم هذه المعادلة، فإن شكلها في فضاء الحالات $\mathcal{E}$ هو

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle \tag{41-1}$$

إن حقيقة أن معادلة شرودينغر هي من الرتبة الأولى في الزمن تعني أنه بمعرفة شعاع الحالة $|\psi(t_0)\rangle$ في لحظة ما t_0 سيمكننا معرفة شعاع الحالة في أي لحظة لاحقة t وذلك بحل هذه المعادلة. إذن، فتطور الجملة بين اللحظتين t_0 و t هو تطور حتمي مالم تخضع الجملة الكمومية لاضطراب يؤثر على حالتها (مثل عملية القياس التي تستلزم تفاعل الجملة مع جهاز القياس). وهنا يجب أن نميز بين كون نتائج النظرية احتماليةً (لا حتمية) وبين تطورها الحتمي الخاضع لهذه المعادلة. صحيح أن تغير $|\psi(t)\rangle$ مع الزمن تغيّر محكوم بمعادلة شرودينغر وأنه بمعرفتنا لحالة الجملة المعزولة في لحظة ابتدائية t_0 يمكننا معرفة حالتها في أي لحظة لاحقة، إلا أن عملية استخراج المعلومات التي يحملها الشعاع $|\psi(t)\rangle$ عن الجملة بواسطة بعملية القياس لا تكون إلا بصورة احتمالية. فحتى لو عرفنا كيف سيكون الشعاع بعد مدة زمنية، فإن كل ما يحمله هذا الشعاع من معلومات عن الجملة لا يمكن التنبؤ بها أو الحصول عليها إلا بشكل احتمالي.

تنص المسلمة السادسة في ميكانيك الكم على ما يلي

> ❖ المسلّمة 6 – (تطور حالة الجملة مع الزمن)
>
> " إن تطور شعاع حالة الجملة $|\psi\rangle$ مع الزمن محكوم بمعادلة شرودينغر:
>
> $$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$$
>
> حيث $H(t)$ هو الملحوظة المرفقة بالطاقة الكلية للجملة، ويسمى هاملتوني الجملة "

5.2 التطور الزمني لحالة جملة كمومية محافظة

نقول عن جملة فيزيائية أنها جملة محافظة إذا كان هاملتونها H لا يتعلق صراحة بالزمن. لكن معنى هذا التعريف في الميكانيك الكلاسيكي يختلف عن معناه في الميكانيك الكمومي، ففي حين أن القول "هاملتوني الجملة لا يتعلق صراحة بالزمن" يعني في الميكانيك الكلاسيكي أن "الطاقة الكلية لهذه

الجملة محفوظة (أي ثابتة) "، فإن نفس القول لا يعني ذلك في ميكانيك الكم [2] بل يعني أن القيمة المتوسطة للطاقة هي القيمة المحفوظة وليست قيمة الطاقة في حد ذاتها مثل الميكانيك الكلاسيكي، وذلك دون أن نعني بهذا طبعا أن طاقة الجملة تتغير مع الزمن أو غير محفوظة. فيجب أن نفرق بين قولنا أن طاقة الجملة **ثابتة** وبين قولنا **محفوظة** في ميكانيك الكم. فسنرى أنها تكون محفوظة دون أن يعني ذلك بالضرورة أن تكون ثابتة. إن هذا الفرق بينهما راجع إلى مفهوم تراكب الحالات المميز للجمل الكمومية، وأن هذا التراكب يشمل حالات للجملة ذات طاقات مختلفة بحيث أن عملية القياس تعطينا قيمة في كل مرة تكون مختلفة عن الأخرى بصفة عامة، ولذلك لا يسعنا أن نقول إنها ثابتة في حين أنه يمكننا أن نقول أنها محفوظة من زاوية أن الجملة لا تتبادل طاقة مع محيطها الخارجي. يمكن أن نفهم هذا الفرق بشكل أفضل بعد أن نرى شكل حلول معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن في حالة الجمل المحافظة والفرق بين الحالات المستقرة والحالات غير المستقرة.

1.5.2 حلول معادلة شرودينغر $|\psi(t)\rangle$- الحلول غير المستقرة

إذا كان هاملتونيها H لا يتعلق صراحة بالزمن فإن معادلة شرودينغر (1-41) تكتب

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle \tag{42-1}$$

حيث نزعنا تعلق الهاملتوني بالزمن. سنفرض للتبسيط أن طيف الطاقة للجملة المحافظة التي ندرسها متقطع وغير منحل، وهذا يعني أن معادلة القيم الذاتية لهاملتوني هذه الجملة هي

$$H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle \tag{43-1}$$

حيث E_n و $|\varphi_n\rangle$ هي القيم الذاتية والأشعة الذاتية المرفقة بها للهاملتوني H وهي غير متعلقة بالزمن لأن الهاملتوني مستقل عنه صراحة. كما أن المعادلة المرافقة لـ (1-43)، والتي سنحتاجها بعد قليل، تكتب كما يلي

$$\langle\varphi_n|H = E_n\langle\varphi_n| \tag{44-1}$$

وبما أن الهاملتوني H عبارة عن ملحوظة، فلا شك إذن أن مجموعة الأشعة $\{|\varphi_n\rangle\}$ تشكل أساسا لفضاء الحالات للجملة. وبالتالي يمكن أن ننشر أي شعاع حالة ينتمي إلى هذا الفضاء على أشعة هذا الأساس. وبشكل خاص، فبالنسبة للحلول العامة $|\psi(t)\rangle$ لمعادلة شرودينغر (1-42) يمكن أن ننشرها إذن كما يلي

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t)|\varphi_n\rangle \tag{45-1}$$

حيث نلاحظ أن التعلق الزمني لهاته الحلول $|\psi(t)\rangle$ تتضمنه معاملات النشر $c_n(t)$ التي عبارتها هي

$$c_n(t) = \langle\varphi_n|\psi(t)\rangle \tag{46-1}$$

إذن يكفي أن نعرف عبارة هاته المعاملات $c_n(t)$ حتى نعرف عبارة الحلول $|\psi(t)\rangle$. في الحقيقة هذه المعاملات ماهي إلا عناصر المصفوفة الممثلة لـ $|\psi(t)\rangle$ في التمثيل الطاقوي $\{|\varphi_n\rangle\}$.

يمكننا إيجاد عبارة المعاملات $c_n(t)$ سواء بتعويض النشر (1-45) في معادلة شرودينغر (1-42) أو بطريقة مكافئة باشتقاق (1-46) بالنسبة للزمن ونستعمل ضمنها (1-42) و (1-44). باتباع الطريقة الثانية نجد

$$\frac{dc_n(t)}{dt} = \langle\varphi_n|\overbrace{\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle}^{=\frac{1}{i\hbar}H|\psi(t)\rangle} = \frac{1}{i\hbar}\overbrace{\langle\varphi_n|H}^{=E_n\langle\varphi_n|}\,|\psi(t)\rangle = \frac{E_n}{i\hbar}\overbrace{\langle\varphi_n|\psi(t)\rangle}^{=c_n(t)} = \frac{E_n}{i\hbar}c_n(t) \tag{47-1}$$

وهي معادلة من الرتبة الأولى في الزمن يمكن مكاملتها بسهولة بين اللحظة الابتدائية t_0 ولحظة زمنية لاحقة t من تطور شعاع الحالة فتكون عبارة هذه المعاملات إذن

[2] ما عدا في الحالة الخاصة التي تكون فيها الجملة في حالة مستقرة، أي حالة ذاتية للهاملتوني H.

(48-1)
$$c_n(t) = c_n(t_0)e^{-i\frac{E_n(t-t_0)}{\hbar}}$$

حيث $c_n(t_0)$ هي معاملات نشر شعاع الحالة الابتدائي، وهي تساوي حسب (46-1)

(49-1)
$$c_n(t_0) = \langle\varphi_n|\psi(t_0)\rangle$$

وبالتالي، فانطلاقا من عبارة شعاع الحالة الابتدائي $|\psi(t_0)\rangle$ التالية

(50-1)
$$|\psi(t_0)\rangle = \sum_n c_n(t_0)|\varphi_n\rangle$$

نصل إلى عبارة شعاع الحالة في أي لحظة زمنية لاحقة وذلك باستعمال النتيجة (48-1) بشكل صريح ضمن (45-1)

(51-1)
$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t_0)e^{-i\frac{E_n(t-t_0)}{\hbar}}|\varphi_n\rangle}$$

وهي عبارة ذات شكل بسيط في حالة الجمل المحافظة، إذ يكفي للوصول إليها نشر شعاع الحالة الابتدائي $|\psi(t_0)\rangle$ على أشعة القاعدة في التمثيل الطاقوي $\{|\varphi_n\rangle\}$ كما في (50-1) ثم نقوم بضرب كل معامل $c_n(t_0)$ من معاملات النشر بالأس $\exp(-iE_n(t-t_0)/\hbar)$ المتعلق بالمستوى الطاقوي E_n المناسب لشعاع القاعدة $|\varphi_n\rangle$. نرى إذن أنه إذا كان شعاع الحالة الابتدائي $|\psi(t_0)\rangle$ عبارة عن تركيب خطي من الأشعة الذاتية $\{|\varphi_n\rangle\}$ لهاملتوني الجملة المحافظة، فإنه سيتطور مع الزمن بحيث سيصف حالة أخرى مختلفة تماما عن الحالة الابتدائية وتكون ممثلة بشعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ كما تعبر عنه العلاقة (51-1)، وهذا الاختلاف ناشئ من كون معاملات الطور $\exp(-iE_n(t-t_0)/\hbar)$ نسبية وليست معاملات طور كلية (راجع الملاحظة 3 ص 8)، ونسميها معاملات الطور الديناميكية لأنها متعلقة بديناميكية الجملة. وبسبب هذا الاختلاف بين $|\psi(t_0)\rangle$ و $|\psi(t)\rangle$ نقول أن هذه الحلول (51-1) لمعادلة شرودينغر هي حلول غير مستقرة، أو بصياغة أوضح نقول أن حالة الجملة غير مستقرة لأن خصائص الجملة تتغير فيها مع الزمن تبعا لتغير شعاع الحالة الذي يصف الجملة.

لنرى الآن لماذا لا نعتبر من وجهة نظر كمومية أن طاقة الجملة هي قيمة الثابتة في حالة الجمل المحافظة؟ في الحقيقة، إن التركيب الخطي للحالات الذاتية $|\varphi_n\rangle$ للهاملتوني H الذي يأخذه شعاع الحالة الذي يصف الجملة في أي لحظة زمنية، سواء الابتدائية (50-1) أو أي لحظة أخرى لاحقة (51-1)، يجعل حصولنا على قيمة معينة من طاقة الجملة عبر عملية القياس لا يتم إلا بصورة احتمالية فقط كما ناقشنا ذلك في المسلّمة 4 الخاصة بنتائج القياس الممكنة. لقد رأينا حسب المسلمة 4-1 أن احتمال حصولنا على قيمة ما E_n من طيف الطاقة المتقطع وغير المنحل يساوي حسب العلاقة (7-1) هو

(52-1)
$$\mathcal{P}(E_n) = |\langle\varphi_n|\psi(t_0)\rangle|^2 = |c_n(t_0)|^2 = |c_n(t)|^2 = |\langle\varphi_n|\psi(t)\rangle|^2 < 1$$

ففي كل مرة نعيد فيها القياس، في نفس الظروف، نتحصل على قيمة للطاقة مختلفة عن سابقتها بصفة عامة، وهذا ما يمنعنا من القول إن طاقة الجملة محفوظة. فإعادة القياس في نفس الشروط تمنحنا نفس النتيجة في الميكانيك الكلاسيكي لذلك نقول إن الطاقة ثابتة للجمل التي هاملتونها مستقل عن الزمن، وليس الأمر كذلك في ميكانيك الكم. فالأمر إذن راجع بشكل أساسي إلى كون حالة الجملة في أي لحظة من لحظات تطورها تركيبا خطيا من الحالات الذاتية للهاملتوني H الذي يمثل طاقة الجملة. وذلك لا يعني أن طاقتها غير محفوظة، فلا يجب الخلط بين واقع عدم حصولنا في كل مرة على نفس النتيجة (**عدم ثبات** نتيجة قياس الطاقة) وبين كون طاقة الجملة متغيرة. بل قد تكون طاقة الجملة محفوظة (بأن تكون معزولة لا تتفاعل مع الوسط الخارجي) لكن التركيب الخطي لا يسمح بالقول أن طاقة الجملة ثابتة لأن نتائج قياساتنا المتكررة على نفس الجملة مختلفة. وهذا الفرق بين **ثابتة ومحفوظة** غير مطروح في الميكانيك الكلاسيكي، فهما سِيّان كما هو واضح.

بالنسبة للتطور الزمني للجملة ذات الطيف الطاقوي المتصل، يمكن باتباع نفس الخطوات السابقة مع استعمال نشر (مثل النشر (18-1)) خاص بالقاعدة المتصلة $\{|\varphi_E\rangle\}$ المرفقة بقيم الطيف المستمر E. سنصل إلى النتيجة التالية

(53-1)
$$\boxed{|\psi(t)\rangle = \int dE c(E,t_0)e^{-i\frac{E(t-t_0)}{\hbar}}|\varphi_E\rangle}$$

هذا فيما يخص الحلول غير المستقرة لمعادلة شرودينغر التي نتحصل عليها بانطلاقنا من حالة ابتدائية ليست حالة ذاتية للهاملتوني بل تركيب خطي

من هاته الحالات. لكن كيف سيكون تطور لو لم تكن حالة الجملة تركيبا خطيا من الحالات $|\varphi_n\rangle$؟ أي ماذا لو تكون حالة الجملة هي إحدى الحالات الذاتية للهاملتوني H؟ في هذه الحالة يمكننا أن نقول بأن طاقة الجملة ثابتة لأن نتيجة قياسنا للطاقة ستكون أكيدة. ذلك ما سنراه في الفقرة الموالية.

2.5.2 الحلول المستقرة لمعادلة شرودينغر

رأينا في الفقرة السابقة كيف يكون تطور شعاع الحالة حين يكون تركيبا خطيا من الأشعة الذاتية لهاملتوني الجملة. لكن لو كان شعاع الحالة الابتدائي هو نفسه أحد الأشعة الذاتية $|\varphi_i\rangle$، أي

$$|\psi(t_0)\rangle = |\varphi_i\rangle \tag{54-1}$$

ففي هذه الحالة تكون جميع المعاملات $c_n(t_0)$ في (1-50) معدومة إلا المعامل $c_i(t_0)$ الذي يساوي 1 حسب (1-54) ونكتب

$$c_n(t_0) = \delta_{ni} \tag{55-1}$$

وبالتالي ستكون كل المعاملات $c_n(t)$ معدومة عدا المعامل $c_i(t)$ الذي يساوي حسب (1-48)

$$c_i(t) = e^{-i\frac{E_i(t-t_0)}{\hbar}} \tag{56-1}$$

إذن ستكون عبارة الشعاع الذي يصف تطور حالة الجملة مع الزمن حسب (1-51) و (1-56) هي

$$\boxed{|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{E_i(t-t_0)}{\hbar}}|\varphi_i\rangle = e^{-i\frac{E_i(t-t_0)}{\hbar}}|\psi(t_0)\rangle} \tag{57-1}$$

نرى من خلال هذه النتيجة أن شعاع الحالة $|\psi(t_0)\rangle$ الذي يصف الحالة الابتدائية لا يختلف عن الشعاع $|\psi(t)\rangle$ الذي يصف تطور حالة الجملة مع الزمن إلا بمعامل طور كلي، وبالتالي فإن كلاهما يصف نفس الحالة الكمومية للجملة، وهذا يعني أن حالة الجملة تبقى مستقرة بمرور الزمن. فكل ما يمكن حسابه باستعمال $|\psi(t_0)\rangle$ يمكننا حسابه أيضا بصورة مكافئة باستعمال $|\psi(t)\rangle$ (انظر الملاحظة 2 ص 8). إذن فجميع خصائص الجملة تبقى ثابتة بمرور الزمن، ولهذا السبب نسمي الحالات الذاتية للهاملتوني H **بالحالات المستقرة**.

كحالة خاصة إذن، إذا كانت شعاع الحالة الابتدائي يصف حالة مستقرة للجملة، أي يكتب كما في (1-54) فإن قياس الطاقة سيعطي حتما النتيجة E_i مهما كانت لحظة القياس. في الحقيقة، لدينا

$$\mathcal{P}(E_n) = |\langle\varphi_n|\psi(t_0)\rangle|^2 = |\langle\varphi_n|\psi(t)\rangle|^2 = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان} \quad n = i \\ 0 & \text{إذا كان} \quad n \neq i \end{cases} \tag{58-1}$$

ولذلك يمكن أن نقول في هذه الحالة أن طاقة الجملة ثابتة عكس الحالات غير المستقرة، لأن إعادة قياسها في كل مرة سيعطينا نفس النتيجة. طبعا يبقى هذا صحيحا ما لم نقم بقياس مقدار فيزيائي آخر، $\mathscr{B}$ **مثلا**، لا يتلاءم مع هاملتوني الجملة H، لأن قياس مثل هذا المقدار سيغير حتما من حالة الجملة ليجعلها حالة غير مستقرة لأنها لن تكون حتما حالة ذاتية للهاملتوني بسبب عدم تبادله مع $\mathscr{B}$. لكن في المقابل قياس أي مقدار متلائم مع H وغير متعلق بالزمن لن يغير من استقرار حالة الجملة. سنرى كيف يكون ذلك عند تعرضنا لمفهوم ثوابت الحركة.

6.2 قواعد التكميم

في ميكانيك الكم، يتم وصف موضع الجسيم $\mathbf{r}$ واندفاعه $\mathbf{p}$ بواسطة الملحوظتين $\mathbf{R}$ و $\mathbf{P}$ بحيث

$$\begin{cases} \mathbf{r}(x,y,z) \to \mathbf{R}(X,Y,Z) & \text{بحيث} \quad \langle\mathbf{r}|\mathbf{R}|\psi\rangle = \mathbf{r}\langle\mathbf{r}|\psi\rangle = \mathbf{r}\psi(\mathbf{r}) \\ \mathbf{p}(x,y,z) \to \mathbf{P}(P_x,P_y,P_z) & \text{بحيث} \quad \langle\mathbf{p}|\mathbf{P}|\psi\rangle = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}\langle\mathbf{r}|\psi\rangle = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}\psi(\mathbf{r}) \end{cases} \tag{59-1}$$

وللتعميم، يتم وصف المقادير الفيزيائية الكلاسيكية $\mathscr{A}(\mathbf{r},\mathbf{p})$ بواسطة ملحوظات موافقة لها A حيث يتم استبدال متغيرات الموضع والاندفاع في العبارة الكلاسيكية للمقدار $\mathscr{A}$ بواسطة الملحوظات $\mathbf{R}$ و $\mathbf{P}$. ونكتب الارفاق

$$\mathcal{A}(\mathbf{r},\mathbf{p},t) \to A(\mathbf{R},\mathbf{P},t) \tag{60-1}$$

مثلا، فالعزم الحركي المداري $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ نرفق به ملحوظة العزم الحركي المداري $\mathbf{L}$ حيث

$$\mathcal{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \rightarrow \mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} = -i\hbar\mathbf{R} \times \boldsymbol{\nabla} \tag{61-1}$$

لكن في ميكانيك الكم، نصادف مقادير فيزيائية ليس لها نظير في الميكانيك الكلاسيكي، ومن أشهر الأمثلة على ذلك هو العزم الحركي الذاتي الذي نسميه " سبين " والذي يمثل مقدارا كموميا بحتا ولا يمكن مقاربته بصورة كلاسيكية أو استنادا عبارته انطلاقا من مقدار كلاسيكي. ولذلك يتم تعريف ملحوظة السبين $\mathbf{S}$ مباشرة من خلال خصائص هذا المقدار الكمومي. كما أن فضاء الحالات التي تعمل فيه هذه الملحوظة هو فضاء نسميه فضاء حالات السبين ونرمز له بـ $\mathcal{E}_\mathbf{s}$ وهو مختلف عن فضاء الحالات المدارية $\mathcal{E}_\mathbf{r}$ كالذي تعمل فيه ملحوظة العزم الحركي المداري $\mathbf{L}$. والملحوظات الأخرى المشتقة من مقادير كلاسيكية. سنناقش ذلك بالتفصيل عند معالجتنا لنظرية العزم الحركي في ميكانيك الكم. وعلى كل حال ففضاء الحالات الكلي لجملة تملك كلا النوعين من مثل هاته الملحوظات سيكون عبارة عن الجداء التنسوري للفضاءات التي تعمل فيها هذه الأخيرة. مثلا بالنسبة للملحوظتين $\mathbf{L}$ و $\mathbf{S}$ يكون فضاء الحالات الكلي هو

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_\mathbf{r} \otimes \mathcal{E}_\mathbf{s} \tag{62-1}$$

يمكن أن نذكر في هذا السياق أيضا الإيزوسبين و الزوجية وغيرها من الملحوظات.

3. القيمة المتوسطة لملحوظة وتطورها مع الزمن

1.3 تعريف القيمة المتوسطة $\langle A\rangle(t)$

لنفرض أننا نريد قياس مقدار فيزيائي $\mathscr{A}$ تمثله الملحوظة A ذات القيم الذاتية a_n المتقطعة وغير المنحلة والمرفق بها الأشعة الذاتية $|u_n\rangle$. فإن كانت حالة الجملة $|\psi(t)\rangle$ التي نجري عليها القياس في لحظة معينة تركيبا خطيا من الحالات الذاتية للملحوظة A، فإن نتائج القياس ستكون احتمالية كما نعلم، وقيم هذه الاحتمالات هي $\mathcal{P}(a_n,t)$. وبالتالي تكون القيمة المتوسطة لنتائج القياس هي

$$\boxed{\overline{A}(t) = \sum_n a_n \mathcal{P}(a_n,t)} \tag{63-1}$$

ويمكننا ربط هذه النتيجة مباشرة بشعاع الحالة الموحد $|\psi(t)\rangle$ إذا قمنا بما يلي: نعوض $\mathcal{P}(a_n,t)$ بعبارتها (1-8) في (1-63) فنجد أن

$$\overline{A}(t) = \sum_n a_n |\langle u_n|\psi(t)\rangle|^2 = \sum_n a_n \langle\psi(t)|u_n\rangle\langle u_n|\psi(t)\rangle \tag{64-1}$$

وباستخدام معادلة القيم الذاتية (1-2) للملحوظة A نجد أن

$$\overline{A}(t) = \sum_n \langle\psi(t)|A|u_n\rangle\langle u_n|\psi(t)\rangle = \left\langle\psi(t)\middle|A\left(\overbrace{\textstyle\sum_n |u_n\rangle\langle u_n|}^{=\mathrm{I}}\right)\middle|\psi(t)\right\rangle \tag{65-1}$$

حيث استخدمنا علاقة الانغلاق (1-3) للأشعة الذاتية $\{|u_n\rangle\}$. إذن، فالقيمة المتوسطة للملحوظة A في الحالة $|\psi(t)\rangle$ هي

$$\boxed{\overline{A}(t) = \langle A\rangle(t) = \langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle} \tag{66-1}$$

فإن لم يكن الشعاع $|\psi(t)\rangle$ موحدا، فيجب قسمة (1-66) على $\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle$ كما نبهنا على ذلك من قبل. أي

$$\langle A\rangle(t) = \frac{\langle\psi(t)|A|\psi(t)\rangle}{\langle\psi(t)|\psi(t)\rangle} \tag{67-1}$$

إن تعلق القيمة المتوسطة بالزمن ليس صحيحا بالنسبة لكل المقادير الفيزيائية، بل يمكن أن تتطور الجملة خلال الزمن دون أن تتغير القيمة المتوسطة لمجموعة من المقادير الخاصة بالجملة والتي نسمها في هذه الحالة ثوابت الحركة، في حين أن تلك التي تتغير قيمها المتوسطة مع الزمن لا تكون ثوابت حركة. سنعالج هذا بالتفصيل عند دراسة معادلة ثوابت الحركة.

يجب أن ننبه هنا إلى إن العلاقة (1-66) تبقى صحيحة مهما كانت طبيعة طيف الملحوظة A، سواء كان متقطعا منحلا أو مستمرا أو غير ذلك، فيكفي لإثباتها أن نعيد الانطلاق من (1-63) ولكن بعد تكييفها مع طبيعة الطيف، ثم نتبع نفس الخطوات التي فعلناها هنا في حالة الطيف المتقطع

البسيط. فمثلا، لو عالجنا الطيف المتصل غير المنحل، فإننا ننطلق من العبارة

$$\langle A\rangle(t) = \int \alpha d\mathcal{P}(\alpha) \tag{68-1}$$

وباستعمال نتائج الفقرة 2.2.2.2 سنصل إلى نفس النتيجة (1-66).

2.3 الانحراف التربيعي المتوسط ΔA وعلاقات الارتياب لهايزنبارغ

1.2.3 تعريف الانحراف التربيعي المتوسط

إن قمنا بحساب القيمة المتوسطة للملحوظة $\langle A\rangle$، فإن نتائج قياس المقدار الفيزيائي $\mathscr{A}$ ستكون متوزعة حولها، ومن المهم جدا معرفة هذا التشتت حول القيمة المتوسطة. إن انحرافات نتائج القياس حول القيمة المتوسطة، أي القيم $(a_n - \langle A\rangle)$، يمكن أن تكون موجبة أو سالبة لأنها ستكون إما أكبر أو أصغر من القيمة المتوسطة، ولكن مجموع هذه الانحرافات يكون معدوما لأنه هناك قدرا من الانحرافات الموجبة مساويا للانحرافات السالبة وإلا لما كانت $\langle A\rangle$ تشير إلى قيمة متوسطة. لكن يمكن في المقابل تعريف الانحراف التربيعي المتوسط بأن نأخذ متوسط مربع هذه الانحرافات حتى نتفادى القيم السالبة لهذه الأخيرة. إذن

$$\Delta A = \sqrt{\langle(A - \langle A\rangle)^2\rangle} = \sqrt{\langle A^2\rangle - \langle A\rangle^2} \tag{69-1}$$

يجب أن ننتبه هنا إلى أن تعريف القيمة المتوسطة يعتمد على مفهوم احتمال الحصول على نتيجة قياس ما كما رأينا من التعريف (1-63) وأن هذا تعريف الاحتمال يقوم على اعتبار عدد مرات القياس $\mathcal{N}$ كبيرا جدا $(\mathcal{N} \to \infty)$. ولذلك فإن القيمة المتوسطة المحسوبة نظريا تكون متلائمة مع التجربة إن كان عدد مرات إجرائها كبيرا.

2.2.3 علاقات الارتياب لهايزنبارغ

1.2.2.3 علاقات الارتياب بين الموضع والاندفاع

بالاعتماد على عبارة متوسط الانحراف التربيعي (1-69)، يمكن أن نثبت أن العلاقة التالية

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} \tag{70-1}$$

صالحة من أجل الملحوظتين A و B اللتين تحققان علاقة التبادل $[A,B] = i\hbar$. وبشكل خاص، بالنسبة لملحوظتي الموضع X والاندفاع يكون

$$\begin{cases} [X,P_x] = i\hbar & \Rightarrow \quad \Delta X \Delta P_x \geq \hbar/2 \\ [Y,P_y] = i\hbar & \Rightarrow \quad \Delta Y \Delta P_y \geq \hbar/2 \\ [Z,P_z] = i\hbar & \Rightarrow \quad \Delta Z \Delta P_z \geq \hbar/2 \end{cases} \tag{71-1}$$

فكلما كانت دقة القياس على أحد موضع الجسيم وفق أحد محاور الحركة كبيرة كلما كان الارتياب على قيمة الاندفاع وفق نفس المحور كبيرا في المقابل.

2.2.2.3 علاقة الارتياب طاقة – زمن

هناك أيضا علاقة شبيهة بالعلاقة (1-70) تربط بين طاقة الجملة وزمن تطورها حيث نكتب

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \tag{72-1}$$

إن الزمن في ميكانيك الكم عبارة عن وسيط وليس ملحوظة، لذلك فإن معنى علاقة الارتياب طاقة -زمن مختلف تماما عن معنى علاقات الارتياب موضع –اندفاع، ففي حين أن هذه الأخيرة مرتبطة بمشكلة القياس فإن (1-72) تتعلق بخاصية ذاتية للجملة الكمومية وهي الزمن الخاص بتطورها. فإذا كان الزمن اللازم للجملة حتى تتغير من حالة كمومية إلى حالة كمومية أخرى هو Δt فإن الفرق الطاقوي بين الحالتين يجب أن يكون بحيث يحقق العلاقة (1-72).

3.3 معادلة تطوّر القيمة المتوسطة مع الزمن لملحوظة $\langle A\rangle(t)$

لقد ذكرنا عند تعريفنا للقيمة المتوسطة أن هذه الأخيرة تتعلق بالزمن في حالة المقادير الفيزيائية التي ليست ثوابت حركة، وأنها تبقى ثابتة بالنسبة لثوابت الحركة. ولنرى كيف تتطور مع الزمن يمكننا اشتقاق العبارة (1-66) بالنسبة للزمن فيكون

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle(t)=\left(\overbrace{\frac{d}{dt}\langle\psi(t)|}^{=\frac{i}{\hbar}\langle\psi(t)|H(t)}\right)A|\psi(t)\rangle+\left\langle\psi(t)\left|\frac{\partial A}{\partial t}\right|\psi(t)\right\rangle+\langle\psi(t)|A\left(\overbrace{\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle}^{=-\frac{i}{\hbar}H(t)|\psi(t)\rangle}\right) \quad (73\text{-}1)$$

حيث استخدامنا معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن (1-41) في الطرف الأخير والمعادلة المرافقة المركبة لها في الطرف الأول. يمكن أن نضع (1-73) على الشكل الذي يظهر فيه مبدل الهاملتوني $H(t)$ والملحوظة A كالتالي

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle(t)=\frac{i}{\hbar}\langle\psi(t)|[H(t),A]|\psi(t)\rangle+\left\langle\psi(t)\left|\frac{\partial A}{\partial t}\right|\psi(t)\right\rangle \quad (74\text{-}1)$$

والتي يمكن كتابتها إذن كما يلي

$$\boxed{\frac{d}{dt}\langle A\rangle(t)=\frac{i}{\hbar}\langle[H(t),A]\rangle+\langle\frac{\partial A}{\partial t}\rangle} \quad (75\text{-}1)$$

وهي المعادلة التي تحكم تطور القيمة المتوسطة للملحوظة مع الزمن.

4.3 ثوابت الحركة

من خلال (1-75)، نلاحظ أنه إذا حققت الملحوظة A الشرطين التاليين

$$\begin{cases}[H(t),A]=0\\ \dfrac{\partial A}{\partial t}=0\end{cases} \quad (76\text{-}1)$$

فإننا نسمي المقدار الفيزيائي الذي توافقه هذه الملحوظة بثابت الحركة للجملة المدروسة. فقيمته المتوسطة ثابتة خلال الزمن. وتحقق الملحوظة A هذه المجموعة من الخصائص

1- مهما يكن الكات $|\psi(t)\rangle$ فإن

$$\frac{d}{dt}\langle A\rangle=0\Leftrightarrow\langle A\rangle=\text{ثابت} \quad (77\text{-}1)$$

2- يملك الهاملتوني H والملحوظة A مجموعة من الأشعة الذاتية المشتركة.

3- احتمال الحصول على أي قيمة ذاتية a_n للملحوظة A ثابت خلال الزمن، أي

$$\mathcal{P}(a_n)=|\langle u_n|\psi(t)\rangle|^2=\text{ثابت} \quad (78\text{-}1)$$

حيث $|u_n\rangle$ هو الشعاع الذاتي المرفق بـ a_n.

❖ تمريـــن 4

نعتبر جملة ذات مستويين طاقويين E_1 و E_2 غير منحلين والمرفق بهما على الترتيب الشعاعان الذاتيان $|\varphi_1\rangle$ و $|\varphi_2\rangle$ لهاملتوني الجملة H اللذان يشكلان أساسا لفضاء الحالات ذي البعدين. يُعرف تواتر بور بأنه الفرق الطاقوي بين المستويات المختلفة للجملة، وفي هذه الحالة نكتب هنا

$$\hbar\omega=E_2-E_1\ ;\ E_2>E_1$$

ولتكن الملحوظة A ذات القيم الذاتية a_1 و a_2 والأشعة الذاتية المرفقة $|\chi_1\rangle$ و $|\chi_2\rangle$. يُعطى نشر الأشعة الذاتية للملحوظة A على أشعة القاعدة لفضاء الحالات كما يلي

$$\begin{cases} |\chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle) \\ |\chi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle - |\varphi_2\rangle) \end{cases}$$

°1. إذا كانت الحالة الابتدائية للجملة هي $|\psi(t_0 = 0)\rangle = |\chi_1\rangle$،فأوجد من أجل اللحظة $t > 0$:

أ- عبارة شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ الذي يصف تطور الجملة. هل حالة الجملة مستقرة؟

ب- احتمال الحصول على كل من a_1 و a_2.

ت- القيمة المتوسطة للملحوظة A.

ث- ماذا تلاحظ على هذه النتائج؟ لماذا؟

ج- تأكد من علاقة الارتياب طاقة – زمن.

ح- احسب احتمال الحصول على قيم الطاقة للجملة عند قياسها في هذه اللحظة؟ ماذا تلاحظ؟

°2. إذا كانت الحالة الابتدائية للجملة هي $|\psi(t_0 = 0)\rangle = |\varphi_1\rangle$، فأوجد من أجل اللحظة $t > 0$:

أ- عبارة شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ الذي يصف تطور الجملة.

أ- احتمال الحصول على كل من a_1 و a_2.

ب- القيمة المتوسطة للملحوظة A.

ت- ماذا تلاحظ؟ فسّر.

❖ الحـــــــــل

°1. الحالة الابتدائية $|\psi(t_0 = 0)\rangle = |\chi_1\rangle$

أ- عبارة شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$

حتى نتحصل على عبارة شعاع الحالة الذي يصف تطور الجملة في أي لحظة زمنية $t > 0$ يجب أن ننشر شعاع الحالة الابتدائي على الأشعة الذاتية لهاملتوني الجملة كما في (1-50). لدينا من نص التمرين

$$|\psi(t_0 = 0)\rangle = |\chi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\varphi_1\rangle + |\varphi_2\rangle)$$

ثم حسب العلاقة (1-51)، نقوم بضرب كل حد من حدود هذا النشر بمعامل الطور الديناميكي $\exp(-iE_n(t - t_0)/\hbar)$ المناسب. علما أن اخترنا اللحظة الابتدائية معدومة $t_0 = 0$، فسنجد إذن

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}|\varphi_1\rangle + e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}|\varphi_2\rangle\right)$$

نلاحظ أن شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ مختلف تماما عن شعاع الحالة الابتدائي $|\psi(0)\rangle$، فهما لا يصفان إذن نفس الحالة الكمومية للجملة، لذلك نقول أن حالة الجملة ليست حالة مستقرة

والتي نستطيع إعادة كتابتها بدلالة الأشعة $|\chi_1\rangle$ و $|\chi_2\rangle$ إذا استخدمنا

$$\begin{cases} |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi_1\rangle + |\chi_2\rangle) \\ |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi_1\rangle - |\chi_2\rangle) \end{cases}$$

وبتعويضهما في عبارة $|\psi(t)\rangle$ أعلاه نجد

$$|\psi(t)\rangle = \overbrace{\frac{1}{2}\left(e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right)}^{=c_1(t)}|\chi_1\rangle + \overbrace{\frac{1}{2}\left(e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right)}^{=c_2(t)}|\chi_2\rangle = c_1(t)|\chi_1\rangle + c_2(t)|\chi_2\rangle$$

ب- احتمال الحصول على كل من a_1 و a_2

$$\begin{cases} \mathcal{P}(a_1,t) = |\langle\chi_1|\psi(t)\rangle|^2 = |c_1(t)|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right|^2 = \frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}\right)\right] = \cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \\ \mathcal{P}(a_2,t) = |\langle\chi_2|\psi(t)\rangle|^2 = |c_2(t)|^2 = \frac{1}{4}\left|e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} - e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right|^2 = \frac{1}{2}\left[1-\cos\left(\frac{E_2-E_1}{\hbar}\right)\right] = \sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) \end{cases}$$

ت- القيمة المتوسطة $\langle A\rangle(t)$

يمكن حساب القيمة المتوسطة مباشرة باستعمال (1-63) فنجد هنا

$$\langle A\rangle(t) = a_1\mathcal{P}(a_1,t) + a_2\mathcal{P}(a_2,t) = a_1\cos^2\left(\frac{\omega t}{2}\right) + a_2\sin^2\left(\frac{\omega t}{2}\right)$$

أو نقوم بحسابها باستخدام (1-66).

ث- ملاحظات وتعليقات حول نتائج الحالة غير المستقرة

من خلال النتائج التي توصلنا إليها، نلاحظ أن شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ مختلف عن شعاع الحالة الابتدائي، فهما لا يصفان إذن نفس الحالة الكمومية للجملة، لذلك نقول أن حالة الجملة ليست حالة مستقرة. كما أن احتمال الحصول على القيم الذاتية للملحوظة A كنتائج للقياس متعلقة بالزمن، وهي تهتز بين القيمتين 1 و 0 بتواتر معين يمكن حسابه بسهولة. وكذلك الأمر بالنسبة للقيمة المتوسطة $\langle A\rangle(t)$. فكل النتائج الخاصة بالملحوظة A متعلقة بالزمن، فهي إذن ليست بثابت حركة. في الحقيقة، يمكن توقع ذلك بمجرد معرفة أنها غير متبادلة مع الهاملتوني. يمكن رؤية هذا الأمر من خلال الأشعة الذاتية لكل منهما، فمن الواضح أنه لا يمكن إيجاد أشعة ذاتية مشتركة لهما، فلو كانا يتبادلان للزم أن تكون الأشعة الذاتية لأحدهما أشعة ذاتية للآخر حتما لأن القيم الذاتية لكل منهما غير منحلة. ونكون قد رأينا في هذا المثال كيف أن خصائص المقادير الفيزيائية لا تكون ثابتة حين تكون هذه الأخيرة ليست ثوابت حركة مع ضرورة وجود الجملة في حالة غير مستقرة، لأن وجود الجملة في حالة مستقرة سيجعل الخصائص الفيزيائية ثابتة حتى بالنسبة للمقادير التي ليست بثوابت حركة للجملة كما سنرى في الشطر الثاني من هذا التمرين. وعلى العكس من ذلك، فسنرى أن ثوابت الحركة تحتفظ بخصائصها مستقلة عن الزمن بغض النظر عن وجود الجملة في حالة مستقرة أو غير مستقرة، وذلك ما سنراه بالنسبة للهاملتوني بعد قليل.

ج- علاقة الارتياب طاقة – زمن

من خلال أي عبارة من عبارات الاحتمالات أو القيمة المتوسطة يمكن أن نجد أن زمن الاهتزاز بين قيمتين لهذه العبارات هو

$$\omega T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

والتي يمكن كتابتها بدلالة الفرق $\Delta E = E_2 - E_1$ كما يلي

$$T = \frac{2\pi\hbar}{E_2 - E_1} \Rightarrow T\Delta E = 2\pi\hbar > \frac{\hbar}{2}$$

ونرى أن علاقة الارتياب محققة. إن T هو زمن الاهتزاز بين حالتين كموميتين للجملة، فإذا انطلقت الجملة من الحالة $|\chi_1\rangle$ كما افترضنا في هذا التمرين، فإن T هو الزمن اللازم للانتقال إلى الحالة $|\chi_2\rangle$ ثم العودة إلى الحالة الابتدائية $|\chi_1\rangle$.

ح- احتمال الحصول على قيم الطاقة

من خلال نشر $|\psi(t)\rangle$ على الأشعة الذاتية للهاملتوني نجد أن

$$\begin{cases} \mathcal{P}(E_1) = \left|\langle\varphi_1|\psi(t)\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}\right|^2 = \frac{1}{2} \\ \mathcal{P}(E_2) = \left|\langle\varphi_1|\psi(t)\rangle\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}}\right|^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

نلاحظ أن احتمال الحصول على قيم الطاقة غير متعلقة بالزمن رغم أن حالة الجملة غير مستقرة، وذلك راجع على كون الهاملتوني ثابت حركة، فهو يحقق المعادلة (1-76).

°2. الحالة الابتدائية $|\psi(t_0 = 0)\rangle = |\varphi_1\rangle$

إذا كانت الحالة الابتدائية للجملة هي أحد الحالات الذاتية للهاملتوني المستقل عن الزمن، فإن حالة الجملة تبقى مستقرة مع مرور الزمن وكذلك جميع خصائصها كما سنرى الآن.

أ- عبارة شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$

حسب (1-57)، فإن شعاع الحالة الذي يصف تطور الجملة في أي لحظة زمنية $t > 0$ هو

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}|\varphi_1\rangle$$

والذي نرى أنه لا يختلف عن شعاع الحالة الابتدائي إلا بمعامل الطور الكلي الذي لا يؤثر على النتائج الفيزيائية، وبالتالي فإن حالة الجملة مستقرة.

نستطيع أيضا إعادة كتابة $|\psi(t)\rangle$ بدلالة الأشعة $|\chi_1\rangle$ و $|\chi_2\rangle$ بسهولة

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}}(|\chi_1\rangle + |\chi_2\rangle)$$

أين نلاحظ أن المعامل $\exp\left(-i\frac{E_1 t}{\hbar}\right)$ هو معامل طور كلي فهو لن يؤثر إذن على نتائج حساباتنا للاحتمالات والقيم المتوسطة، وبالتالي يمكن الاستغناء عنه وكتابة

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\chi_1\rangle + |\chi_2\rangle)$$

ب- احتمال الحصول على كل من a_1 **و** a_2

$$\begin{cases} \mathcal{P}(a_1) = |\langle\chi_1|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} \\ \mathcal{P}(a_2) = |\langle\chi_2|\psi(t)\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ت- القيمة المتوسطة $\langle A\rangle(t)$

يمكن حساب القيمة المتوسطة باستعمال (1-63) فنجد هنا

$$\langle A\rangle = a_1\mathcal{P}(a_1) + a_2\mathcal{P}(a_2) = \frac{a_1 + a_2}{2}$$

ث- ملاحظات وتعليقات حول نتائج الحالة المستقرة

نلاحظ في هذه الحالة، أن وجود الجملة في حالة مستقرة يجعل خصائصها أيضا مستقرة، فرغم أن الملحوظة A لا تمثل ثابت حركة، إلا أن احتمالات الحصول على قيمها الذاتية وكذا قيمتها المتوسطة تكون غير متعلقة بالزمن إذا كانت حالة الجملة مستقرة.

تماريـــــن

التمرين الأول – محلول -

نعتبر نظاما فيزيائيا ذو مستويين فضاء حالاته $\mathcal{E}$ منسوب إلى الأساس المتعامد والمقنّن $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. يُعطى هاملتوني هذا النظام H كما يلي:

$$H = \varepsilon_0\left(|1\rangle\langle 1| + \sqrt{2}|1\rangle\langle 2| + \sqrt{2}|2\rangle\langle 1|\right)$$

حيث ε_0 مقدار موجب له أبعاد الطاقة.

1. أكتب المصفوفة الممثلة للهاملتوني H في القاعدة المعطاة.

2. هل تمثل أشعة هذه القاعدة أشعة ذاتية للهاملتوني H؟ (أجب بدون حساب ومع التبرير)

3. أحسب القيم الذاتية والأشعة الذاتية $\{|\varphi_1\rangle, |\varphi_2\rangle\}$ المرفقة بها للهاملتوني H.

4. لو نقوم بقياس طاقة النظام، ماهي النتائج الممكنة؟ هل يمكن حساب احتمال العثور على هذه النتائج بهذه المعطيات؟ (مع التبرير)

5. في اللحظة $t_0 = 0$، تكون حالة الجملة موصوفة بشعاع الكات $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$. هل تمثل هذه الحالة الابتدائية حالة مستقرة؟ (مع التبرير).

6. احسب احتمالات العثور على قيم الطاقة الممكنة في هذه اللحظة.

7. اوجد عبارة شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ الذي يصف تطور حالة الجملة مع الزمن.

8. لو نقيس الطاقة من جديد في اللحظة $t > 0$ هل نتحصل على نفس النتائج السابقة ؟ (الإجابة بدون حساب ومع التبرير)

هل احتمالات العثور على نتائج الطاقة المذكورة في السؤال 8 هي نفسها الاحتمالات المحسوبة في السؤال 6 أم مختلفة عنها؟ لماذا؟

❖ الحـــل

1. المصفوفة الممثلة للهاملتوني H

لحساب عناصر المصفوفة نرى أن:

$$H|1\rangle = |1\rangle + \sqrt{2}|2\rangle \text{ و } H|2\rangle = \sqrt{2}|1\rangle$$

إذن:

$$H = \begin{pmatrix} \langle 1|H|1\rangle & \langle 1|H|2\rangle \\ \langle 2|H|1\rangle & \langle 2|H|2\rangle \end{pmatrix} \Rightarrow H = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

2. لا تمثل أشعة هذه القاعدة أشعة ذاتية للهاملتوني H، لأن المصفوفة الممثلة له غير قطرية.

3. حساب القيم الذاتية والأشعة الذاتية للهاملتوني H

لتكن $E_n = \varepsilon_0\lambda_n$ هي القيم الذاتية و $|\varphi_n\rangle$ هي الأشعة الذاتية المقنّنة المرفقة بها. يمكن إيجاد القيم الذاتية بحل المعادلة المميزة للهاملتوني:

$$\text{Dét}(H - E_n I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda_n & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\lambda_n \end{vmatrix} = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_n^2 - \lambda_n - 2 = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -1 \Rightarrow E_1 = -\varepsilon_0 \\ \lambda_2 = 2 \Rightarrow E_2 = 2\varepsilon_0 \end{cases}$$

وهي قيم بسيطة. بالنسبة للأشعة الذاتية $|\varphi_n\rangle = c_1|1\rangle + c_1|2\rangle$، فحسب معادلة القيم الذاتية نجد:

$$H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle \Rightarrow \varepsilon_0 \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + \sqrt{2}c_2 = \lambda_n c_1 \\ \sqrt{2}c_1 = \lambda_n c_2 \end{cases}$$

حيث c_1 و c_2 هي معاملات النشر على أشعة القاعدة المعطاة، والتي تحقق أيضا شرط التقنين: $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$. إذن:

$$\begin{cases} E_1 = -\varepsilon_0 \Rightarrow |\varphi_1\rangle = (1/\sqrt{3})\left(|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle\right) \\ E_2 = 2\varepsilon_0 \Rightarrow |\varphi_2\rangle = (1/\sqrt{3})\left(\sqrt{2}|1\rangle + |2\rangle\right) \end{cases}$$

4. لو نقوم بقياس طاقة النظام فإن النتائج الممكنة هي القيم الذاتية لهاملتوني النظام، أي القيم E_1 و E_2. ولا يمكن حساب احتمال العثور على هذه النتائج بهذه المعطيات لأننا لا نعرف شعاع الحالة في لحظة القياس.

5. لا يمثل بشعاع الكات الابتدائي $|\psi(0)\rangle = |1\rangle$ حالة مستقرة لأنه ليس شعاع ذاتي للهاملتوني كما نرى من السؤال 3.

6. حساب احتمالات العثور على قيم الطاقة الممكنة

$$\begin{cases} \mathcal{P}(E_1) = |\langle\varphi_1|\psi(0)\rangle|^2 = |\langle\varphi_1|1\rangle|^2 = 1/3 \\ \mathcal{P}(E_2) = |\langle\varphi_2|\psi(0)\rangle|^2 = |\langle\varphi_2|2\rangle|^2 = 2/3 \end{cases}$$

7. عبارة شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$

لايجاد $|\psi(t)\rangle$ يجب أن نكتب أولا شعاع الحالة الابتدائي كتركيب خطي للأشعة الذاتية للهاملتوني. لدينا:

$$\begin{cases} |\varphi_1\rangle = (1/\sqrt{3})(|1\rangle - \sqrt{2}|2\rangle) \\ |\varphi_2\rangle = (1/\sqrt{3})(\sqrt{2}|1\rangle + |2\rangle) \end{cases}$$
$$\Rightarrow |1\rangle = (1/\sqrt{3})(|\varphi_1\rangle + \sqrt{2}|\varphi_2\rangle)$$

إذن:

$$|\psi(t)\rangle = (1/\sqrt{3})\left(e^{i\frac{\varepsilon_0 t}{\hbar}}|\varphi_1\rangle + \sqrt{2}e^{-i\frac{2\varepsilon_0 t}{\hbar}}|\varphi_2\rangle\right)$$

8. لو نقيس الطاقة من جديد في اللحظة $t > 0$ نعم نتحصل على نفس النتائج السابقة لأن الهاملتوني غير متعلق بالزمن والقيم الذاتية ثابتة.

نعم احتمالات العثور على نتائج الطاقة المذكورة في السؤال 8 هي نفسها الاحتمالات المحسوبة في السؤال 6 لأن الهاملتوني هو ثابت حركة.

التمرين الثاني

نعتبر نظاما فيزيائيا فضاء حالاته $\mathcal{E}$ ذو ثلاثة أبعاد و منسوب إلى الأساس المتعامد والمقنّن $\{ |1\rangle, |2\rangle, |3\rangle \}$. يُعطى هاملتوني هذا النظام H وكذا الملحوظة A بواسطة المصفوفتين الممثلتين لهما في هذا الأساس كما يلي :

$$H = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث ω_0 و a أعداد حقيقية موجبة. في اللحظة الابتدائية $(t_0 = 0)$ تكون حالة الجملة موصوفة بشعاع الكات $|\psi(0)\rangle$ حيث :

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{2}\left[\sqrt{2}|1\rangle + |2\rangle + |3\rangle\right]$$

1. نقيس في اللحظة الابتدائية طاقة الجملة.
   - أ- ماهي النتائج الممكنة لهذا القياس.
   - ب- أحسب احتمال الحصول على كل نتيجة من هذه النتائج الممكنة.
2. بدلاً من قياس طاقة الجملة، نقوم بقياس الملحوظة A في اللحظة $t_0 = 0$.
   - أ- ماهي النتائج الممكنة لهذا القياس وما هي احتمالات الحصول على كل نتيجة.
   - ب- استنتج أن الكات $|\psi(0)\rangle$ هو شعاع ذاتي للملحوظة A مرفق بقيمة ذاتية يُطلب تعيينها.
   - ت- ما هو شعاع الحالة مباشرة بعد هذا القياس؟
3. اوجد عبارة شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ الذي يصف تطور حالة الجملة مع الزمن بعد اللحظة الابتدائية.
4. علما أن $[H, A] = 0$، مَن مِن بين مجموعات الملحوظات التالية تشكل "مجموعة تامة من الملحوظات المتبادِلة (E.C.O.C.)" ؟

$$\{H\}, \{A\}, \{H, A\}$$

التمرين الثالث

إن مستويات طاقة جسيم كتلته m محصور داخل بئر كموني لا متناهي العمق ذو بُعد واحد و عرضه a هي:

$$E_n = \varepsilon_0 n^2 \quad ; \; n = 1,2,\ldots$$

حيث $\varepsilon_0 = (\pi^2\hbar^2/2ma^2)$. نتحصل على هذه القيم E_n بحل معادلة القيم الذاتية لهاملتوني الجملة (أي معادلة شرودينغر المستقلة عن الزمن):

$$H|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle$$

حيث $\{|\varphi_n\rangle\}$ هي الأشعة الذاتية المتعامدة والمقننة للهاملتوني H. تُعطى عبارة الدوال الموجية $\varphi_n(x)$ المُرفقة بالأشعة $|\varphi_n\rangle$ في تمثيل الموضع $\{|x\rangle\}$ من أجل $(0 \le x \le a)$ بالعبارة التالية:

$$\varphi_n(x) = \langle x|\varphi_n\rangle = \sqrt{2/a}\,\sin(n\pi x/a)$$

إن فضاء الحالات $\mathcal{E}$ لهذه الجملة لا متناهي البعد و يمكن أن نأخذ كأساس له مجموعة الأشعة الذاتية $\{|\varphi_n\rangle\}$ للهاملتوني H. في اللحظة الابتدائية $t_0 = 0$، تكون حالة الجملة موصوفة بشعاع الكات المقنن $|\psi(0)\rangle$ حيث:

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}\left(\sqrt{6}|\varphi_1\rangle + \sqrt{3}|\varphi_3\rangle + |\varphi_5\rangle\right)$$

1. هل الكات $|\psi(0)\rangle$ تصف حالة مستقرة للجملة ؟ مع التبرير.
2. هل يُشكّل الهاملتوني H لوحده مجموعة تامة من الملحوظات المتبادلة E.C.O.C ؟ مع التبرير.
3. اكتب عبارة الدالة الموجية $\psi(x,0) = \langle x|\psi(0)\rangle$ بدلالة $\varphi_n(x)$.
4. نفترض أننا قمنا بقياس طاقة الجسيم في اللحظة الابتدائية،

أ– ما هو مثلا احتمال العثور على القيمة $E_2 = 4\varepsilon_0$؟

ب– ماهي إذن النتائج الممكنة لقياس طيف الطاقة؟ مع حساب احتمال الحصول على كل نتيجة من النتائج الممكنة.

ت– احسب القيمة المتوسطة للطاقة بدلالة ε_0.

ث– إذا كانت نتيجة قياس الطاقة هي $9\varepsilon_0$ ماهو شعاع الحالة المقنن الذي يصف الجملة بعد القياس مباشرة ؟

ج– هل تكون حالة الجملة بعد عملية قياس الطاقة مستقرة؟ لماذا؟

5. إذا لم نقم بقياس طاقة الجملة في اللحظة الابتدائية وتركناها تتطور عبر الزمن بصورة حرة انطلاقا من الشعاع $|\psi(0)\rangle$، فأوجد عبارة شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ الذي يصف حالة الجملة في أي لحظة لاحقة t.
6. ما هو احتمال الحصول على قيمة الطاقة ε_0 ؟ قارن هذه النتيجة مع نتيجة السؤال 4-ب، ماذا تلاحظ؟ قدّم تفسيرا.
7. هل تتغير خصائص الجملة مع مرور الزمن؟ لماذا؟
8. كيف نسمي الملحوظات A التي تصف المقادير الفيزيائية $\mathscr{A}$ التي لا تتغير خصائصها مع الزمن ؟ وما هي الشروط اللازمة حتى نسميها كذلك؟

التمرين الرابع

نعتبر نظاما فيزيائيا فضاء حالاته $\mathcal{E}$ ذو بعدين منسوب إلى الأساس المتعامد والمقنّن $\{|1\rangle, |2\rangle\}$. إن أي شعاع حالة كيفي $|\psi\rangle$ يمكن كتابته على شكل تركيب خطي لِأشعة القاعدة المعطاة :

$$|\psi\rangle = \alpha|1\rangle + \beta|2\rangle$$

حيث α وَ β هي معاملات النشر (أعداد مركبة). يُعطى هاملتوني هذا النظام H وكذا الملحوظة A بدلالة أشعة هذه القاعدة كما يلي:

$$\begin{cases} H = \hbar\omega_0(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|) \\ A = a(3|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|) \end{cases}$$

حيث ω_0 و a أعداد حقيقية موجبة.

9. أكتب المصفوفتان الممثلتان للمحوظتين H و A في القاعدة المعطاة.

10. استنتج (بدون حساب) القيم الذاتية والأشعة الذاتية المرفقة بها للملحوظة A.

11. في اللحظة $t_0 = 0$، تكون حالة الجملة موصوفة بشعاع الكات $|\psi(0)\rangle$. إذا كانت القيمة المتوسطة للمقدار A في هذه اللحظة الابتدائية هي:

$$\langle A\rangle(t_0=0)=\langle\psi(0)|A|\psi(0)\rangle=-a$$

فأوجد المعاملات α وَ β ثم اكتب عبارة $|\psi(0)\rangle$.

12. نقيس في اللحظة $(t_0=0)$ طاقة الجملة.

أ- ماهي النتائج الممكنة E_1 وَ E_2.

ب- أحسب احتمال الحصول على كل نتيجة من هذه النتائج الممكنة.

13. اوجد عبارة شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ الذي يصف تطور حالة الجملة مع الزمن.

14. هل يمثل شعاع الكات $|\psi(t)\rangle$ حالة مستقرة ؟ مع التبرير.

15. أوجد اللحظة الأولى t_1 التي من أجلها يُعطي قياس المقدار A القيمة الذاتية $3a$ بصورة مؤكدة (يقينية).