الفصل الثالث

جمع (تركيب) العزوم الحركية في ميكانيك الكم

الفصل الثالث Chapter three

جمع العزوم الحركية في ميكانيك الكم

Addition of angular momenta in Quantum Mechanics

1. مقدمة

إن تركيب العزوم الحركية معروف في الميكانيك الكلاسيكي، فلا شك أنه بالنسبة لجملة مكونة من مجموعة من الجسيمات المتفاعلة فيما بينها فإن العزم الحركي **الكلي** للجملة هو المحفوظ وليس العزم الحركي الجزئي، أي الخاص بكل جسيم. كذلك الأمر بالنسبة لميكانيك الكم، فالمقدار المحفوظ هو العزم الحركي الكلي للجملة المدروسة. ولهذا سنتعرض في هذا الفصل إلى كيفية تركيب (أو جمع) العزوم الحركية لما لهذه المسألة من أهمية كبيرة جدا في كثير من ميادين الفيزياء (ذرية، جزيئية، نووية، فيزياء الجسيمات تحت النووية، وغيرها).

في الحقيقة، حتى لو كانت الجملة المدروسة مكونة من جسيم واحد كالإلكترون مثلا، فإننا نحتاج إلى مفهوم تركيب العزوم الحركية، ذلك أن كل جسيم كمومي يملك نوعين من العزوم في الحالة العامة، وهما العزم الحركي المداري $\mathbf{L}$ والعزم الحركي السبيني $\mathbf{S}$. فلا يمكن مثلا فهم خواص ذرة الهيدروجين بصفة جيدة دون معرفة كيفية تركيب هذه العزوم، خاصة إذا أردنا دراسة البنية الدّقيقة أو فوق الدقيقة لأطياف الإمتصاص والإصدار للذرات، فهاملتوني الالكترون سيحتوي عندئذ على حد جديد يظهر لنا حين نقوم بالتصحيحات النسبوية اللازمة لمعادلة شرودينغر (relativistic corrections). إن هذا الحد هو عبارة عن التفاعل بين سبين الالكترون $\mathbf{S}$ و عزمه الحركي المداري $\mathbf{L}$ ويسمى هذا التفاعل (أو التزاوج) **تفاعل سبين – مدار** (spin-orbit coupling) حيث تكون شدته متناسبة مع جدائهما، أي $(\propto \mathbf{L}\cdot\mathbf{S})$. وفي هذه الحالة سنجد أن كُلا منهما ليس بثابت حركة لأنهما لا يتبادلان مع هاملتوني الجملة بسبب وجود حد التزاوج هذا، بل سيكون العزم الحركي الكلي الناتج من تركيبهما هو المقدار المحفوظ، أي أنه هو ثابت الحركة، وهو ما نحتاجه عندما نريد تأسيس مجموعة تامة من الملحوظات المتبادلة. وهذه هي المسألة المهمة في ميكانيك الكم، فالسبب لحاجتنا إلى عملية تركيب العزوم هو البحث عن تلك التي تعتبر ثوابت الحركة، فإن كان الهاملتوني لا يتبادل مع العزوم الحركية الجزئية (الخاصة بكل جسيم مكون للجملة) بسبب وجود تفاعل بين الجسيمات، أو تفاعل بين عزومها الحركية، سنكون أمام مسألة البحث عن العزم الحركي الكلي الذي سيتبادل مع هاملتوني الجملة وبالتالي سيكون ثابتا للحركة كما سنرى بعد قليل.

في كل الأحوال سنتعرض لكثير من تركيبات العزوم سواء كانت راجعة لجسيم واحد أو لمجموعة من الجسيمات، كأن يكون تركيبا للعزوم الحركية المدارية لوحدها أو السبينية لوحدها أو تركيب كلا النوعين لكل الجسيمات المتفاعلة. أي

$$\mathbf{J}=\sum_i \mathbf{L}_i \quad \text{أو} \quad \mathbf{J}=\sum_i \mathbf{S}_i \quad \text{أو} \quad \mathbf{J}=\sum_i (\mathbf{L}_i+\mathbf{S}_i)=\sum_i \mathbf{J}_i \tag{1-3}$$

ولذلك سنتعرض لهذه المسألة في شكلها العام وهو تركيب عزمين $\mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J}_2$ بحيث

$$\mathbf{J}=\mathbf{J}_1+\mathbf{J}_2 \tag{2-3}$$

وذلك بغض النظر عن طبيعتهما أو مصدرهما، ثم سنتعرض بعد ذلك لبعض التطبيقات المهمة التي نحتاجها في دراسة ذرة الهيدروجين بشكل خاص.
نود في هذا السياق أولا أن نعطي بعض الملاحظات والتعليقات على علاقة التركيب (2-3) التي تبدو بسيطة للوهلة الأولى، لكن في الواقع، يجب التنبه عند التعامل معها إلى حقيقة أننا نتعامل مع مؤثرات، ثم إن هذه المؤثرات قد تعمل في فضاءات حالات ذات أبعاد مختلفة، مما يستلزم تمثيل كل مؤثر منهما بمصفوفات مختلفة الأبعاد والتي لا يمكن جمعها عندئذ.

ملاحظات على علاقة تركيب العزمين $\mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J}_2$

1- لاحظ أننا كتبنا في المعادلة (2-3) مجموع عزمين فقط، رغم أن المسألة الفيزيائية يمكن أن تتطلّب تركيب عزوم كثيرة مختلفة. في واقع الأمر ستكفينا معرفة كيفية تركيب عزمين حركيين لنقوم بعد ذلك بتركيب العزوم الأخرى مثنى مثنى حتى نتحصل على العزم الحركي الكلي للجملة المدروسة.

2- نشير هنا إلى نقطة جد مهمة يجب الاحتفاظ بها في الذهن دائما، وهي أن فضاءات الحالات التي تعمل فيها كلا الملحوظتان $\mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J}_2$ هي فضاءات مختلفة، حتى لو كانت تعود لنفس الجسيم (أي المداري والسبيني) فإن كل نوع في هذه الحالة سيعمل في فضاء الحالات الخاص به. ولذلك سيكون كلا العزمين متبادلان بالضرورة.

$$[\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2] = 0 \tag{3-3}$$

مع التذكّر أن مركبات كل منهما تحقق علاقات التبادل المميزة للعزوم الحركية التي درسناها في الفصل الثاني (انظر). كما يمكن التأكد باستعمال هذه العلاقات أن الشعاع $\mathbf{J}$ يحقق كل علاقات التبادل المميزة للعزم الحركي في ميكانيك الكم.

3- الكتابة الحقيقية لعملية جمع العزوم تكون بجمع امتداد عمل كل منهما في فضاء الآخر.

2. أهمية تركيب العزوم الحركية في ميكانيك الكم

بالعودة إلى مسألة وجود تفاعل بين عزوم الجسيمات المكونة لجملة ما، أو مسألة وجود تفاعل بين كِلا نوعيْ العزوم بالنسبة لجسيم واحد، فسنوضح أهمية تركيب العزوم الحركية في مثل هذه المسائل. لتكن لدينا جملة كلية مكونة من جسيمين نشير إليهما بالرقمين 1 و 2. سنضيف الرقم 1 لكل ما يخص الجسيم 1، سواء كان مقدارا فيزيائيا أو رياضيا، وكذلك الأمر مع الجسيم 2. وحتى تتضح الصورة أكثر سنعالج حالتين لهذه الجملة الكلية، في إحداهما يكون فيها الجسيمان غير متفاعلين فيما بينهما، بينما في الحالة الثانية نفترض وجود تفاعل بينهما (أو بين عزميهما).

1.2 حالة الجسيمات المستقلة (غير المتفاعلة)

لنأخذ في البداية حالة الجملة المكونة من جسيمين غير متفاعلين (وبالمثل لو كانت الجملة مكونة من جسيم واحد لكن لا يُأخذ في الاعتبار تفاعلُ عزميه المداري والسبيني، كما يُفعل مثلا في الدراسة الأولية لذرة الهيدروجين قبل القيام بالتصحيحات النسبوية). ففي هذه الحالة نعلم أن العزمين الحركيين الخاصين بالجسيمين سيكونان محفوظين لأن

$$[\mathbf{J}_1, H_{01}] = [\mathbf{J}_2, H_{02}] = 0 \Rightarrow [\mathbf{J}_{1,2}, H_0] = 0 \tag{4-3}$$

حيث H_0 هو الهاملتوني الكلي للجملة غير المتفاعلة والذي هو مجموع هاملتونيْ كلّ من الجسيمين المستقلّين H_{01} و H_{02}. نعلم مما درسنا عن العزوم الحركية أنه لدراسة خصائص هذه الأخيرة فإننا نأخذ المجموعة المكونة من الملحوظتين $\{\mathbf{J}_1^2, J_{1z}\}$ التابعتين للجسيم 1 والتي نرمز لمجموعة أشعتها الذاتية المشتركة بالرمز $\{|j_1, m_1\rangle\}$. نفس الأمر بالنسبة للجسيم 2، أي $\{\mathbf{J}_2^2, J_{2z}\}$ و $\{|j_2, m_2\rangle\}$. وفي الحقيقة إن كانت لدينا مجموعة تامة من الملحوظات المتبادلة (م.ت.م.م) فإننا نستعمل أشعة القاعدة المعيارية $\{|k_i, j_i, m_i\rangle; i = 1,2\}$ الخاصة بكل فضاء من فضائيْ الحالات الجزئيين $\mathcal{E}_{(1,2)}$. بالنسبة للجملة الكلية، سيكون فضاء الحالات الكلي $\mathcal{E}$ هو الجداء التنسوري لكل من $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$، ونكتب

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2 \tag{5-3}$$

إن أي شعاع حالة $|\psi\rangle$ ينتمي لهذا الفضاء الكلي $\mathcal{E}$ سيكون من الشكل

$$\{|\varphi\rangle \in \mathcal{E}_1 \text{ and } |\chi\rangle \in \mathcal{E}_2\} \Longrightarrow |\psi\rangle = |\varphi\rangle \otimes |\chi\rangle \tag{6-3}$$

وبالتالي يمكن أن نختار له كأشعة قاعدة تلك المجموعة المكونة من أشعة القاعدتين الخاصتين بفضائي الحالات الجزئيين. أي مجموعة الأشعة $\{|k_1, k_2, j_1, j_2, m_1, m_2\rangle\}$ حيث

$$|k_1, k_2, j_1, j_2, m_1, m_2\rangle = |k_1, j_1, m_1\rangle \otimes |k_2, j_2, m_2\rangle \tag{7-3}$$

بإنشائنا لهذه القاعدة لفضاء الحالات الكلي، فسيمكننا في هذه الحالة البحث عن أشعة الحالة المستقرة للجملة، أي الأشعة الذاتية للهاملتوني الكلي غير المتفاعل H_0، من بين أشعة هذه القاعدة المشتركة لمجموعة الملحوظات $\{\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$ لأن الهاملتوني H_0 يتبادل مع جميع هذه الملحوظات كما رأينا في العلاقات (3-4). نلاحظ أننا لم نحتج هنا إلى مفهوم العزم الحركي الكلي وذلك لأن كل جملة من الجملتين الجزئيتين تعتبر مستقلة عن

الأخرى وأن الجملة الكلية ماهي إلا ضم لهما دون تفاعل بينهما، وأن القاعدة المعيارية ذات الأشعة (3-7) كافية لدراسة الحالات المستقرة وكذا تطور الجملة.

2.2 حالة الجسيمات المتفاعلة

قصد توضيح المسألة بشكل جيد، سنعتبر في هذه الحالة الجمل التي يكون هاملتونيها الكلي الذي يحكم تطورها مُحتويا على حد التفاعل بين العزوم الحركية للجسيمين، أو محتويا لحد التفاعل سبين – مدار إن كانت المسألة تخص دراسة جسيم واحد فقط. في الحقيقة، إن ما سيأتي يشمل كل التفاعلات بين الجسيمات التي لا تكون فيها العزوم الحركية الجزئية لمكونات الجملة غير محفوظة، كأن يكون التفاعل بينها ناشئا عن كمون متعلق بالبعد بين جسيمين $\mathrm{V}(r=|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|)$ مثلا. وعلى كل حال سنعتبر هنا الهاملتوني الكلي للجملة بحيث يكون من الشكل العام التالي (والذي نصادفه كثيرا في المسائل الحقيقية)

$$H=H_0+\alpha\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{J}_2 \tag{8-3}$$

حيث α هو ثابت التزاوج ، فإنه وإن كان كلا العزمين $\mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J}_2$ يتبادلان مع الهاملتوني[8] H_0، فإنهما لا يتبادلان مع الهاملتوني الكلي H بسبب وجود الحد $(\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{J}_2)$ في عبارة هذا الأخير، وبالتالي لن يكونا محفوظين لأن $[\mathbf{J}_{1,2},H]\neq 0$. يمكن التحقق من هذا بسهولة. بما أن

$$\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{J}_2=J_{1x}J_{2x}+J_{1y}J_{2y}+J_{1z}J_{2z} \tag{9-3}$$

فباستعمال علاقات التبادل بين المركبات المختلفة للعزوم الحركية، يمكن أن نبرهن مثلا أن مركبتا كل من $\mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J}_2$ وفق المحور (Oz) لا تتبادلان مع الهاملتوني الكلي. في الحقيقة، لدينا

$$[J_{1z},H]=\alpha[J_{1z},\mathbf{J}_1\cdot\mathbf{J}_2]=\alpha[J_{1z},J_{1x}J_{2x}+J_{1y}J_{2y}]=\alpha\underbrace{[J_{1z},J_{1x}]}_{=i\hbar J_{1y}}J_{2x}+\alpha\underbrace{[J_{1z},J_{1y}]}_{=-i\hbar J_{1x}}J_{2y}$$

أي أن النتيجة هي

$$[J_{1z},H]=i\hbar\alpha\left(J_{1y}J_{2x}-J_{1x}J_{2y}\right) \tag{10-3}$$

بنفس الطريقة نبرهن أن

$$[J_{2z},H]=i\hbar\alpha\left(J_{1x}J_{2y}-J_{1y}J_{2x}\right) \tag{11-3}$$

وكذلك الأمر بالنسبة لباقي المركبات. فمن الواضح إذن أن العزمين $\mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J}_2$ لا يتبادلان مع الهاملتوني الكلي H، لكننا في المقابل نجد أن كل مركبات العزم الحركي الكلي $\mathbf{J}$ المعرف بالعلاقة (3-2) تتبادل مع هذا الهاملتوني، ولنأخذ مثلا المركبة J_z لنرى أنه حسب (3-10) و (3-11) لدينا

$$[J_z,H]=[(J_{1z}+J_{2z}),H]=[J_{1z},H]+[J_{2z},H]=0 \tag{12-3}$$

نفس الأمر بالنسبة للمركبتين J_x و J_y. وهنا تبرز أهمية العزم الحركي الكلي الذي نكتب من اجله علاقة التبادل التالية

$$[\mathbf{J},H]=[\mathbf{J}_1,H]+[\mathbf{J}_2,H]=0 \tag{13-3}$$

إن معنى العلاقة (3-13) مهم جدا، فهي تثبت من جهة أن العزم الحركي الكلي محفوظ. ومن جهة أخرى فقد ذكرنا أعلاه أنه لدراسة خصائص عزم حركي ما نختار الثنائية $\{\mathbf{J}^2,J_z\}$، ولذلك سيمكننا حسب (3-13) البحث عن الحالات المستقرة للجملة، أي الأشعة الذاتية للهاملتوني، بحيث تكون أشعة ذاتية مشتركة لمجموعة الملحوظات المتبادِلة $\{H,\mathbf{J}^2,J_z\}$. في الحقيقة سنضيف لهذه المجموعة الملحوظتين $\mathbf{J}_1^2$ و $\mathbf{J}_2^2$ لأننا سنبرهن أنهما يتبادلان مع الهاملتون الكلي أيضا، فنختار إذن المجموعة $\{H,\mathbf{J}_1^2,\mathbf{J}_2^2,\mathbf{J}^2,J_z\}$.

إن إثبات تبادل هذه الملحوظات يمكن التأكد منه بسهولة من خلال العلاقات السابقة مثل العلاقة (3-12). فأما بالنسبة للثنائية $\{H,\mathbf{J}^2\}$ فنبدأ ببعض العلاقات المفيدة قبل إثباتها. لدينا حسب (3-2) و (3-3)

---

[8] إن كانت الجملة عبارة عن جسيمين مثلا، فإن الهاملتوني H_0 ما هو إلا مجموع هاملتونيَهما في غياب التفاعل بينهما، بينما يمثل الحد الباقي في الهاملتوني الكلي H ذلك التفاعل. فيكون

$$H_0=H_{01}+H_{02}$$

$$\mathbf{J}^2 = \mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2 + 2\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 \tag{14-3}$$

والتي نستنتج منها العبارة التالية المهمة، كثيرة الاستعمالات في التطبيقات كما سنرى فيما بعد

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{J}_1^2 - \mathbf{J}_2^2) \tag{15-3}$$

والتي يمكن كتابتها أيضا على الشكل التالي باستخدام (9-3)

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 = J_{1z}J_{2z} + \frac{1}{2}(J_{1+}J_{2-} + J_{1-}J_{2-}) \tag{16-3}$$

حيث أن المؤثرات $J_{1\pm}$ و $J_{2\pm}$ هي مؤثرات الرفع والخفض الخاصة بكل من العزمين $\mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J}_2$ على الترتيب. يمكن التأكد من صحة العبارة (16-3) من خلال تعريف كل من مؤثري الرفع والخفض في الفصل الثاني. فلو تذكرنا أن $\mathbf{J}_1^2$ (وكذلك $\mathbf{J}_2^2$) يتبادل مع مركبته J_{1z} (مع J_{2z} على الترتيب) و يتبادل أيضا مع المؤثرين $J_{1\pm}$ (مع $J_{2\pm}$) الخاصين به كما توضحه العلاقات () في الفصل السابق، فإن العبارة (16-3) تتيح لنا التأكد مما يلي

$$[\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_1^2] = [\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_2^2] = 0 \tag{17-3}$$

والتي بدورها تثبت أنه حسب العبارة (14-3) يكون

$$[\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_1^2] = [\mathbf{J}^2, \mathbf{J}_2^2] = 0 \tag{18-3}$$

رغم أن $\mathbf{J}^2$ يتبادل مع $\mathbf{J}_1^2$ و $\mathbf{J}_2^2$ فإنه لا يتبادل مع أي من مركبات $\mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J}_2$. فيمكننا مثلا أن نثبت باستعمال (14-3) و (9-3) أن

$$[\mathbf{J}^2, J_{1z}] \neq 0 \text{ و } [\mathbf{J}^2, J_{2z}] \neq 0 \tag{19-3}$$

وهذه ملاحظة مهمة يجب الاحتفاظ بها في الذهن دائما. فهي تترجم أنه لا يمكن العثور على مجموعة أشعة ذاتية مشتركة لكل من الملحوظات $\mathbf{J}^2$ و J_{1z} و J_{2z} والتي ستكون سببا في التخلي عن هاتين الأخيرتين عند البحث عن أشعة قاعدة جديدة للجملة. من جهة أخرى، نرى بسهولة أن الملحوظة $J_z = J_{1z} + J_{2z}$ تتبادل مع كل من J_{1z} و J_{2z} وأيضا مع $\mathbf{J}_1^2$ و $\mathbf{J}_2^2$، أي

$$[J_z, J_{1z}] = [J_z, J_{2z}] = [J_z, \mathbf{J}_1^2] = [J_z, \mathbf{J}_2^2] = 0 \tag{20-3}$$

بعد إثبات هاته العلاقات أعلاه سيكون من السهل إثبات تبادل $\mathbf{J}^2$ مع الهاملتوني H بكل سهولة. كما أنه سيكون من الجيد إعادة كتابة الهاملتوني (8-3) على الشكل المفيد التالي

$$H = H_0 + \frac{\alpha}{2}(\mathbf{J}^2 - \mathbf{J}_1^2 - \mathbf{J}_2^2) \tag{21-3}$$

إذن سيكون لدينا

$$[H, \mathbf{J}^2] = [H, \mathbf{J}_1^2] = [H, \mathbf{J}_2^2] = [J_z, H] = 0 \tag{22-3}$$

فلدينا الان مجموعة من الملحوظات المتبادلة $\{\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, \mathbf{J}^2, J_z\}$ والتي يجب أن نبحث لها عن أساس مكون من الأشعة الذاتية المشتركة بينها، والتي سنبحث ضمنها عن أشعة الحالات المستقرة للجملة المدروسة، لأن الأساس القديم المكون من الأشعة (7-3) سيجعل مهمة البحث عن الحلول المستقرة ضمنه عملية صعبة بسبب عدم تبادل الهاملتوني الكلي مع العزوم الحركية الجزئية للجملة. وهذه هي أهم نقطة تجعلنا نبحث عن الأساس الجديد لمجموعة الملحوظات التي يجب أن تحتوي على العزم الحركي الكلي (عبر مربعه $\mathbf{J}^2$ وأحد مساقطه مثل J_z).

بعد معرفة أهمية تركيب العزوم الحركية في ميكانيك الكم، نخلُص في النهاية إلى أن عملية التركيب هذه تدور حول النقاط الثلاث المهمة التالية

1- ماهي القيم الممكنة للقيمة الذاتية للملحوظة $\mathbf{J}^2$؟
2- ماهي القيم الممكنة للقيمة الذاتية للملحوظة J_z؟
3- كيف نكتب الأشعة الذاتية المشتركة المكونة للأساس الجديد الخاص بالمجموعة $\{\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, \mathbf{J}^2, J_z\}$ بدلالة الأشعة الذاتية المشتركة المكونة للأساس القديم الخاص بالمجموعة $\{\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, J_{1z}, J_{2z}\}$؟

سنحاول فيما يأتي الإجابة عن هذه الأسئلة جميعها.

3. تركيب عزمين $\mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J}_2$ – المجموعة $\{\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}^2, J_z\}$

1.3 اصطلاحات

سنقوم في البداية بالاتفاق على بعض الترميزات التي نحتاجها في باقي الدرس. نسمي العزمين الحركيين $\mathbf{J}_1$ و $\mathbf{J}_2$ بالعزمين الجزئيين للمسألة التي نعتبرها كما سبق جملة مكونة من جسيمين. وسنرمز بأشعة المجموعتين $\{|j_1, m_1\rangle\}$ و $\{|j_2, m_2\rangle\}$ إلى الأشعة الذاتية المشتركة لكل من الثنائيتين $\{\mathbf{J}_1^2, J_{1z}\}$ و $\{\mathbf{J}_2^2, J_{2z}\}$ على الترتيب. وبالتالي ستكون معادلات القيم الذاتية هي

$$\begin{cases} \mathbf{J}_i^2 |j_i, m_i\rangle = j_i(j_i+1)\hbar^2 |j_i, m_i\rangle \\ J_{iz}\, |j_i, m_i\rangle = m_i \hbar |j_i, m_i\rangle \end{cases} ; i = 1,2 \tag{23-3}$$

حيث تحقق كل من m_1 و m_2 الشرط التالي

$$-j_i \leq m_i \leq j_i \tag{24-3}$$

1.1.3 أشعة القاعدة القديمة $\{|m_1, m_2\rangle\}$

إن المجموعتين $\{|j_1, m_1\rangle\}$ و $\{|j_2, m_2\rangle\}$ تشكلان أساسين لفضائي الحالات $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$. في الحقيقة، عند دراستنا لجملة فيزيائية يمكن أن تكون القيم القابلة للتحقق للعددين j_1 و j_2 لا نهائية، ومن أجل كل قيمة j_1 (وكذلك j_2) سنكوّن فضاءً جزئيا $\mathcal{E}_1(j_1)$ ($\mathcal{E}_2(j_2)$) بُعده هو $(g_{j_i} = 2j_i + 1; i = 1,2)$، وسيكون الفضاء الجزئي الكلي $\mathcal{E}_{1,2}$ الخاص بكل جزء من الجملة الكلية هو المجموع المباشر لكل الفضاءات الجزئية $\mathcal{E}_i(j_i)$. أما فضاء الحالات الكلي الخاص بالجملة الكلية فسيكون الجداء التنسوري للفضائين $\mathcal{E}_1$ و $\mathcal{E}_2$. ولكن بقصد تبسيط الدراسة سنختار أن نأخذ قيمتي كل من j_1 و j_2 ثابتتين في كل ما سيأتي، وهذا لا يؤثر على تعميم النتائج التي سنثبتها هنا. في هذه الحالة سنجد أنفسنا نتعامل مع فضاء حالات جزئي واحد لكل جسيم ويكون فضاء الحالات الكلي كما فعلنا في (5-3) لكن نكتب

$$\mathcal{E}(j_1, j_2) = \mathcal{E}_1(j_1) \otimes \mathcal{E}_2(j_2) \tag{25-3}$$

وسيكون بُعد هذا الفضاء هو

$$g(j_1, j_2) = (2j_1 + 1)(2j_2 + 1) \tag{26-3}$$

وبالتالي يمكن أن نختار كأساس له مجموعة الأشعة $\{|j_1, m_1; j_2, m_2\rangle \equiv |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \equiv |m_1, m_2\rangle\}$ حيث

$$|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle \equiv |m_1, m_2\rangle = |j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle \tag{27-3}$$

حيث تعمدنا إخفاء الدليلين j_1 و j_2 في الشعاع $|m_1, m_2\rangle$ لتخفيف الكتابة. وتسمى هذه القاعدة بالقديمة لأننا سنتخلى عنها عند ادخالنا لمقدار العزم الحركي الكلي، وهي تحقق طبعا معادلات القيم الذاتية التالية

$$\begin{cases} \mathbf{J}_i^2 |m_1, m_2\rangle = j_i(j_i+1)\hbar^2 |m_1, m_2\rangle \\ J_{iz}\, |m_1, m_2\rangle = m_i \hbar |m_1, m_2\rangle \end{cases} ; i = 1,2 \tag{28-3}$$

حيث أن كل ملحوظة من الملحوظات المذكورة في (28-3) والتي تعمل على أشعة الفضاء الحالات الكلي $\mathcal{E}(j_1, j_2)$ هي امتدادات للملحوظات الموافقة لها التي تعمل في الفضاءات الجزئية $\mathcal{E}_1(j_1)$ و $\mathcal{E}_2(j_2)$ والتي تحقق (23-3).

2.1.3 أشعة القاعدة الجديدة $\{|J, M\rangle\}$

لقد رأينا فيما سبق أننا نحتاج إلى قاعدة جديدة مناسبة لدراسة الحالات المستقرة، وأن القاعدة (27-3) ليست ملائمة لهذا الغرض، بل المطلوب هو البحث عن أشعة قاعدة مكونة من الأشعة الذاتية المشتركة لمجموعة الملحوظات المتبادلة $\{\mathbf{J}_1^2, \mathbf{J}_2^2, \mathbf{J}^2, J_z\}$. سنشير لأشعة القاعدة الجديدة هذه بالكتابة التالية

$$|j_1, j_2; J, M\rangle \equiv |J, M\rangle \tag{29-3}$$

والتي تعمدنا فيها إخفاء الدليلين j_1 و j_2 أيضا لأننا اعتبرناهما ثابتين طوال الدراسة. لا شك أن عدد هذه الأشعة هو نفس عدد أشعة القاعدة القديمة، أي أن عددها هو $g(j_1, j_2)$ المعطى بالعلاقة (3-26). كما أنه يمكن نشر أي منها على أشعة القاعدة القديمة $|m_1, m_2\rangle$ كما يلي

$$|J, M\rangle = \sum_{m_1=-j_1}^{+j_1} \sum_{m_2=-j_2}^{+j_2} c_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} |m_1, m_2\rangle \tag{30-3}$$

حيث أن الأعداد $c_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM}$ هي معاملات النشر على القاعدة القديمة وتساوي

$$c_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM} = \langle m_1, m_2 | J, M\rangle \equiv \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | j_1, j_2, J, M\rangle \tag{31-3}$$

وهي التي نسميها معاملات كلابش – غوردن التي سنتكلم عنها في فقرة خاصة بها فيما سيأتي.

إن هذه الأشعة الجديدة $|J, M\rangle$ تحقق معادلات القيم الذاتية التالية

$$\begin{cases} \mathbf{J}^2 |J, M\rangle = J(J+1)\hbar^2 |J, M\rangle \\ J_z\, |J, M\rangle = M\hbar |J, M\rangle \\ \mathbf{J}_i^2 |J, M\rangle = j_i(j_i+1)\hbar^2 |J, M\rangle\, ; (i = 1,2) \end{cases} \tag{32-3}$$

مع التذكير أن M و J يحققان العلاقتين التاليتين، لأن $\mathbf{J}$ عزم حركي (انظر)

$$\begin{cases} -J \le M \le J \\ \quad 0 \le J \end{cases} \tag{33-3}$$

فالعدد M يأخذ إذن $(2J+1)$ قيمة من أجل كل قيمة ممكنة للعدد J. فالقاعدة الجديدة هي إذن مجموعة الأشعة $\{|J, M\rangle\}$ كلها. ويقابل كل قيمة من القيم J فضاء حالات جزئي $\mathcal{E}(J)$ بُعده هو $(2J+1)$ بحيث أن الفضاء الكلي هو المجموع المباشر لهذه الفضاءات. ونكتب

$$\mathcal{E}(j_1, j_2) = \mathcal{E}_1(j_1) \otimes \mathcal{E}_2(j_2) = \sum_{\oplus} \mathcal{E}(J) \tag{34-3}$$

3.1.3 استخراج الأشعة $|J, M\rangle$ التابعة لفضاء جزئي $\mathcal{E}(J)$ مؤثرات الرفع والخفض $J_\pm$ و $J_{(1,2)\pm}$

من خلال علاقة تركيب العزوم (3-2) نستطيع أن نكتب العلاقة بين مؤثرات الرفع والخفض الخاصة بالجملة الكلية و أجزائها كما يلي

$$J_\pm = J_{1\pm} + J_{2\pm} \tag{35-3}$$

فللحصول على أشعة القاعدة القديمة $\{|m_1, m_2\rangle\}$ انطلاقا من أحدها، نطبق مؤثرات الرفع والخفض $J_{(1,2)\pm}$ التي تعمل في الفضاء الكلي $\mathcal{E}(j_1, j_2)$ بحيث

$$\begin{cases} J_{1\pm} |m_1, m_2\rangle = \hbar\sqrt{j_1(j_1+1) - m_1(m_1 \pm 1)}\, |m_1 \pm 1, m_2\rangle \\ J_{2\pm} |m_1, m_2\rangle = \hbar\sqrt{j_2(j_2+1) - m_2(m_2 \pm 1)}\, |m_1, m_2 \pm 1\rangle \end{cases} \tag{36-3}$$

كما أن الحصول على الأشعة $|J, M\rangle$ المنتمية لنفس الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(J)$ انطلاقا من أحدها يكون بتطبيق مؤثري الرفع والخفض $J_\pm$ حيث

$$J_\pm |J, M\rangle = \hbar\sqrt{J(J+1) - M(M \pm 1)}\, |J, M \pm 1\rangle \tag{37-3}$$

وفي الحقيقة، لاستخراج جميع أشعة أحد الفضاءات الجزئية $\mathcal{E}(J)$ ننطلق عموما من الشعاع $|J, J\rangle$ ثم نطبق عليه مؤثر الخفض J_- حتى نتحصل على بقية الأشعة في هذا الفضاء. ثم ننتقل إلى الفضاء الاخر حتى نستنفذها جميعا بنفس الطريقة. (والطريقة نفسها لو ننطلق من الشعاع $|J, -J\rangle$ ولكن نطبق مؤثر الرفع J_+ هذه المرة). كما يُتفق بالنسبة لمعاملات النشر (3-30) (معاملات كلابش – غوردن) $c_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{JM}$ أن تحدد بحيث يكون المعامل $c_{j_1, j_1, j_2, J-j_1}^{JJ}$ الموافق لمركبة الشعاع $|J, J\rangle$ وفق الشعاع $|j_1, J - j_1\rangle$ موجبا وحقيقيا. سنوضح هذا الاتفاق أكثر عند الحديث عن خصائص معملات كلابش – غوردن وكذلك في الأمثلة بعدها.

بعد الاتفاق على هذه الاصطلاحات والترميزات، سنبحث عن الإجابة عن الأسئلة المطروحة سابقا.

2.3 القيم الممكنة لكل من J و M

1.2.3 القيم الممكنة للعدد M

إن العدد المغناطيسي M يميز القيم الذاتية الخاصة بالملحوظة J_z التي أثبتنا أنها تتبادل مع كل من J_{1z} و J_{2z} كما في العلاقة (3-20)، فباستعمال (3-28) نجد أن

$$J_z|m_1,m_2\rangle = \underbrace{J_{1z}|m_1,m_2\rangle}_{m_1\hbar|m_1,m_2\rangle} + \underbrace{J_{2z}|m_1,m_2\rangle}_{m_2\hbar|m_1,m_2\rangle} = (m_1+m_2)\hbar|m_1,m_2\rangle \tag{38-3}$$

فكل الأشعة $|m_1,m_2\rangle$ المنتمية للقاعدة القديمة هي إذن أشعة ذاتية للملحوظة J_z مرفقة بالقيم $(m_1+m_2)\hbar$.

لكننا نعلم من جهة أخرى أن الشعاع $|J,M\rangle$ هو أيضا شعاع ذاتي للملحوظة J_z مرفق بالقيمة $M\hbar$. وبما أن القيم الذاتية لملحوظة ما لا تتعلق بالقاعدة المختارة للدراسة[9] فإنه يكون بالضرورة

$$\boxed{M = m_1 + m_2} \tag{39-3}$$

كما يمكن أن نلاحظ أن أكبر و أصغر قيمة يأخذها هذا العدد M هي تلك التي توافق القيمتين $m_{(1,2)max,min} = \pm j_{1,2}$. وهما قيمتان غير منحلتين، أي يرافقهما شعاع حالة وحيد لكل منهما بحيث

$$\begin{cases} M_{max} = j_1 + j_2 & \longrightarrow \quad |j_1,j_2\rangle \\ M_{min} = -(j_1+j_2) & \longrightarrow \quad |-j_1,-j_2\rangle \end{cases} \tag{40-3}$$

وبما أننا نعلم أن العدد M ينتقل بخطوة صحيحة بين قيمتين متتاليتين من قيمه الممكنة، فإن هذه القيم ستكون من الشكل

$$\overbrace{-(j_1+j_2)}^{M_{min}};\ -(j_1+j_2)+1;\ldots;\ j_1+j_2-1;\overbrace{j_1+j_2}^{M_{max}} \tag{41-3}$$

2.2.3 القيم الممكنة للعدد J

من الواضح من خلال (3-33) و (3-40) أن أعظم قيمة يأخذها العدد J هي

$$J_{min} \le J \le J_{max} = j_1 + j_2 \tag{42-3}$$

حيث ستكون القيم الممكنة الأخرى للعدد J محصورة بين J_{min} و J_{max} وتختلف فيما بينها بخطوة واحدة صحيحة. أي

$$\underbrace{J_{min}, J_{min}+1, J_{min}+2, \ldots, J_{max}-2, J_{max}-1, J_{max}}_{(J_{max}-J_{min}+1)\ \text{حد}} = j_1 + j_2 \tag{43-3}$$

تقتصر مهمتنا إذن على البحث عن القيمة الدنيا J_{min}. في الحقيقة، هناك الكثير من الطرق لتحديدها، سنعتمد هنا أسهلها للتوضيح.

لقد ذكرنا من جهة بأن عدد أشعة القاعدة الجديدة $\{|J,M\rangle\}$ هو $g(j_1,j_2)$، لكن من جهة أخرى، يمكن حسابها إذا علمنا أنه مقابل كل قيمة ممكنة للعدد J لدينا $(2J+1)$ شعاع $|J,M\rangle$، وبالتالي[10]

$$\sum_{J=J_{min}}^{J=J_{max}} (2J+1) = g(j_1,j_2) = (2j_1+1)(2j_2+1) \tag{44-3}$$

إن المجموع في الطرف الأيسر من المعادلة (3-44) ما هو إلا مجموع متتالية حسابية حدها الأول $(2J_{min}+1)$ و أساسها 2 كما أن عدد حدودها هو $(J_{max}-J_{min}+1)$ وبالتالي يكون[11]

---

[9] لأنها هي القيم الفيزيائية الحقيقية التي نقيسها تجريبيا ولا علاقة لها بالتمثيلات المعتبرة في الدراسة.

[10] في الحقيقة، حتى نكون أكثر دقة و تكون هذه العلاقة صحيحة، يجب أن لا تكون القيم الممكنة للعدد J منحلة. أي مقابل كل قيمة لها يجب أن يوجد فضاء جزئي واحد فقط $\mathcal{E}(J)$، وهذه مبرهنة لا حاجة لأن نتعرض لها هنا.

[11] مجموع متتالية حسابية حدها الأول u_1 وحدها الأخير u_n هو

$$\sum_{J=J_{min}}^{J=J_{max}}(2J+1)=\underbrace{(2J_{min}+1)+(2J_{min}+3)+\cdots+(2J_{max}+1)}_{\text{حد }(J_{max}-J_{min}+1)}$$
$$=(J_{max}-J_{min}+1)[(2J_{min}+1)+(2J_{max}+1)]/2$$
$$=[(J_{max}+1)-J_{min}][(J_{max}+1)+J_{min}]$$

إذن

$$\sum_{J=J_{min}}^{J=J_{max}}(2J+1)=(J_{max}+1)^2-J_{min}^2=(j_1+j_2+1)^2-J_{min}^2 \quad (45\text{-}3)$$

بمقارنة (3-44) و (3-45) نجد أن

$$J_{min}^2=(j_1-j_2)^2 \Longrightarrow J_{min}=|j_1-j_2| \quad (46\text{-}3)$$

وبالتالي فإن القيم الممكنة للعدد J المميز للقيم الذاتية للملحوظة $\mathbf{J}^2$ محصور بين J_{min} و J_{max} حيث

$$\boxed{|j_1-j_2|\leq J\leq j_1+j_2} \quad (47\text{-}3)$$

بعد تحديد قيم كل من J و M يبقى أن نبحث عن أشعة القاعدة الجديدة $\{|J,M\rangle\}$.

3.3 أشعة القاعدة الجديدة $\{|J,M\rangle\}$ بدلالة القديمة $\{|m_1,m_2\rangle\}$ – معاملات كلابش - غوردن

1.3.3 معاملات كلابش – غوردن

سنبحث هنا عن التعبير عن الأشعة $|J,M\rangle$ بواسطة أشعة القاعدة القديمة $\{|m_1,m_2\rangle\}$ التي تحقق علاقتي الانغلاق والتعامد والتقنين في الفضاء $\mathcal{E}(j_1,j_2)$ التالية

$$\begin{cases}\langle m_1',m_2'|m_1,m_2\rangle=\delta_{m_1m_1'}\delta_{m_2m_2'}\\ \displaystyle\sum_{m_1=-j_1}^{+j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{+j_2}|m_1,m_2\rangle\langle m_1,m_2|=\mathrm{I}\end{cases} \quad (48\text{-}3)$$

فيمكن إذن نشر أي شعاع ينتمي إلى $\mathcal{E}(j_1,j_2)$ على شكل تركيب خطي لها، أي نكتب بشكل خاص من أجل $|J,M\rangle$ كما فعلنا في (3-30) ما يلي

$$|J,M\rangle=\sum_{m_1=-j_1}^{+j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{+j_2}|m_1,m_2\rangle\overbrace{\langle m_1,m_2|J,M\rangle}^{c_{j_1m_1j_2m_2}^{JM}} \quad (49\text{-}3)$$

حيث نسمي معاملات هذا النشر $c_{j_1m_1j_2m_2}^{JM}=\langle m_1,m_2|J,M\rangle$ بمعاملات كلابش – غوردن. إن معرفة هاته المعاملات تسمح بتحديد الأشعة $|J,M\rangle$ بدلالة الأشعة القديمة. وفي الحقيقة، إن الكتابة التامة لهذه المعاملات إن لم نهمل أي دليل أثناء كتابتنا لكل العلاقات التي سبقت هي

$$\langle k_1,k_2,j_1,j_2,m_1,m_2|k_1,k_2,j_1,j_2,J,M\rangle\equiv\langle m_1,m_2|J,M\rangle\longrightarrow \text{Clebsch–Gordan Coefficients} \quad (50\text{-}3)$$

2.3.3 بعض خصائص معاملات كلابش – غوردن

لا توجد عبارة عامة لهذه المعاملات، ولكنها تحقق كثيرا من الخصائص التي تسهل عملية البحث عليها. وعلى كل حال فهناك جداول مخصصة لها محسوبة مسبقا من أجل أي دراسة عملية. لكن نشير إلى أنه يُختار لها أن تكون أعدادا حقيقية دائما، أي

$$\langle m_1,m_2|J,M\rangle^*=\langle J,M|m_1,m_2\rangle \quad (51\text{-}3)$$

$$Sum=\left(\text{عدد الحدود}\right)\left(\frac{u_1+u_n}{2}\right)$$

كما يُتفق أن يُأخذ معامل نشر الشعاع الأول $|J,M=J\rangle$ من الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(J)$ (وذلك من أجل أي قيمة ممكنة للعدد J) على الشعاع $|m_1=j_1,m_2=J-j_1\rangle$ موجبا كما ذكرنا سابقا. ونكتب

$$c^{JJ}_{j_1,j_1,j_2,J-j_1}=\langle j_1,J-j_1|J,J\rangle \longrightarrow \text{حقيقي و موجب} \tag{52-3}$$

ثم إن هذه المعاملات ستكون معدومة في كل الحالات التي لا تحقق العلاقة (3-39). ويمكن البرهان على هذا بسهولة وذلك بتطبيق المؤثر $(J_z=J_{1z}+J_{2z})$ على كلا طرفي المعادلة (3-49)

$$J_z|J,M\rangle=\sum_{m_1=-j_1}^{+j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{+j_2}(J_{1z}+J_{2z})|m_1,m_2\rangle\langle m_1,m_2|J,M\rangle$$
$$\Rightarrow M\hbar|J,M\rangle=\sum_{m_1=-j_1}^{+j_1}\sum_{m_2=-j_2}^{+j_2}(m_1+m_2)\hbar|m_1,m_2\rangle\langle m_1,m_2|J,M\rangle$$

بضرب كلا الطرفين في البرا $\langle m_1',m_2'|$ واستعمال علاقة التعامد والتقنين (3-48) نتحصل على النتيجة

$$(M-m_1'-m_2')\langle m_1',m_2'|J,M\rangle=0 \tag{53-3}$$

فإن لم يكن $M=m_1'+m_2'$ ستكون معاملات كلابش – غوردن بالضرورة معدومة بحيث لا تظهر في النشر (3-49) تلك الأشعة التي لا تحقق أعدادها المغناطيسية $m_{1,2}$ العلاقة (3-39). ونكتب عموما

$$\boxed{\langle m_1,m_2|J,M\rangle=0\ \text{ if } M\neq m_1+m_2} \tag{54-3}$$

وتسمى، مع العلاقات (3-39) و (3-47)، بقواعد الانتقاء لمعاملات كلابش - غوردن (*selection rules*).

يمكن أن نضيف أيضا خصيصتين هنا لهذه المعاملات قصد تبسيط الحسابات فيما سيأتي. هاتان الخصيصتان تقابلان الحالتين الحدّيتين (3-40) لقيم العدد المغناطيسي M، فبالنسبة للقيمة العظمى له، أي لما يكون $M=M_{max}=j_1+j_2$ فإن النشر (3-49) سيُختصر إلى حد واحد فقط بحيث

$$|J,M_{max}\rangle=|j_1,j_2\rangle\langle j_1,j_2|J,M_{max}\rangle \tag{55-3}$$

لأن كل معاملات النشر الأخرى معدومة في هذه الحالة وفق علاقة الانتقاء (3-54). وبما أن الشعاعان $|j_1,j_2\rangle$ و $|J,M_{max}\rangle$ مقنّنان، فبضرب طرفي (3-55) بالبرا $\langle J,M_{max}|$ نجد

$$1=\langle J,M_{max}|j_1,j_2\rangle\langle j_1,j_2|J,M_{max}\rangle=|\langle j_1,j_2|J,M_{max}\rangle|^2 \tag{56-3}$$

حيث استخدمنا (3-51). وبما أننا اتفقنا على اختيار معاملات كلابش – غوردن كأعداد حقيقة وطبقا للاتفاق (3-52) فإن (3-56) تستلزم أن يكون

$$\langle j_1,j_2|J,M_{max}\rangle\equiv\langle j_1,j_2|J=j_1+j_2,M_{max}=j_1+j_2\rangle=1 \tag{57-3}$$

في النهاية نكتب

$$|J,M_{max}\rangle=|m_1=j_1,m_1=j_2\rangle \tag{58-3}$$

باتباع نفس الطريقة نبرهن أنه من أجل الحالة الحدية الأخرى، أي $M=M_{min}=-(j_1+j_2)$، فأننا نكتب مبدئيا

$$|J,M_{min}\rangle=|-j_1,-j_2\rangle\langle -j_1,-j_2|J,M_{max}\rangle \tag{59-3}$$

لكننا نجد أن

$$\langle -j_1,-j_2|J,M_{min}\rangle\equiv\langle -j_1,-j_2|J=j_1+j_2,M_{min}=-(j_1+j_2)\rangle=1 \tag{60-3}$$

وبالتالي

$$|J,M_{min}\rangle=|m_1=-j_1,m_1=-j_2\rangle \tag{61-3}$$

سنقوم فيما بقي من الدرس بتطبيق جمع العزوم الحركية على بعض الحالات البسيطة التي تساعدنا في كيفية استخراج بقية المعاملات مع تطبيق النتائج التي أثبتناها سابقا.

4.3 جمع العزوم الحركية السبينية $s_1 = 1/2$ و $s_2 = 1/2$

ليكن لدينا جسيمان عزماهما الحركيان هما $\mathbf{S}_1$ و $\mathbf{S}_2$ حيث $s_{1,2} = 1/2$، حيث سنهتم بدرجات حرية السبين فقط وهي أبسط حالة، ولكنها مفيدة جدا في الجانب العملي ونصادفها كثيرا. سيكون إذن لكل من العددين المغناطيسيين الذاتيين مسقطان هما $\left(m_{s_{1,2}} = \pm 1/2\right)$. فيكون بُعد فضائي الحالات الجزئيان $\mathcal{E}_{1,2}\left(s_{1,2}\right)$ لكل منهما هو $g_{s_1} = g_{s_2} = 2$ و لكل منهما قاعدة تملك شعاعين نختصر كتابتهما كما يلي

$$\begin{cases}\left\{\left|s_1 = \frac{1}{2}, m_{s_1} = \frac{1}{2}\right\rangle \equiv |+\rangle_1, \left|s_1 = \frac{1}{2}, m_{s_1} = -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv |-\rangle_1\right\} \longrightarrow \mathcal{E}_1\left(s_1 = \frac{1}{2}\right) \\ \left\{\left|s_2 = \frac{1}{2}, m_{s_2} = \frac{1}{2}\right\rangle \equiv |+\rangle_2, \left|s_2 = \frac{1}{2}, m_{s_2} = -\frac{1}{2}\right\rangle \equiv |-\rangle_2\right\} \longrightarrow \mathcal{E}_2\left(s_2 = \frac{1}{2}\right)\end{cases} \quad (62\text{-}3)$$

وبالتالي يكون بُعد فضاء الحالات الكلي للجملة $\mathcal{E}(s_1, s_2)$ هو $g(s_1, s_2) = 4$ وأشعة قاعدته هي الجداء التنسوري لأشعة قاعدتي كل من الفضائين $\mathcal{E}_{1,2}\left(s_{1,2}\right)$ ونكتبها للاختصار كما في (3-27)

$$\left|m_{s_1}, m_{s_2}\right\rangle \equiv \left|s_1, s_2, m_{s_1}, m_{s_2}\right\rangle = \left|s_1, m_{s_1}\right\rangle \otimes \left|s_2, m_{s_2}\right\rangle \quad (63\text{-}3)$$

أين سنهمل كتابة الدليلين $s_{1,2}$ لأننا نأخذهما ثابتين في هذه المسألة. فنتحصل إذن على أربعة أشعة للقاعدة التي سنسميها قديمة وهي

$$\left\{\left|m_{s_1}, m_{s_2}\right\rangle\right\} \equiv \{|+,+\rangle, |+,-\rangle, |-,+\rangle, |-,-\rangle\} \quad (64\text{-}3)$$

حيث أخذنا حسب (3-62) و (3-63) الترميز التالي

$$\begin{cases}|+,+\rangle = |+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \\ |+,-\rangle = |+\rangle_1 \otimes |-\rangle_2 \\ |-,+\rangle = |-\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \\ |-,-\rangle = |-\rangle_1 \otimes |-\rangle_2\end{cases} \quad (65\text{-}3)$$

تحقق الأشعة (3-64)، حسب العلاقات (3-28)، معادلات القيم الذاتية التالية

$$\begin{cases}\mathbf{S}_1^2\left|m_{s_1}, m_{s_2}\right\rangle = \mathbf{S}_2^2\left|m_{s_1}, m_{s_2}\right\rangle = (3/4)\hbar^2\left|m_{s_1}, m_{s_2}\right\rangle \\ S_{1z}\left|m_{s_1}, m_{s_2}\right\rangle = m_{s_1}\hbar\left|m_{s_1}, m_{s_2}\right\rangle \\ S_{2z}\left|m_{s_1}, m_{s_2}\right\rangle = m_{s_2}\hbar\left|m_{s_1}, m_{s_2}\right\rangle\end{cases} \quad (66\text{-}3)$$

بالنسبة للعزم الحركي الكلي $\mathbf{S}$، أو السبين الكلي للجملة، لدينا

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 \quad (67\text{-}3)$$

إن المجموعة $\{\mathbf{S}_1^2, \mathbf{S}_2^2, \mathbf{S}^2, S_z\}$ متبادلة فيما بينها مثنى مثنى، ونرمز لأشعتها المشتركة كما فعالنا في (3-29) بالكتابة

$$|s_1, s_2, S, M\rangle \equiv |S, M\rangle \quad (68\text{-}3)$$

وهي تشكل أشعة القاعدة الجديدة $\{|S, M\rangle\}$ لفضاء الحالات الكلي $\mathcal{E}(s_1, s_2)$. فمن خلال المعادلتين (3-41) و (3-47) ستكون القيم الممكنة لكل من العددين S و M هي

$$\begin{cases}|s_1 - s_2| \leq S \leq s_1 + s_2 \Rightarrow 0 \leq S \leq 1 \Rightarrow S = 0{,}1 \\ -S \leq M \leq S \Rightarrow \begin{cases}S = 0 \Rightarrow M = 0 \\ S = 1 \Rightarrow M = -1{,}0{,}1\end{cases}\end{cases} \quad (69\text{-}3)$$

يقابل كل قيمة للعدد S فضاء جزئيا $\mathcal{E}(S)$ بُعده $(2S+1)$ حيث أن الفضاء الكلي $\mathcal{E}(s_1, s_2)$ سيكون حسب (3-34)

$$\mathcal{E}(s_1,s_2)=\mathcal{E}_1(s_1)\otimes\mathcal{E}_2(s_2)=\sum_{\oplus}\mathcal{E}(S) \qquad (70\text{-}3)$$

إن القاعدة الجديدة ستُكوّن من الأشعة $|S,M\rangle$ حيث

$$\{|S,M\rangle\}=\{|1,1\rangle,|1,0\rangle,|1,-1\rangle,|0,0\rangle\} \qquad (71\text{-}3)$$

بحيث تنتمي الثلاثة الأولى منها إلى الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(1)$ ذو ثلاثة أبعاد ونسميها الحالة الثلاثية للسبين (*spin triplet state*) والشعاع الأخير ينتمي للفضاء الجزئي $\mathcal{E}(0)$ ذو البعد الواحد ونسميه الحالة المنفردة للسبين (*spin singlet state*)، ويكون في هذه الحالة

$$\mathcal{E}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\mathcal{E}_1\left(\frac{1}{2}\right)\otimes\mathcal{E}_2\left(\frac{1}{2}\right)=\mathcal{E}(0)\oplus\mathcal{E}(1) \qquad (72\text{-}3)$$

وكل واحد من هذه الأشعة (3-71) يحقق حسب (3-32) معادلات القيم الذاتية التالية

$$\begin{cases}\mathbf{S}^2|S,M\rangle=S(S+1)\hbar^2|S,M\rangle=\begin{cases}0 & \text{if } S=0\\ 2\hbar^2|1,M\rangle & \text{if } S=1\end{cases}\\ S_z|S,M\rangle=M\hbar|S,M\rangle=\begin{cases}0 & \text{if } M=0\\ \pm\hbar|1,\pm1\rangle & \text{if } M=\pm1\end{cases}\\ \mathbf{S}_i^2|S,M\rangle=s_i(s_i+1)\hbar^2|S,M\rangle=(3/4)\hbar^2|S,M\rangle\,;(i=1,2)\end{cases} \qquad (73\text{-}3)$$

سنبحث الان عن كتابة هذه الأشعة $|S,M\rangle$ بدلالة الأشعة $|m_{s_1},m_{s_2}\rangle$ المعطاة بالعلاقة (3-64). فحسب النشر (3-49) سيكون

$$|S,M\rangle=\sum_{m_{s_1}=-1/2}^{1/2}\sum_{m_{s_2}=-1/2}^{1/2}|m_{s_1},m_{s_2}\rangle\langle m_{s_1},m_{s_2}|S,M\rangle \qquad (74\text{-}3)$$

والتي يمكن أن نكتبها بصورة مبسطة أكثر تظهر فيها معاملات كلابش – غوردن $\langle m_{s_1},m_{s_2}|S,M\rangle$ بشكل أوضح

$$|S,M\rangle=\langle +,+|S,M\rangle|+,+\rangle+\langle +,-|S,M\rangle|+,-\rangle+\langle -,+|S,M\rangle|-,+\rangle+\langle -,-|S,M\rangle|-,-\rangle \qquad (75\text{-}3)$$

أ- البحث عن أشعة الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(1)$

إن أشعة قاعدة هذا الفضاء هي $\{|1,1\rangle,|1,0\rangle,|1,-1\rangle\}$ ولإيجاد معاملات نشرها على أشعة القاعدة القديمة وفق العبارة (3-75) ننطلق من أعظم[12] قيمة للعدد المغناطيسي $M=1$ التي يقابلها في المجموعة $\{|S,M\rangle\}$ شعاع واحد فقط هو $|1,1\rangle$ لأنها غير منحلة. في المقابل لا تتحقق هذه القيمة العظمى للعدد M إلا من أجل القيم $(m_{s_1}=m_{s_2}=+1/2)$ وذلك حسب (3-40). ففي هذه الحالة سيقتصر النشر (3-74) فقط على هاتين القيمتين للعددين m_{s_1} و m_{s_2}، لأن كل معاملات كلابش – غوردن الأخرى ستكون معدومة كما في قواعد الانتقاء (3-54). وبالتالي يُختصر النشر (3-75) إلى

$$|1,1\rangle=\langle +,+|1,1\rangle|+,+\rangle \qquad (76\text{-}3)$$

نعلم من خلال (3-57) أن

$$\langle +,+|1,1\rangle=\left\langle +\frac{1}{2},+\frac{1}{2}\middle|1,1\right\rangle=1 \qquad (77\text{-}3)$$

فنتحصل إذن على الشعاع الأول حسب (3-76)

$$\boxed{|1,1\rangle=|+,+\rangle} \qquad (78\text{-}3)$$

في الحقيقة، كان يمكن الحصول عله مباشرة من العلاقة (3-58)، لكن لمزيد من التوضيح أعدنا التذكير بطريقة استنتاجها.

[12] أو أصغر قيمة $M=-1$ فالأمر سيان.

للحصول على بقية الأشعة التي تنتمي إلى الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(1)$ نطبق مؤثر الخفض $(S_- = S_{1-} + S_{2-})$ على الشعاع $|1,1\rangle$ فنجد حسب العلاقة (3-37)

$$S_-|1,1\rangle = \hbar\sqrt{1(1+1) - 1(1-1)}|1,1-1\rangle = \hbar\sqrt{2}|1,0\rangle \tag{3-79}$$

لكن من جهة أخرى، إذا نظرنا إلى الطرف الثاني للعلاقة (3-78) فإن

$$S_-|1,1\rangle = (S_{1-} + S_{2-})|+,+\rangle = S_{1-}|+,+\rangle + S_{2-}|+,+\rangle \tag{3-80}$$

وبحسب (3-36) و (3-62) و (3-65) يكون

$$\begin{cases} S_{1-}|+,+\rangle = \left(S_{1-}\left|s_1 = \frac{1}{2}, m_{s_1} = \frac{1}{2}\right\rangle\right)\otimes|+\rangle_2 = \left(\hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}\overbrace{\left|s_1 = \frac{1}{2}, m_{s_1} = \frac{1}{2}-1\right\rangle}^{|-\rangle_1}\right)\otimes|+\rangle_2 = \hbar|-,+\rangle \\ S_{2-}|+,+\rangle = |+\rangle_1\otimes\left(S_{2-}\left|s_2 = \frac{1}{2}, m_{s_2} = \frac{1}{2}\right\rangle\right) = |+\rangle_1\otimes\left(\hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}\overbrace{\left|s_1 = \frac{1}{2}, m_{s_1} = \frac{1}{2}-1\right\rangle}^{|-\rangle_2}\right) = \hbar|+,-\rangle \end{cases} \tag{3-81}$$

نجد إذن من أجل (3-80) النتيجة الثانية التالية

$$S_-|1,1\rangle = \hbar(|-,+\rangle + |+,-\rangle) \tag{3-82}$$

وبمقارنة كل من (3-79) و (3-82) نجد الشعاع الثاني للقاعدة الجديدة

$$\boxed{|1,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle + |-,+\rangle)} \tag{3-83}$$

فكما هو متوقع، لن تظهر في النشر (3-83) سوى معاملات كلابش – غوردن غير المعدومة حسب (3-54). أي التي تحقق $(M = m_{s_1} + m_{s_2})$ فيكون إذن

$$M = 0 \Rightarrow \left(m_{s_1} = \frac{1}{2} \text{ and } m_{s_2} = -\frac{1}{2}\right) \text{ or } \left(m_{s_1} = -\frac{1}{2} \text{ and } m_{s_2} = \frac{1}{2}\right) \tag{3-84}$$

نمر الان للبحث عن الشعاع الثالث $|1,-1\rangle$ والأخير بالنسبة للفضاء الجزئي $\mathcal{E}(1)$ والذي يمكننا الحصول عليه سواء بتطبيق مؤثر الخفض S_- على الشعاع $|1,0\rangle$ باتباع نفس الخطوات كما فعلنا أعلاه، أو ببساطة، بما أن $M = M_{min} = -1$ فيمكن كتابته مباشرة باعتبار العلاقة (3-61) كما يلي

$$\boxed{|1,-1\rangle = |-,-\rangle} \tag{3-85}$$

ب- البحث عن أشعة الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(\mathbf{0})$

إن قاعدة هذا الفضاء تملك شعاعا وحيدا فقط هو $|0,0\rangle$ والذي يكتب حسب النشر (3-75) كما يلي

$$|0,0\rangle = \underbrace{\langle +,-|0,0\rangle}_{\alpha}|+,-\rangle + \underbrace{\langle -,+|0,0\rangle}_{\beta}|-,+\rangle = \alpha|+,-\rangle + \beta|-,+\rangle \tag{3-86}$$

حيث α و β عددان حقيقيان طبعا، كما أن المعامل α يختار بحيث يكون موجبا حسب الاتفاق (3-52). لقد ألغينا في هذا النشر الأشعة التي معاملاتها $\langle m_{s_1}, m_{s_2}|0,0\rangle$ معدومة لأنها لا تحقق (3-54)، وهي هنا المعاملات $\langle +,+|0,0\rangle$ و $\langle -,-|0,0\rangle$. لأيجاد بقية المعاملات، نستعمل خاصيتين، وهما تقنين الشعاع $|0,0\rangle$ وتعامده مع بقية أشعة قاعدة الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(1)$. فحسب (3-86) سيكون لدينا من شرط التقنينين

$$\langle 0,0|0,0\rangle = 1 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = 1 \tag{3-87}$$

وتعامد $|0,0\rangle$ مع الشعاع $|1,0\rangle$ بشكل خاص يعطي حسب (3-83) و (3-86) ما يلي

$$\langle 1,0|0,0\rangle = 0 \Rightarrow \alpha + \beta = 0 \tag{88-3}$$

إن الحلول الحقيقية للمعادلتين (3-87) و (3-88) هي معاملات كلابش – غوردن التالية

$$\alpha = -\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{89-3}$$

لاحظ أننا أخذنا المعامل α موجبا. وبالتالي فإن عبارة نشر الشعاع $|0,0\rangle$ على أشعة القاعدة القديمة هي

$$\boxed{|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+,-\rangle - |-,+\rangle)} \tag{90-3}$$

وهكذا نكون قد تحصلنا على كل الأشعة الذاتية المشتركة للمجموعة[13] $\{\mathbf{S}_1^2, \mathbf{S}_2^2, \mathbf{S}^2, S_z\}$.

5.3 جمع العزم الحركية المداري $\mathbf{L}$ $(\ell = 1)$ و السبيني $\mathbf{S}$ $(s = 1/2)$

نفترض الان أننا نريد تركيب العزم الحركي المداري $\mathbf{L}$ و العزم الحركي السبيني $\mathbf{S}$ في الحالة الخاصة التالية

$$\begin{cases} \ell = 1 \Rightarrow m_\ell = -1,0,1 \\ s = \dfrac{1}{2} \Rightarrow m_s = -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{91-3}$$

إن الملحوظة $\mathbf{L}$ تعمل في فضائها الخاص $\mathcal{E}_\ell(\ell = 1)$ ذو بُعد يساوي $(2\ell + 1 = 3)$ و الملحوظة الأخرى $\mathbf{S}$ تعمل في فضائها الخاص $\mathcal{E}_s\left(s = \frac{1}{2}\right)$ ذو البُعد $(2s + 1 = 2)$ بحيث أن قاعدة كل منهما مكونة من الأشعة الذاتية المشتركة $\{|\ell, m_\ell\rangle\}$ و $\{|s, m_s\rangle\}$ للمجموعتين $\{\mathbf{L}^2, L_z\}$ و $\{\mathbf{S}^2, S_z\}$ على الترتيب. أي

$$\begin{cases} \mathcal{E}_\ell(\ell = 1) \to |\ell, m_\ell\rangle \equiv \{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\} \\ \mathcal{E}_s\left(s = \dfrac{1}{2}\right) \to |s, m_s\rangle \equiv \left\{\left|\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right\rangle, \left|\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right\rangle\right\} \end{cases}$$

وبالتالي فإن بُعد فضاء الحالات الكلي $\mathcal{E}(\ell, s)$، الذي هو عبارة عن الجداء التنسوري للفضائين $\mathcal{E}_\ell$ و $\mathcal{E}_s$ ، سيكون ستة

$$g(\ell = 1, s = 1/2) = \overbrace{(2\ell + 1)}^{=3} \times \overbrace{(2s + 1)}^{=2} = 6$$

وأن قاعدة هذا الفضاء الكلي ستكون مكونة من الأشعة التالية

$$|\ell, s, m_\ell, m_s\rangle = |\ell, m_\ell\rangle \otimes |s, m_s\rangle \equiv |m_\ell, m_s\rangle \tag{92-3}$$

حيث سنتخلى عن كتابة الدليلين ℓ و s لأنهما ثابتان خلال هذه المسألة. وبالتالي فإن أشعة القاعدة القديمة $|m_\ell, m_s\rangle$ هي

$$\left\{\left|1, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|1, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|0, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|0, -\frac{1}{2}\right\rangle, \left|-1, \frac{1}{2}\right\rangle, \left|-1, -\frac{1}{2}\right\rangle\right\} \tag{93-3}$$

فيكون لدينا إذن

[13] والتي يمكن الحصول عليها أيضا بالبحث عن الأشعة والقيم الذاتية للمصفوفة الممثلة للملحوظة $\mathbf{S}^2$ في القاعدة القديمة التالية

$$(\mathbf{S}^2) = \hbar^2 \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \left|1,\frac{1}{2}\right\rangle = \left|1,\frac{1}{2},1,\frac{1}{2}\right\rangle = |1,1\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|1,\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right\rangle = |1,1\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left|0,\frac{1}{2}\right\rangle = \left|1,\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right\rangle = |1,0\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|1,\frac{1}{2},1,-\frac{1}{2}\right\rangle = |1,0\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left|-1,\frac{1}{2}\right\rangle = \left|1,\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right\rangle = |1,-1\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \\ \left|-1,-\frac{1}{2}\right\rangle = \left|1,\frac{1}{2},-1,-\frac{1}{2}\right\rangle = |1,-1\rangle \otimes \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle \end{cases} \tag{94-3}$$

كما أن هذه الأشعة $|m_\ell, m_s\rangle$ تحقق معادلات القيم الذاتية التالية حسب (28-3)

$$\begin{cases} \mathbf{L}^2|m_\ell,m_s\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2|m_\ell,m_s\rangle = 2\hbar^2|m_\ell,m_s\rangle \\ \mathbf{S}^2|m_\ell,m_s\rangle = s(s+1)\hbar^2|m_\ell,m_s\rangle = (3/4)\hbar^2|m_\ell,m_s\rangle \\ L_{\mathbf{z}}|m_\ell,m_s\rangle = m_\ell\hbar|m_\ell,m_s\rangle \\ S_{\mathbf{z}}|m_\ell,m_s\rangle = m_s\hbar|m_\ell,m_s\rangle \end{cases} \tag{95-3}$$

إن هذه الأشعة هي إذن الأشعة الذاتية المشتركة لمجموعة الملحوظات المتبادلة $\{\mathbf{L}^2,\mathbf{S}^2,L_{\mathbf{z}},S_{\mathbf{z}}\}$. لإن وُجد بالنسبة للجسيم المدروس تفاعل سبين – مدار فإننا سنضطر إلى التخلي عن هذه المجموعة من الملحوظات لحساب مجموعة جديدة مكونة من الملحوظات $\{\mathbf{L}^2,\mathbf{S}^2,\mathbf{J}^2,J_z\}$ المتبادلة فيما بينها مثنى مثنى حيث $\mathbf{J}$ هو العزم الحركي الكلي الناتج من تركيب العزم الحركي المداري المداري $\mathbf{L}$ و العزم الحركي السبيني $\mathbf{S}$ أي

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \tag{96-3}$$

وللبحث عن خصائصه سنرمز لأشعة الذاتية المشتركة لمجموعة الملحوظات الجديدة بالرموز التالية

$$|\ell,s,J,M\rangle \equiv |J,M\rangle \tag{97-3}$$

والتي تشكل أشعة القاعدة الجديدة $\{|J,M\rangle\}$ لفضاء الحالات الكلي $\mathcal{E}(\ell,s)$. نتحصل على القيم الممكنة لكل من العددين J و M من خلال المعادلتين (41-3) و (47-3) والتي تعطينا

$$\begin{cases} |\ell-s| \le J \le \ell+s \Rightarrow \left|1-\frac{1}{2}\right| \le J \le 1+\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \le J \le \frac{3}{2} \Rightarrow J = \frac{1}{2},\frac{3}{2} \\ -J \le M \le J \Rightarrow \begin{cases} J=\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \le M \le \frac{1}{2} \Rightarrow M = -\frac{1}{2},\frac{1}{2} \\ J=\frac{3}{2} \Rightarrow -\frac{3}{2} \le M \le \frac{3}{2} \Rightarrow M = -\frac{3}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{2} \end{cases} \end{cases} \tag{98-3}$$

يقابل كل قيمة للعدد J فضاء جزئيا $\mathcal{E}(J)$ بُعده $(2J+1)$ حيث أن الفضاء الكلي $\mathcal{E}(\ell,s)$ سيكون حسب (34-3)

$$\mathcal{E}\left(\ell=1,s=\frac{1}{2}\right) = \mathcal{E}_\ell(\ell=1)\otimes\mathcal{E}_s\left(s=\frac{1}{2}\right) = \sum_{\oplus}\mathcal{E}(J) = \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)\oplus\mathcal{E}\left(\frac{3}{2}\right) \tag{99-3}$$

بالنسبة للفضاء الجزئي $\mathcal{E}(J=3/2)$ فسيكون بُعده أربعة وأشعة قاعدته هي

$$\left\{\left|J=\frac{3}{2},M\right\rangle\right\} = \left\{\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle\right\} \tag{100-3}$$

بينما أشعة قاعدة الفضاء الجزئي الاخر $\mathcal{E}(J=1/2)$ والذي بعده اثنان فهي

$$\left\{\left|J=\frac{1}{2},M\right\rangle\right\} = \left\{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle,\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right\} \tag{101-3}$$

وبالتالي فإن القاعدة الكلية الجديدة للفضاء الكلي $\mathcal{E}(1,1/2)$ ستُكوّن من كل الأشعة $|J,M\rangle$ حيث

$$\{|J,M\rangle\} = \left\{\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle, \left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle\right\} \quad (102\text{-}3)$$

وكل واحد من هذه الأشعة (3-102) يحقق حسب (3-32) معادلات القيم الذاتية التالية

$$\begin{cases} \mathbf{J}^2|J,M\rangle = J(J+1)\hbar^2|J,M\rangle = \begin{cases} \dfrac{15}{4}\hbar^2\left|J=\dfrac{3}{2},M\right\rangle \text{ if } J=\dfrac{3}{2} \\ \dfrac{3}{4}\hbar^2\left|J=\dfrac{1}{2},M\right\rangle \text{ if } J=1 \end{cases} \\ J_z|J,M\rangle = M\hbar|J,M\rangle = \begin{cases} \pm\dfrac{3}{2}\hbar\left|J,\pm\dfrac{3}{2}\right\rangle \\ \pm\dfrac{1}{2}\hbar\left|J,\pm\dfrac{1}{2}\right\rangle \end{cases} \\ \mathbf{S}^2|J,M\rangle = \mathbf{S}^2|\ell,s,J,M\rangle = s(s+1)\hbar^2|J,M\rangle = \dfrac{3}{4}\hbar^2|J,M\rangle\,;\, s=\dfrac{1}{2} \\ \mathbf{L}^2|J,M\rangle = \mathbf{L}^2|\ell,s,J,M\rangle = \ell(\ell+1)\hbar^2|J,M\rangle = 2\hbar^2|J,M\rangle\,;\; \ell=1 \end{cases} \quad (103\text{-}3)$$

يبقى لنا أن نبحث الان عن كتابة هذه الأشعة $|J,M\rangle$ بدلالة الأشعة $|m_\ell,m_s\rangle$ المعطاة بالعلاقة (3-93). فحسب النشر (3-49) سيكون

$$|J,M\rangle = \sum_{m_\ell=-1}^{1}\sum_{m_s=-1/2}^{1/2}\langle m_\ell,m_s|J,M\rangle|m_\ell,m_s\rangle \quad (104\text{-}3)$$

تكمن المهمة إذن في تحديد معاملات كلابش – غوردن $\langle m_\ell,m_s|J,M\rangle$ الموافقة لكل شعاع من أشعة القاعدة الجديدة.

أ- البحث عن أشعة الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(J=3/2)$

إن أشعة قاعدة هذا الفضاء ذو الأربعة أبعاد هي تلك المعطاة في (3-100)، وكما فعلنا في المثال السابق، فإننا ننطلق من أعظم قيمة للعدد المغناطيسي $M=3/2$ التي لا تتحقق إلا من أجل القيم $(m_\ell=1, m_s=+1/2)$ وذلك حسب (3-40) وبالتالي سيقتصر النشر (3-104) على هاتين القيمتين فقط للعددين m_ℓ و m_s. ولذلك فإنه حسب (3-58) سنجد مباشرة الشعاع الأول

$$\boxed{\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \left|1,\frac{1}{2}\right\rangle} \quad (105\text{-}3)$$

للحصول على بقية الأشعة التي تنتمي إلى الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(J=3/2)$ نطبق مؤثر الخفض $(J_-=L_-+S_-)$ على الشعاع $\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle$ فنجد حسب العلاقة (3-37)

$$J_-\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}-1\right)}\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}-1\right\rangle = \hbar\sqrt{3}\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle \quad (106\text{-}3)$$

لكن من جهة أخرى، إذا نظرنا إلى الطرف الثاني للعلاقة (3-105) فإن

$$J_-\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = (L_-+S_-)\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle = L_-\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle + S_-\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle \quad (107\text{-}3)$$

وبحسب (3-36) و (3-94) يكون

$$\begin{cases} L_-\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle = (L_-|1,1\rangle)\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \left(\hbar\sqrt{1(1+1)-1(1-1)}\overbrace{|1,1-1\rangle}^{|1,0\rangle}\right)\otimes\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \hbar\sqrt{2}\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle \\ S_-\left|1,\frac{1}{2}\right\rangle = |1,1\rangle\otimes\left(S_-\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle\right) = |1,1\rangle\otimes\left(\hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}\overbrace{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}-1\right\rangle}^{\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle}\right) = \hbar\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle \end{cases} \quad (108\text{-}3)$$

نجد إذن حسب (3-107) و (3-108) نتيجة الطرف الثاني

$$J_-\left|\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right\rangle = \hbar\left(\sqrt{2}\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle + \left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle\right) \quad (109\text{-}3)$$

وبمقارنة كل من (3-106) و (3-109) نجد الشعاع الثاني

$$\boxed{\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle} \quad (110\text{-}3)$$

وكما هو متوقع، لن تظهر في النشر (3-110) سوى معاملات كلابش – غوردن غير المعدومة حسب (3-54). أي التي تحقق $(M = m_\ell + m_s)$ فيكون إذن

$$M = \frac{1}{2} \Rightarrow \left(m_\ell = 0 \text{ and } m_s = \frac{1}{2}\right) \text{ or } \left(m_\ell = 1 \text{ and } m_s = -\frac{1}{2}\right) \quad (111\text{-}3)$$

لإيجاد الشعاع الثالث $\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ نتبع نفس الخطوات السابقة، أي نطبق مؤثر الخفض $(J_- = L_- + S_-)$ على كلا طرفي العلاقة (3-110) فنجد في النهاية

$$\boxed{\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\left|-1,\frac{1}{2}\right\rangle} \quad (112\text{-}3)$$

نفس الملاحظة بالنسبة لمعاملات كلابش – غوردن غير المعدومة التي نتوقع ظهورها في النشر (3-112) كما فعلنا في (3-111). أي فقط المعاملات التي يكون من أجلها ما يلي

$$M = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left(m_\ell = -1 \text{ and } m_s = \frac{1}{2}\right) \text{ or } \left(m_\ell = 0 \text{ and } m_s = -\frac{1}{2}\right) \quad (113\text{-}3)$$

بالنسبة للشعاع الأخير $\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle$ لهذا الفضاء، فهو يوافق أصغر قيمة للعدد المغناطيسي $(M = -3/2)$ وبالتالي فحسب (3-61) يكون

$$\boxed{\left|\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right\rangle = \left|-1,-\frac{1}{2}\right\rangle} \quad (114\text{-}3)$$

والذي يمكننا الحصول عليه أيضا بتطبيق مؤثر الخفض J_- على الشعاع $\left|\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$.

ب- البحث عن أشعة الفضاء الجزئي $\mathcal{E}(J = 1/2)$

بالنسبة لقاعدة هذا الفضاء فإنها تملك شعاعين فقط كما في (3-101). فبالنسبة للشعاع الأول $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ فلن يظهر في نشره على أشعة القاعدة القديمة سوى تلك التي تحقق (3-111) ومنه فإن النشر (3-104) سيختصر إلى ما يلي

$$\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \alpha\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle + \beta\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle \quad (115\text{-}3)$$

حيث α و β عددان حقيقيان وهما اختصاران لمعاملات كلابش-غوردن $\left\langle 0,\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ و $\left\langle 1,-\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ على الترتيب. كما سنأخذ المعامل α موجبا وفقا للاتفاق (3-52). ولإيجاد هاذان المعاملان نستغل خاصيتي التعامد والتقنين لهذا الشعاع. أي تعامده مع كل أشعة القاعدة الأخرى وخاصة الشعاع $\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$. بالنسبة لشرط التقينين، نجد حسب (3-115)

$$\left\langle\frac{1}{2},\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = 1 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2 = 1 \tag{116-3}$$

وبالنسبة لتعامد $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ مع الشعاع $\left|\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ بشكل خاص فنجد حسب (3-110) و (3-115)

$$\left\langle\frac{3}{2},\frac{1}{2}\middle|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = 0 \Rightarrow \alpha+\sqrt{2}\beta = 0 \tag{117-3}$$

إن الحلول الحقيقية للمعادلتين (3-116) و (3-117) هي معاملات كلابش – غوردن التالية

$$\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \text{ and } \beta = -\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{118-3}$$

وبالتالي فإن عبارة نشر الشعاع $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ على أشعة القاعدة القديمة هي

$$\boxed{\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|1,-\frac{1}{2}\right\rangle - \frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,\frac{1}{2}\right\rangle} \tag{119-3}$$

أما الشعاع الثاني والأخير في هذه القاعدة $\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle$ فيمكن الحصول عليه بتطبيق مؤثر الخفض $(J_- = L_- + S_-)$ على الشعاع $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$، وباتباع نفس الطريقة كما فعلنا سابقا نجد أن عبارة نشر الشعاع $\left|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\rangle$ على أشعة القاعدة القديمة هي

$$\boxed{\left|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left|0,-\frac{1}{2}\right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}\left|-1,\frac{1}{2}\right\rangle} \tag{120-3}$$

وهكذا نكون قد تحصلنا على كل أشعة القاعدة الجديدة المكونة من الأشعة الذاتية المشتركة للمجموعة $\{\mathbf{L}^2,\mathbf{S}^2,\mathbf{J}^2,J_z\}$.