

الفصل السادس

طرق التقريب في ميكانيك الكم
- نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن -

طرق التقريب في ميكانيك الكم - نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن

Approximation Methods in Quantum Mechanics

Time-dependent Perturbation Theory

1. مقدمة

كنا قد تكلمنا في الفصل الخامس عن عدم إمكانية إيجاد الحلول الدقيقة لمعادلة شرودينغر إلا من أجل بعض الأنظمة البسيطة، مما جعلنا نلجأ إلى البحث عن هذه الحلول بطرق تقريبية وهي كثيرة بحيث تناسب كل طريقة منها فئة معينة من المسائل الكمومية. وتعرضنا لنظرية الاضطرابات التي تطبق على المسائل التي يمكن من أجلها فصل الهاملتوني الكلي H ، الذي يحكم تطور الجملة، إلى جزئين أحدهما مستقر H_0 ، نعلم قيمه وأشعة حالته الذاتية، والجزء الآخر V يُعتبر وجوده في الهاملتوني الكلي كاضطراب أُدخل على الجملة المستقرة (سواء كان اضطرابا مصدره من خارج الجملة أو من داخلها¹) بحيث يكون أثره ضعيفا بالمقارنة مع الهاملتوني المستقر H_0 . أي أنها تطبق على المسائل التي يكون فيها الهاملتوني الكلي H قابلا للفصل بحيث يمكننا أن نكتب

$$(1-6) \quad H = H_0 + V ; (V \ll H_0)$$

وحق نستطيع الحديث عن معالجة مسألة باستعمال نظرية الاضطرابات، لابد أن نُحدّد هنا معنى كون الاضطراب V ضعيفا أمام الهاملتوني المستقر H_0 . في الحقيقة، عند دراستنا لنظرية الاضطرابات المستقرة في الفصل السابق بيّنا أننا نقصد بضعف الاضطراب أن تكون عناصره المصفوفية V_{fi} بين مختلف الأشعة الذاتية للهاملتوني المستقر² صغيرة بالمقارنة مع الفرق بين مستويين طاقيين مختلفين للجملة غير المضطربة. أي أن يكون الشرط التالي محققا

$$(2-6) \quad V \ll H_0 \Leftrightarrow |V_{fi}| = |\langle f|V|i\rangle| \ll |E_f^0 - E_i^0| = \hbar|\omega_{fi}|$$

فإن كان الأمر غير ذلك وجب علينا معالجة المسألة بطرق تقريبية أخرى عدا نظرية الاضطرابات، وذلك في حال تعدّر حلها بصفة دقيقة طبعاً. في هذا السياق نود أن ننبه إلى نقاط مهمة جدا يجب ذكرها وتفصيلها وكذا الاحتفاظ بها في الذهن عند معالجة المسائل في إطار نظرية الاضطرابات سواء المستقرة أو المتعلقة بالزمن. في البداية، لا شك أن تطبيق اضطراب على جملة مهما كان ضعيفا لابد وأن يُحدث تغييرا، ولو كان طفيفا، في حالتها الكمومية المستقرة كما رأينا سابقا. لكن السؤال الذي يُطرح هو عن قدرة هذا الاضطراب الضعيف على إحداث انتقال للجملة من حالة كمومية مستقرة إلى حالة كمومية مستقرة أخرى وليس مجرد تعديلها؟ إن الجواب عن هذا السؤال هو "نعم" وذلك ما سنبيّنه في هذا الفصل. فكُونُ الاضطراب ضعيفا أمام الهاملتوني المستقر، كما تصف ذلك العلاقة (2-6)، لا يعني أنه لا يستطيع إحداث انتقال للجملة بين حالاتها الكمومية المختلفة، بل يمكنه، زيادة على ذلك، حتى جعلها تنتقل بين مستوياتها الطاقوية المختلفة³ عبر آلية امتصاص أو إصدار كم طاقة معين وذلك بشروط خاصة لا تتعلق بمشكلة ضعفه إطلاقا.

في الحقيقة، يجب أولا أن نميز بين نوعين مهمين من الاضطرابات سنعالجها هنا، وهما الاضطراب الثابت والاضطراب الاهتزازي. فبالنسبة للأول، سنرى كيف أنه بإمكانه إحداث انتقال للجملة بين حالاتها التي تختلف طاقتها بمقدار δE صغير يتناقص كلما ازداد زمن التفاعل بين الاضطراب

¹ أي بإدراج حدود ناتجة عن تفاعلات بين المكونات الداخلية للجملة كانت قد أهملت في الدراسة الأولية للجملة قصد تبسيط البحث عن حلول معادلة القيم الذاتية للهاملتوني المستقر H_0 .

² أي عناصر المصفوفة المثلثة للاضطراب في القاعدة المكونة من الأشعة الذاتية لـ H_0 .

³ إن الانتقال بين الحالات لا يرافقه بالضرورة انتقال بين المستويات الطاقوية، فقد يكون انتقالا بين حالات مشتركة في مستوى طاقي واحد منحل. لذلك وجب التمييز بين قولنا انتقال بين الحالات وانتقال بين المستويات فالثانية تستلزم الأولى وليس العكس. فالاضطراب الثابت مثلا يُحدث انتقالا بين الحالات المنحلة (أو بين الحالات التي لا تختلف طاقتها إلا بمقدار δE صغير جدا سنحدده فيما بعد) دون الحالات المختلفة في الطاقة.

والجملة، غير أن احتمال حدوث ذلك يكون صغيرا جدا أمام الواحد. إن هذا الصغر في احتمال الانتقال راجع إلى شرط صلاحية التقريبات التي سنقوم بها لتأسيس نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن والذي يستلزم أن تكون العلاقة (2-6) محققة أولا. لكن هذا الشرط لا يصلح أن يتحقق من أجل المستويات المنحلة أو شبه المنحلة لأن الفرق بينها سيكون معدوما أو شبه معدوم على الترتيب، ولذلك فمهما كان الاضطراب ضعيفا فلا بد أنه سيحدث انتقالاتا بين حالات الجملة وذلك بصفة أكيدة أو شبه أكيدة على الترتيب أيضا. لذلك يجب أن نتذكر أن ضعف الاضطراب لا يعني عدم قدرته على إحداث انتقال بين الحالات. وإنما نقول أن احتمال الانتقال بين الحالات ذات المستويات الطاقوية المحققة للعلاقة (2-6) سيكون صغيرا، بينما يكون هذا الاحتمال كبيرا جدا بالنسبة للمستويات المنحلة أو شبه المنحلة. وفي هذه الحالة الأخيرة سنرى أن نتائج نظرية الاضطرابات لن تكون صالحة إلا من أجل أزمنة تفاعل صغيرة كشرط ضروري، ذلك أن العلاقة الأساسية (2-6) التي تبني عليها لن تكون محققة والحالة هذه.

إن دراسة تأثير الاضطراب الثابت الواقع على جملة ذات مستويين طاقيين (E_1, E_2) تعطي فكرة جيدة عن الفرق بين كون الاضطراب ضعيفا وكونه قويا. في الواقع، يمكن حل هذه المسألة بصورة دقيقة دون اللجوء إلى طرق تقريبية، وذلك بحل معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن مباشرة. ونميز هنا حالتين. فإن كان الفرق بين المستويين الطاقيين (E_1, E_2) لهذه الجملة صغيرا بالمقارنة مع هذا الاضطراب، فنحن هنا أمام حالة لاضطراب قوي والذي من شأنه أن يجعل احتمال الانتقال بين الحالتين المرفقتين يهين المستويين كبيرا جدا⁴. بل يصبح هذا الانتقال بينهما أكيدا في لحظات معينة إن كانت طاقة الحالتين هي نفسها (أي منحلة مرتان $E_1 = E_2$)، وستقوم الجملة حينئذ بالاهتزاز بينهما ذهابا وعودة تحت تأثير هذا الاضطراب فيما يسمى باهتزازات رابي (Rabi oscillations). فإن علمنا بأن نموذج الجملة ذات المستويين الطاقيين يمكن أن يستعمل مثلا لدراسة تأثير الاضطراب على مستويين طاقيين قريبين جدا من بعضهما البعض ولكنهما في نفس الوقت بعيدين عن بقية المستويات بحيث يمكن عزلهما عنها، فحينئذ سنرى أن قوة هذا الاضطراب ليست بالضرورة ذاتية، بل يمكن أن يكون الاضطراب ضعيفا في حد ذاته بالمقارنة مع الفرق بين المستويات الطاقوية المختلفة للجملة والمفصولة جيدا⁵، غير أنه يبدو قويا بالنسبة للمستويين المعزولين نظرا للفرق الضئيل بينهما (أو المعدوم إن كان منحلا). فرغم ضعف الاضطراب إلا أن الجملة تقوم بالاهتزاز بين حالتها في هذه الحالة. ولكن إن كان الفرق بين E_1 و E_2 يحقق (2-6) فإن احتمال الانتقال سيكون صغيرا جدا وينعدم كلما ازداد الفرق بينهما.

بالنسبة للاضطراب الجيبي، فإن الفكرة مختلفة قليلا من الناحية الطاقوية، لكن ما قلناه عن ضعف الاضطراب يبقى صالحا هنا. إن اضطرابا مثل هذا، إن كان تواتره مساويا أو قريبا من تواتر بور للجملة $|W_{fi} \neq 0|$ ، فمهما كان ضعيفا فإنه حتما أو شبه حتما سينقل الجملة من المستوى الطاقي الابتدائي E_i^0 إلى المستوى النهائي E_f^0 المختلف عنه عبر امتصاص أو إصدار كم من الطاقة مقداره الفرق بين هذين المستويين. وهذه الحالة معروفة بحالة التجاوب أو الرنين لأن الجملة تتجاوب فيها مع الاضطراب بغض النظر عن شدته، وهي ظاهرة في غاية الأهمية. لكن إن كان تواتر هذا الاضطراب بعيدا عن تواتر بور للجملة فإن احتمال الانتقال سيكون صغيرا كلما كان الفرق بين التواترين كبيرا. ستكون نتيجة الاضطرابات جيدة في هذه الأخيرة بينما تكون صالحة لمدة زمنية صغيرة فقط في حالة التجاوب كما سنرى.

كان هذا تنبها على مفهوم ضعف الاضطراب وشدته وأثرهما على احتمال الانتقال الذي يعتبر المقدار الرئيسي الذي سنقوم بحسابه بالنسبة لكلا نوعي الاضطراب الذين ننوي دراستهما هنا، أي الاضطراب الثابت والاهتزازي الجيبي.

بالنسبة للاضطراب الثابت V ، من الواضح أنه غير متعلق بالزمن، ففي هذه الحالة، يمكن أن نطبق نظرية الاضطرابات المستقرة التي درسناها في الفصل السابق للبحث عن الحالات المستقرة للجملة والتي نجدها معدلة بسبب تطبيق هذا الاضطراب الثابت الذي يحافظ على الطبيعة المستقرة للحالات الذاتية لهاملتوني الجملة الجديد H . أي أن الحالات المستقرة الأصلية التي كانت تمثلها الأشعة الذاتية لهاملتوني المستقر H_0 تغيرت بسبب حدوث الاضطراب للجملة لتصبح موصوفة بمجموعة الأشعة الذاتية لهاملتوني الكلي H ، والتي تبقى كذلك (أي تبقى طبيعتها مستقرة) مادام هذا الاضطراب موجودا وثابتا حتى لحظة زواله⁶. هذا يعني أنه إذا كانت الحالة الابتدائية (بعد تطبيق الاضطراب) ممثلة بشعاع ذاتي لهاملتوني الكلي H ، فإنها ستبقى حالة ذاتية له طول مدة تطبيق الاضطراب مصحوبة بمعامل طور كلي⁷ مضروب في شعاع الحالة المرافق لها، وهذا لا يؤثر طبعا على

⁴ إن قولنا احتمال كبير أو صغير يُنسب طبعا لقيمته العظمى 1. فكبير جدا مثلا يعني بها أن قيمة الاحتمال قريبة جدا من 1. بينما نقصد بانتقال أكيد أن احتمالها يساوي 1 تماما، على الأقل في لحظة معينة إن هذا الاحتمال متعلقا بالزمن.

⁵ أي يحقق متراجحة مثل (2-6).

⁶ إن كان مصدره خارجيا. سنتعامل فيما سيأتي مع هذا النوع من الاضطرابات، لأن الاضطرابات الداخلية تجري بها تصحيحات على أشعة الحالة والمستويات الطاقوية للجملة فقط.

⁷ نقصد المعامل $e^{-iE_n(t-t_0)/\hbar}$ الناشئ عن التطور الزمني لحالة الجملة ابتداء من اللحظة t_0 .

المضمون الفيزيائي لشعاع الحالة المذكور. لكن إن كانت الحالة الابتدائية هي إحدى الحالات الذاتية للهاملتوني المستقر H_0 . ولتكن $|i\rangle$ مثلا، فإن الجملة ستتطور حتما مع الزمن وفقا لمعادلة شرودينغر التي يحكمها الآن الهاملتوني الكلي. وبالتالي فإن الجملة ستغير من حالتها الكمومية لأن الحالة الابتدائية $|i\rangle$ ليست حالة ذاتية للهاملتوني الكلي. ما نود معرفته الآن، هو احتمال أن تغير الجملة، أثناء تطورها الذي يحكمه H ، من حالتها $|i\rangle$ إلى حالة نهائية $|f\rangle$ تكون أيضا حالة ذاتية للهاملتوني H_0 . أي احتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$. إن القيمة الكبيرة التي يأخذها احتمال الانتقال هذا بين الحالات المنحلة، كما ذكرناه في الفقرات السابقة، يعود في الحقيقة إلى أن الطاقة الكلية للجملة تبقى محفوظة في حالة الاضطراب الثابت، فإن كان هذا الاضطراب ضعيفا فإن طاقة الحالة الابتدائية تعتبر بتقريب جيد هي الطاقة الكلية مع تقريب δE نحدده فيما بعد ولذلك تكون طاقة الحالة النهائية المفصلة بالانتقال إليها مساوية تقريبا لطاقة الحالة الابتدائية. إن إدراج دراسة احتمال الانتقال بالنسبة للاضطراب الثابت ضمن درس نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن يأتي من ناحية كون احتمال الانتقال متعلقا بالمدة الزمنية لتطبيق الاضطراب عكس الطبيعة الثابتة لهذا الأخير. في الواقع، لا بد أن تكون هناك مدة زمنية بين لحظة تطبيق الاضطراب ولحظة إغائه وطول هذه المدة وقصرها له تأثيره على الجانب الديناميكي للجملة وبالتالي على احتمال الانتقال.

فلو عدنا، للتبسيط، إلى حالة الجملة ذات المستويين (E_1, E_2) وافترضنا أنها في الزمن السابق للحظة تطبيق الاضطراب كانت في الحالة الابتدائية ذات الطاقة E_1 فستبقى في هذه الحالة إلى حين لحظة تشغيل الاضطراب الذي سيحدث تواجا بين حالي الجملة. ضعف هذا التزاوج وقوته يعتمدان على الفرق بين المستويين الطاقويين للجملة بشكل أساسي. وفي كلتا الحالتين فإن الحالة العامة للجملة أثناء تطورها الديناميكي ستكون عبارة عن تركيب خطي من حالتها. فإن كان المستويان قريبان جدا من بعضهما، فستصل الجملة بعد مدة زمنية لأن تكون في الحالة ذات المستوى E_2 . فإن أبقينا على الاضطراب مشتغلا فإنها ستعيد فيما بعد مسارها الديناميكي للعودة إلى حالتها الابتدائية تحت تأثير التزاوج بين الحالات بسبب الاضطراب وهكذا. لذلك يكون احتمال الانتقال متعلقا بالزمن. وعلى كل حال سنرى العبارة التحليلية له التي توضح ذلك.

أما بالنسبة للحالة التي يكون فيها الاضطراب $V(t)$ متعلقا بالزمن، فإن وجوده يسبب تغيرا في حالة الجملة في كل لحظة وبالتالي تتوقف الحالات المستقرة للجملة عن كونها كذلك (أي عن كونها مستقرة) لأنها لن تكون أشعة ذاتية للهاملتوني الكلي $H(t)$ في كل لحظة. في الحقيقة، إن الهاملتوني الكلي لن يكون ثابت حركة⁸ في هذه الحالة، وبالتالي فإن أشعة حالته الذاتية ستتغير مع الزمن خلال المدة التي تخضع فيها الجملة لهذا الاضطراب المتطور مع الزمن. وسنلاحظ هنا أيضا أن انتقال الجملة من حالة كمومية إلى أخرى يستتبعه تغير في طاقتها وهو ما يدعونا إلى البحث عن احتمال حدوث هاته الانتقالات بين الحالات الكمومية المختلفة ذات المستويات الطاقوية المختلفة وعلاقته بطبيعة الاضطراب $V(t)$. ولمعالجة هذه الحالة الثانية والحالة السابقة فإننا نلجأ إلى استعمال ما يسمى بنظرية الاضطراب المتعلق بالزمن من أجل إيجاد الحلول التقريبية لمعادلة شرودينغر. وهذا هو موضوع هذا الفصل.

إن الاضطراب المتعلق بالزمن يمكن أن يكون سببه مثلا حقلا كهرومغناطيسيا خارجيا مطبقا على الجملة الكمومية، مثل نواة أو ذرة أو جزئي أو أيون، وفي هذه الحالة يكون هذا الاضطراب اهتزازيا جيبيًا. إن مثل هذه الحقول الكهرومغناطيسية التي يمكن التحكم فيها من مصادرها بتغيير الترددات المختلفة للموجات المرسله لسبر الجملة وتجاوباتها تُستعمل عادة للدراسة التجريبية لخصائص المستويات الطاقوية للذرات وغيرها. فسنرى عند معالجة هذا النوع من الاضطرابات الجيبية كيف يمكن تفسير ظاهرة امتصاص وإصدار الفوتونات من طرف هاته الجمل الكمومية المختلفة عند حالة التجاوب. فبوجود هذه الحقول الكهرومغناطيسية⁹ الذي يكون تواتر فوتوناته مساويا أو قريبا من قيمة الفرق بين مستويين طاقيين للذرة، فسيمكن لهذه الأخيرة أن تمتص فوتونا من هذا الحقل لتنتقل إلى حالة مثالة. كما يمكن أن تُزَال هذه الإثارة بواسطة تفاعلها مع نفس الحقل، غير أنها هذه المرة تصدر فوتونا يكتسبه الحقل (يسمى هذا بالإصدار المحثوث). في الحقيقة، إن معرفة ذلك تتم طبعا بدراسة وتحليل أطيف الامتصاص والإصدار¹⁰. يمكن أيضا أن يكون مصدر الاضطراب حقلا كهربائيا أو مغناطيسيا متعلقان بالزمن أو ثابتان، أو يمكن أن يكون مصدره جسيما مشحونا يمر بجوار الذرة فيحدث لها إثارة بواسطة الحقل الناتج عن حركته. وكل هاته الأمثلة يمكن معالجتها في إطار النظرية التي سنقدمها في هذا الفصل والتي ستكون

⁸ لأنه لن يحقق خاصية ثوابت الحركة. لدينا في هذه الحالة $\frac{d}{dt} \langle H(t) \rangle = \langle \frac{\partial H(t)}{\partial t} \rangle \neq 0$

⁹ والتي يمكن جعلها أحادية اللون بتقريب جيد مثل موجات الليزر. أي أن الفوتونات ذات طاقة محددة جيدا. طبعا في حدود الأخطاء التجريبية، فنقول أن تواتراتها محصورة بين v و $v + \delta v$.

¹⁰ إن هذه الاضطرابات المُحدثة على الجملة هي مثال عفا نسيمه عملية القياس في ميكانيك الكم، ومن الواضح هنا تأثيرها على الحالة الكمومية للجملة المدروسة.

لها نتائج بالغة الأهمية في دراسة التفاعل بين الإشعاع والمادة بصفة عامة.

2. توضيح صورة مسألة

إننا نفترض عند عرضنا لهاته النظرية أن مسألة القيم الذاتية للهاملتوني المستقر محلولة، تماما كما افترضنا ذلك في نظرية الاضطرابات المستقرة في الفصل السابق، أي أن للمعادلة

$$(3-6) \quad H_0 |n\rangle = E_n^0 |n\rangle$$

حلول E_n^0 و $|n\rangle$ معلومة. سنفرض أن طيف الهاملتوني متقطع للتبسيط، ولكن الدراسة نفسها القادمة هي نفسها سواء كان طيفه متصلا أو جزء منه متصل وجزؤه الآخر منفصل. بالإضافة إلى ذلك، يمكن أن تكون القيم الذاتية E_n^0 منحلة، وفي هذه الحالة يجب علينا أن نضيف دليلا آخر إلى العدد الكمي n حتى نميز بين أشعة الحالات المختلفة $|n\rangle$ المنتمية لنفس المستوى الطاقوي E_n^0 . سيكون من السهل فعل ذلك كأن نكتب مثلا $|n, \beta\rangle$ لنشير إلى جميع الأشعة المنتمية للمستوى E_n^0 سواء كان انحلاله متقطعا أو متصلا. ونكتب شرط التعمد كما يلي

$$(4-6) \quad \langle n', \beta' | n, \beta \rangle = \delta_{nn'} \delta_{\beta\beta'}$$

ولكن سنفضل العمل حاليا بالكتابة $|n\rangle$ فقط، إلا إن أشرنا إلى غير ذلك. لنفرض الآن أن الحالة الابتدائية للجملية المحكوم تطورها بالهاملتوني المستقر H_0 موصوفة بأحد أشعة الحالة المستقرة $|n\rangle$ في اللحظة t_0 . إن هذه الحالة ستبقى كذلك طول الوقت طالما لم يحدث أي اضطراب للجملية، أي أن تطورها عبر الزمن لن يكون مختلفا عن الحالة الابتدائية إلا بمعامل طور ديناميكي ليس له أي تأثير على المضمون الفيزيائي الذي يحتويه شعاع الحالة الأصلي. لدينا

$$(5-6) \quad |\psi(t)\rangle = e^{-iE_n^0(t-t_0)/\hbar} |n\rangle$$

وبالتالي سيكون احتمال الانتقال « transition probability » إلى حالة أخرى معدوما لأنه يكون لدينا حسب (4-6) و (5-6) النتيجة

$$(6-6) \quad \mathcal{P}_{n \rightarrow n'}(t) = |\langle n' | \psi(t) \rangle|^2 = |e^{-iE_n^0(t-t_0)/\hbar} \langle n' | n \rangle|^2 = 0$$

لنفترض الان أننا في اللحظة t_0 قمنا بتطبيق اضطراب $V(t)$ متعلق بالزمن على الجملية المدروسة خلال فترة معينة $(\tau - t_0)$ ، أي

$$(7-6) \quad V(t) = \begin{cases} V(t) & \text{إذا كان } t_0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{إذا كان } t < t_0 \text{ أو } t > \tau \end{cases}$$

فسيكون الهاملتوني الكلي إذن عبارة عن مجموع H_0 و $V(t)$ كما في العبارة (1-6) وذلك خلال مدة تطبيق هذا الاضطراب. وفي هذه الحالة لن تكون الأشعة $|n\rangle$ أشعة ذاتية للهاملتوني الكلي كما ذكرنا سابقا. وبالتالي فإن كانت الحالة الابتدائية للجملية موصوفة بأحد الأشعة الذاتية للهاملتوني المستقر H_0 ، وليكن مثلا شعاع الحالة الابتدائي $|i\rangle$ ، فلا شك أنها ستتطور خلال الزمن وفقا للهاملتوني الكلي $H(t)$ الذي يحكم معادلة شرودينغر الزمنية بحيث ستختلف تماما عن الحالة الابتدائية، لأن الشعاع $|i\rangle$ لم يعد يمثل حالة مستقرة بعد إدخال الاضطراب. أي لم يعد يكفينا ضربه بمعامل طور فقط كما فعلنا في حالة الهاملتوني المستقر. بل يجب حل معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن من أجل معرفة هذا التطور في حالة الجملية والتي ستكون موصوفة بالشعاع $|\psi(t)\rangle$ في كل لحظة t تالية للحظة الابتدائية. أي يجب حل المعادلة المتعلقة بالزمن

$$(8-6) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = H(t) |\psi(t)\rangle = (H_0 + V(t)) |\psi(t)\rangle$$

فإن اعتبرنا أن الحالة الابتدائية كانت موصوفة بالشعاع $|i\rangle$ ، فإنه يجب أن نرفق بهذه المعادلة الشرط التالي

$$(9-6) \quad |\psi(t_0)\rangle = |i\rangle$$

وللتأكيد على ضعف الاضطراب $V(t)$ بالمقارنة مع الهاملتوني غير المضطرب H_0 ندخل عادة وسيطا λ (عددا حقيقيا) بحيث يكون

$$(10-6) \quad V(t) = \lambda W(t); \lambda \ll 1$$

أين نعتبر أن العناصر المصفوفية للاضطراب $W(t)$ من نفس رتبة القيم الذاتية للهاملتوني H_0 . إن معرفة الحلول $|\psi(t)\rangle$ تتيح لنا دراسة تطور

الخصائص المختلفة للجلمة خلال الزمن. فيمكن مثلا أن نحسب احتمال تغير حالة الجلمة من حالة كمومية إلى أخرى عند لحظة معينة t ، ولتكن مثلا هذه الحالة الأخرى، التي نسميها الحالة النهائية، هي إحدى الحالات الذاتية للهاملتوني المستقر H_0 والتي نرمز لها $|f\rangle$. لاشك طبعاً أن هذه الحالة النهائية $|f\rangle$ مختلفة عن الحالة الابتدائية $|i\rangle$ بحكم أن هذه الأخيرة غير مستقرة. إن احتمال هذا العبور « transion » كدالة متعلقة بالزمن يعطى بالعبارة

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = |\langle f | \psi(t) \rangle|^2 \quad (11-6)$$

وذلك وفقاً لمسلمات ميكانيك الكم. في الحقيقة، إن أحد أهم الأمور الأساسية التي نود أن نجيب عنها باستعمال نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن هي نتيجة هذا الاحتمال (11-6). نذكر مرة أخرى أن تغير الحالة الكمومية للجلمة من الحالة $|i\rangle$ إلى الحالة $|f\rangle$ يرافقه عموماً تغير في طاقة الجلمة من E_i^0 إلى E_f^0 إن تركنا الاضطراب يحدث بصورة متعلقة بالزمن لمدة كافية¹¹. لكن يمكن في المقابل أيضاً أن يحدث تغير في حالة الجلمة دون حدوث تغير في طاقتها أو حدوث تغير طفيف وذلك حين يكون هذا الاضطراب ثابتاً خلال المدة الزمنية $(\tau - t_0)$ بشرط أن تكون، على الترتيب، قيمة المستوى الطاقوي الابتدائي منحلة. أي $E_i^0 = E_f^0$ ، أو تكون قريبة من قيمة المستوى الطاقوي النهائي وذلك كأن يحدث انتقال إلى طيف مستمر بجوار القيمة الابتدائية E_i^0 مثلاً.

إن البحث عن قيمة الاحتمال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ يمكن مقارنته باستعمال طريقتين. الأولى تكمن في البحث عن أشعة الحالة $|\psi(t)\rangle$ التي هي حلول للمعادلة (8-6). لكن هذه الأخيرة لا تملك حلولاً دقيقة بصفة عامة، ماعداً بعض الحالات النموذجية¹². وبالتالي نلجأ إلى البحث عن معاملات نشر الشعاع $|\psi(t)\rangle$ الذي نكتبه على شكل تركيب خطي من أشعة القاعدة المكونة من الأشعة الذاتية $\{|n\rangle\}$ للهاملتوني المستقر H_0 بحيث تكون معاملات النشر هذه متعلقة بالزمن. أي نبحث عن الحلول $|\psi(t)\rangle$ بحيث يكون

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n(t) e^{-iE_n^0(t-t_0)/\hbar} |n\rangle \quad (12-6)$$

ثم يتم إدراجها في المعادلة (8-6) من أجل استخراج المعادلات التفاضلية المرتبطة للمعاملات $C_n(t)$ والتي يتم البحث عن حلولها بواسطة نشر كل معامل من هاته المعاملات على شكل سلسلة قوى للوسيط λ . أي

$$C_n(t) = c_n^{(0)}(t) + \lambda c_n^{(1)}(t) + \lambda^2 c_n^{(2)}(t) + \dots = C_n^{(0)}(t) + C_n^{(1)}(t) + C_n^{(2)}(t) + \dots \quad (13-6)$$

أين وضعنا حد النشر من الرتبة m بحيث يكون

$$C_n^{(m)}(t) = \lambda^m c_n^{(m)}(t) \quad (14-6)$$

سيكون الاحتمال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ حسب (11-6) و (12-6) و (13-6) هو إذن

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = |C_f(t)|^2 = |C_f^{(0)}(t) + C_f^{(1)}(t) + C_f^{(2)}(t) + \dots|^2 \quad (15-6)$$

ثم نحفظ بالتقريب من الرتبة الأولى للوسيط λ لحساب هذا الاحتمال والذي يكون كافياً في أغلب الحالات. تسمى هذه الطريقة بطريقة تحريك الثوابت كما تسمى طريقة ديراك. في المقابل، تعتمد الطريقة الثانية على استعمال مؤثر التطور الزمني $U(t, t_0)$ لأننا نهتم في الحقيقة بالبحث عن قيمة الاحتمال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ المعطى بالعلاقة (11-6) أكثر من شكل الحلول $|\psi(t)\rangle$. في الحقيقة، إذا كانت الحالة الابتدائية للجلمة في اللحظة t_0 موصوفة بالشعاع الذاتي $|i\rangle$ فإن تطور شعاع الحالة مع الزمن $|\psi(t)\rangle$ ليس إلا

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|i\rangle \quad (16-6)$$

وعندئذ سيكتب احتمال الانتقال من الحالة الابتدائية $|i\rangle$ إلى الحالة النهائية $|f\rangle$ ، طبقاً للعلاقتين (11-6) و (16-6)، كما يلي

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = |\langle f | U(t, t_0) | i \rangle|^2 \quad (17-6)$$

¹¹ سنحددها في الشروط اللازمة لصلاحيّة التقريبات التي سنقوم بها في إطار هذه النظرية.

¹² مثل خضوع هزاز توافقي إلى حقل كهربائي متعلق بالزمن أو سبين 1/2 خاضع لاضطراب جيبي.

لاشك أن عملية البحث عن المؤثر $U(t, t_0)$ تخضع أيضا لتقريبات في إطار نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن، تماما مثل عملية البحث عن معاملات النشر $c_n(t)$ في (6-13).

ستتبع في هذا الفصل الطريقة الثانية المرتكزة على دراسة مؤثر التطور الزمني $U(t, t_0)$. ولذلك سنقدم أولا بعض خصائصه ثم كيفية معالجة هذه المسألة في إطار التصور التفاعلي¹³ «the interaction picture» المناسب للمسائل المتعلقة بالزمن، وبعد ذلك نتعرف على النشر الاضطرابي للمؤثر $U(t, t_0)$ والذي يسمى سلسلة دايزن «Dayson series» لنمر بعدها إلى البحث عن نتيجة الاحتمال $P_{i \rightarrow f}(t)$ ومن ثم تطبيقها على حالة الاضطراب الثابت لنستخرج ما يسمى بالقاعدة الذهبية لفيرمي «Fermi golden rule» وكذلك تطبيقها على حالة الاضطرابات الجيبية و مناقشة علاقة الارتباب الرابعة لهايزنبارغ " طاقة - زمن".

3. مؤثر التطور الزمني $U(t, t_0)$

إن مؤثر التطور الزمني هو تحويل خطي يسمح بالمرور من الحالة الابتدائية $|\psi(t_0)\rangle$ إلى الحالة في أي لحظة زمنية t التي يمثلها الشعاع $|\psi(t)\rangle$ ، ونكتب

$$(18-6) \quad |\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

ويسمى كذلك بالناشر propagator. كما لدينا الشرط الابتدائي التالي

$$(19-6) \quad |\psi(t = t_0)\rangle = |\psi(t_0)\rangle$$

فإن اخترنا اللحظة الابتدائية ($t_0 = 0$) سنكتب

$$(20-6) \quad U(t, t_0 = 0) = U(t)$$

يمكن أن نستنتج مباشرة من (6-18) و (6-19) أنه يكون في اللحظة الابتدائية

$$(21-6) \quad U(t_0, t_0) = I$$

حيث I هو مؤثر الوحدة (أو المطابقة identity). إن التطور الزمني $|\psi(t)\rangle$ لحالة جملة هاملتونيا $H(t)$ تحكمه معادلة شرودينغر، فإن قمنا بتعويض $|\psi(t)\rangle$ بالعبارة (6-18) في المعادلة (6-8) نتحصل على المعادلة الخاصة بتغير مؤثر التطور

$$(22-6) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) = H(t)U(t, t_0)$$

ومع الشرط (6-21) تكون هذه المعادلة الخاصة بالمؤثر $U(t, t_0)$ مكافئة لمعادلة شرودينغر (6-8) الخاصة بالشعاع $|\psi(t)\rangle$ مع الشرط الابتدائي (6-19). ويمكن أن نكتب $U(t, t_0)$ على شكل المعادلة التكاملية التالية¹⁴

$$(23-6) \quad U(t, t_0) = I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t')U(t', t_0) dt'$$

¹³ والذي يسمى أيضا التصور الوسطي «Intermediate picture» وينسب هذا التصور لديراك. ويطلق عليه أيضا اسم التمثيل التفاعلي أو التمثيل الوسطي. وهو تمثيل يجمع بين تصور شرودينغر وتصور هايزنبارغ كما ذكرنا في الفصل الأول حول مسلمات ميكانيك الكم.

¹⁴ يجب أن ننتبه إلى أن الحل الذي يخطر في الذهن للوهلة الأولى والذي نكتبه

$$U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t H(t') dt'}$$

هو حل خاطئ عموما، لأننا إن قمنا باشتقاق هذه الحل من جديد لن نعود إلى نفس المعادلة (6-22)، أي

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U(t, t_0) \neq H(t)U(t, t_0)$$

وذلك بسبب أننا نعلم أن الاشتقاق التالي $\frac{d}{dt} e^{F(t)} = \frac{dF(t)}{dt} e^{F(t)}$ ليس صالحا دائما إلا إذا كان $\left[\frac{dF(t)}{dt}, F(t) \right] = 0$.

لا يمكن عموماً إيجاد حلول دقيقة للمعادلة التكاملية (23-6) من أجل الجمل التي لها هاملتوني متعلق بالزمن. فبالنسبة لمسائل الاضطراب المتعلقة بالزمن التي نهتم بها هنا سنلجأ فيما بعد إلى نشر هذه المعادلة إلى سلسلة قوى في الوسيط λ ونحتفظ بالرتبة الأولى لهذا الوسيط في هذا النشر كما سنرى. لكن إن كان الهاملتوني غير متعلق بالزمن، أي ثابت حركة وهي حالة الجمل المحافظة، فإنه يمكن إيجاد عبارة $U(t, t_0)$ بسهولة بالقيام بتكامل المعادلة (22-6) فنجد

$$(24-6) \quad U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H(t-t_0)}$$

وهو يمثل مؤثر الانسحاب الزمني في هذه الحالة. إن مؤثر التطور يسمح بمعرفة تطور شعاع الحالة بين لحظتين معينتين، ولذلك فإنه إذا كانت (t_1, t_2, t_3) ثلاث لحظات كيفية فإننا نكتب من جهة

$$(25-6) \quad |\psi(t_3)\rangle = U(t_3, t_1)|\psi(t_1)\rangle$$

كما يمكن أن نكتب من جهة أخرى أيضاً

$$(26-6) \quad \begin{cases} |\psi(t_2)\rangle = U(t_2, t_1)|\psi(t_1)\rangle \\ |\psi(t_3)\rangle = U(t_3, t_2)|\psi(t_2)\rangle \end{cases} \Rightarrow |\psi(t_3)\rangle = U(t_3, t_2)U(t_2, t_1)|\psi(t_1)\rangle$$

وبمقارنة (25-6) و (26-6) نستنتج أن

$$(27-6) \quad U(t_3, t_1) = U(t_3, t_2)U(t_2, t_1)$$

والتي يمكن تعميمها لتصبح

$$(28-6) \quad U(t_n, t_1) = U(t_n, t_{n-1}) \dots U(t_3, t_2)U(t_2, t_1)$$

فإذا أخذنا $(t_3 = t_1)$ فإننا نتحصل حسب (21-6) و (27-6) على النتيجة

$$(29-6) \quad I = U(t_1, t_2)U(t_2, t_1) \Rightarrow U(t_2, t_1) = U^{-1}(t_1, t_2)$$

بما أن المؤثر الهاملتوني $H(t)$ هرميتي، فلاشك أن طولية شعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ محفوظة أثناء التطور الزمني لحالة الجملة. أي

$$(30-6) \quad \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

ولكن لدينا حسب التعريف (18-6)

$$(31-6) \quad \langle\psi(t)|\psi(t)\rangle = \langle\psi(t_0)|U^+(t, t_0)U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

فنستنتج بمقارنتهما إذن أن

$$(32-6) \quad U^+(t, t_0)U(t, t_0) = I$$

وبالتالي فإن مؤثر التطور هو مؤثر واحد unitary operator. كما يمكن أن نكتب بالاعتماد على (29-6)

$$(33-6) \quad U^+(t, t_0) = U^{-1}(t, t_0) = U(t_0, t)$$

إن واحدية مؤثر التطور يمكن إثباتها أيضاً باستخراج عبارة مؤثر التطور الزمني لا متناهي الصغر التي نكتبها كما يلي

$$(34-6) \quad U(t + dt, t) = I - \frac{i}{\hbar}H(t)dt$$

والتي نستطيع أن نرى أنها تحقق (32-6) لأن الهاملتوني $H(t)$ هرميتي. وبما أننا نستطيع إنشاء مؤثر التطور الكلي $U(t, t_0)$ بواسطة جداء المؤثرات الواحدية لامتناهية الصغر $U(t + dt, t)$ الناتجة عن تقسيم المجال الزمني $[t_0, t]$ إلى مجالات لامتناهية الصغر. فإنه يمكن إثبات أن مؤثر التطور هو مؤثر واحد.

4. التصور التفاعلي لتطور جملة كمومية - تصور ديراك

نعلم أن التحويلات الواحدية تسمح بالانتقال من تمثيل إلى آخر للمؤثرات وأشعة الحالة الخاصة بجملة كمومية. فإذا كان T هو تحويل واحد، فإن أشعة الحالة $|\psi\rangle$ يتم تحويلها إلى أشعة أخرى $|\tilde{\psi}\rangle$ حيث

$$(35-6) \quad (|\tilde{\psi}\rangle = T|\psi\rangle) \Leftrightarrow (|\psi\rangle = T^+|\tilde{\psi}\rangle) \Rightarrow (\langle\tilde{\psi}|\tilde{\psi}\rangle = \langle\psi|\psi\rangle)$$

ونكون بذلك انتقلنا من تمثيل إلى آخر بتحويل أشعة القاعدة للتمثيل الأول إلى أشعة قاعدة التمثيل الثاني بواسطة التحويل الواحد T الذي يحافظ طبعاً على طولية الأشعة كما ذكرنا سابقاً. بينما يتم تحويل المؤثرات A بحيث تبقى القيمة المتوسطة لها بين أي شعاعي حالة هي نفسها في كلا التمثيلين ونكتب

$$(36-6) \quad (\langle\tilde{\psi}|\tilde{A}|\tilde{\psi}\rangle = \langle\psi|A|\psi\rangle) \Rightarrow (\tilde{A} = TAT^+) \Leftrightarrow (A = T^+\tilde{A}T)$$

وبناء على هذا، فلنعلم أن هناك تصورات (تمثيلات) مختلفة لوصف الديناميك الكمومي، أي وصف تطور شعاع الحالة والملاحظات الخاصة بجملة كمومية ما. فتصوّر شرودينغر للوصف الديناميكي الكمومي يقوم على اعتبار أن التطور الزمني لحالة الجملة ينحصر في تعلق تغير أشعة الحالة $|\psi\rangle$ بزمن التطور فقط، لذلك نكتب أشعة الحالة مرفقة بوسيط الزمن t ، أي $|\psi(t)\rangle$ ، بينما يتم اعتبار الملاحظات على أنها مستقلة عن الزمن. ويحكم معادلات الحركة في هذا التمثيل معادلة شرودينغر المتعلقة بالزمن. وهذا التمثيل هو الأكثر استعمالاً في ميكانيك الكم. في المقابل، هناك تصوّر هايزنبرغ القائم على اعتبار أن التطور الزمني لحالة الجملة يكون مُتَضَمِّناً في التعلق الزمني للملاحظات بينما تبقى أشعة الحالة ثابتة. ويحكم تطور الجملة في هذا التمثيل معادلات الحركة الخاصة به ولكنها أقل استعمالاً من نظيرتها الأولى. ويربط بين هذين التصورين تحويل أحادي يسمح بالمرور من أحدهما إلى الآخر، وبالتالي فهما تصوران متكافئان كما أثبت ذلك ديراك من بعد. لكن هناك أيضاً تصوّر وسطي بينهما، يسمى التصوّر (التمثيل) التفاعلي، أو تصوّر ديراك، لأنه يدمج بين تصوّر شرودينغر وهايزنبرغ لوصف تطور حالة الجملة في ميكانيك الكم. إن هذا التصوّر الذي أسسه ديراك يقوم على استعمال مؤثر التطور الزمني للانتقال من تمثيل شرودينغر إلى هذا التمثيل الجديد الذي يصير فيه كلُّ من شعاع الحالة والملاحظات الخاصة بالجملة المدروسة متعلقة بالزمن، ولذلك نسميه تصوّراً وسطياً. وهذا التمثيل يستعمل بكثرة لمعالجة المسائل المتعلقة بالزمن، مثل تلك التي يكون فيها الهاملتوني يكتب على الشكل (1-6). فإن رمزنا لشعاع الحالة في هذا التمثيل التفاعلي بالكتابة $|\psi\rangle_I$ فإن علاقته بشعاع الحالة في تمثيل شرودينغر تعطى بالتحويل الواحد¹⁵

¹⁵ لا بد أن نشير هنا إلى أن هناك أيضاً من يعتبر علاقة التحويل الواحد بين أشعة الحالة لهذين التمثيلين تكتب بواسطة مؤثر التطور كما يلي

$$|\psi(t)\rangle_I = U^{(0)+}(t, t_0)|\psi(t)\rangle = e^{\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_0)}|\psi(t)\rangle \dots \dots (1)$$

حيث تشير الإضافة (0) أعلى الحرف $U^{(0)}$ إلى عبارته عند عدم اعتبار تأثير الاضطراب (أو في حالة غيابه)، وهي التي سنسميها التصحيح من الرتبة صفر للتقريب الذي سنقوم به في إطار نظرية الاضطراب المتعلق بالزمن كما سنرى فيما سيأتي من الدرس. بينما يتم تحويل الملاحظات A حسب (36-6)، أي في النهاية حسب الاختيار (1) للتحويل الواحد $(T = U^{(0)+}(t, t_0))$ ، كما يلي

$$A_I(t) = U^{(0)+}(t, t_0)AU^{(0)}(t, t_0) = e^{\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_0)}Ae^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_0)} \dots \dots (2)$$

صحيح أن هذين التحويلين البديلين (1) و (2) يؤولان إلى التحويلين اللذين تبنيانها في العلاقات (37-6) و (38-6) من أجل $(t_0 = 0)$ ، لكن الأمر في الحقيقة ليس إلزامياً، فالتعريفات التي قدمناها في النص لا تعتبر اللحظة الابتدائية معدومة بالضرورة. لأننا إذا افترضنا فعلاً أن اللحظة t_0 غير معدومة وكانت الحالة الابتدائية موصوفة في تمثيل شرودينغر بالشعاع $|\psi(t_0)\rangle$ فإنها ستكون في هذه الحالة موصوفة بالشعاع $|\psi(t_0)\rangle_I = \exp(it_0H_0/\hbar)|\psi(t_0)\rangle$ في تمثيل التفاعل، كما نرى في العلاقة (39-6)، وليس كما توحى به هنا العلاقة (1) من تطابقهما في اللحظة الابتدائية بسبب هذا التحويل البديل، أي أنه حسب (1) لدينا $|\psi(t_0)\rangle_I = |\psi(t_0)\rangle$ سواء اعتبرنا لحظة البداية معدومة أو غير معدومة. فرغم أن الاختلاف بينهما هو معامل طور كلي، $\exp(it_0H_0/\hbar)$ ، ناتج عن اختيار لحظة البداية $(t_0 \neq 0)$ بدلا من كونها صفراً، إلا أنه يؤثر على بقية الحسابات إن لم نأخذ هذا المعامل الطوري في الحسبان، لأنه مرتبط في واقع الأمر بحقيقة أننا سنجد، من جهة أخرى، أن هناك اختلافاً أيضاً عند المقارنة بين التحويلين الخاصين بالملاحظات A و $A_I(t)$ في اللحظة الابتدائية t_0 كما يمكن ملاحظة ذلك من (39-6) و (2) (ماعداً في الحالة الخاصة التي تكون فيها الملاحظة A التي نهتم بدراستها متبادلة مع الهاملتوني المستقر H_0 ، وبالتالي تبقى صامدة في كلا هذين التحويلين، وعندئذ لا تحتاج للعمل في إطار التمثيل التفاعلي. للتوضيح أكثر أنظر الهامش 11 أسفله). وعلى كل حال، فإننا ننبه إلى أن كلا التحويلين في النص والهامش يؤديان إلى نفس النتائج في النهاية لأن كلاهما تحويل واحد وأن الفرق بينهما مجرد اختلاف في تبني أحد التحويلين لدراسة الجملة في التمثيل التفاعلي. ولكننا نؤكد من ناحية ثانية إلى أنه عند اختيار تحويل واحد ما لشعاع الحالة فيجب إثباته بنفس التحويل للملاحظات حتى تكون النتائج متناسقة، لأننا رأينا أن العلاقة (36-6) بين الملاحظتين A و \tilde{A} ناتجة عن العلاقة (35-6) المختارة أولاً بين شعاعي الحالة $|\psi\rangle$ و $|\tilde{\psi}\rangle$.

$$(37-6) \quad |\psi(t)\rangle_I = U^{(0)+}(t)|\psi(t)\rangle = e^{\frac{it}{\hbar}H_0}|\psi(t)\rangle$$

بينما يتم تحويل الملاحظات من تمثيل شرودينغر إلى التمثيل التفاعلي كما يلي¹⁶

$$(38-6) \quad A_I(t) = U^{(0)+}(t)AU^{(0)}(t) = e^{\frac{it}{\hbar}H_0}Ae^{-\frac{it}{\hbar}H_0}$$

مع الشروط الابتدائية التالية

$$(39-6) \quad \begin{cases} |\psi(t_0)\rangle_I = e^{\frac{it_0}{\hbar}H_0}|\psi(0)\rangle \\ A_I(t_0) = e^{\frac{it_0}{\hbar}H_0}Ae^{-\frac{it_0}{\hbar}H_0} \end{cases}$$

يمكننا إذن أن نستخرج معادلات الحركة بالاعتماد على هذه التحويلات. فبما أن $|\psi(t)\rangle$ يحقق معادلة شرودينغر (8-6)، فانطلاقاً من (37-6) وباستعمال (8-6) نجد أن

$$(40-6) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = -H_0 e^{\frac{it}{\hbar}H_0} |\psi(t)\rangle + e^{\frac{it}{\hbar}H_0} \overbrace{\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle \right)}{=(H_0+V(t))|\psi(t)\rangle} = e^{\frac{it}{\hbar}H_0} V(t) |\psi(t)\rangle$$

والتي يمكن إعادة كتابتها على شكل معادلة شرودينغر في التمثيل التفاعلي كما يلي

$$(41-6) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle_I = V_I(t) |\psi(t)\rangle_I$$

حيث وضعنا حسب (38-6)

$$(42-6) \quad V_I(t) = e^{\frac{it}{\hbar}H_0} V(t) e^{-\frac{it}{\hbar}H_0}$$

إن المعادلة (41-6) تشير إلى أن تطور شعاع الحالة في التمثيل التفاعلي محكوم بمؤثر التفاعل¹⁷ $V_I(t)$. كما أن اشتقاق المعادلة (38-6) يؤدي إلى المعادلة التي تحكم تطور الملاحظة في هذا التمثيل أيضاً. في الحقيقة سنجد بعد حساب بسيط أن

$$(43-6) \quad \frac{dA_I(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [A_I(t), H_0] + \frac{\partial A_I(t)}{\partial t}$$

وهي تشبه صورياً معادلة التطور الزمني للقيم الوسطية للملاحظات في تمثيل شرودينغر.

¹⁶ لا يجب أن يغتر الطالب فيعتقد أنه يمكن أن يكتب دائماً

$$A_I(t) = e^{\frac{it}{\hbar}H_0} A e^{-\frac{it}{\hbar}H_0} = e^{\frac{it}{\hbar}H_0} e^{-\frac{it}{\hbar}H_0} A = A \dots \dots (3)$$

فهذا لا يكون صحيحاً إلا إذا كان

$$[A, H_0] = 0$$

وهنا لن تكون بنا حاجة لاستعمال تمثيل التفاعل لدراسة المجموعة $\{A, H_0\}$ بالذات كما ذكرنا. بسبب أن التحويل (37-6) الذي سنقوم به في هذه الحالة سيتمثل فقط في ضرب أشعة الحالة بمعامل طور كلي $\exp(itH_0/\hbar)$ لا معنى له في النهاية. لأنه في المقابل ستبقى الملاحظة A التي نهتم بها صامدة تحت هذا التحويل كما نرى سواء من خلال (2) أو (3). سنوضح ذلك أكثر أيضاً عند الحديث عن حالة تبادل مؤثر الاضطراب $V(t)$ مع الهاملتوني المستقر H_0 فيما سيأتي.

¹⁷ كما ذكرنا في الهامش 11 في الصفحة 7، فإنه إذا كان مؤثر الاضطراب متبادلاً مع الهاملتوني فلا ضرورة لاستعمال تمثيل التفاعل لدراسة تأثيره. في الحقيقة، لدينا

$$[V(t), H_0] = 0 \Rightarrow V_I(t) = V(t)$$

وفي هذه الحالة الخاصة سيمكننا تقطير الهاملتوني الكلي $H(t)$. أي البحث عن مستويات طاقة الجملة المدروسة، لأنه يمكننا الآن البحث عن قاعدة مكونة من الأشعة الذاتية المشتركة لمجموعة الملاحظات المتبادلة $\{H_0, V(t)\}$. وبالتالي لا داعي للتفكير في القيام بالتحويل الواحد الخاص بتمثيل التفاعل والذي غرضه تبسيط دراسة المسألة المتعلقة بالزمن في حالة كون الهاملتوني المستقر غير متبادل مع مؤثر الاضطراب المتعلق بالزمن.

5. سلسلة دايرن لمؤثر التطور الزمني $U(t, t_0)$

1.5 معادلة مؤثر التطور في التمثيل التفاعلي

في تمثيل التفاعل، إن كانت الحالة الابتدائية للجملة في اللحظة الابتدائية t_0 ممثلة بالشعاع $|\psi(t_0)\rangle_I$ فإن تطوره خلال الزمن يعطى بالعلاقة

$$(44-6) \quad |\psi(t)\rangle_I = U_I(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle_I$$

حيث $U_I(t, t_0)$ هو مؤثر التطور في هذا التمثيل الوسطي والذي نريد أن نستخرج علاقته بمؤثر التطور في تمثيل شرودينغر، ومن أجل تحقيق ذلك لنفرض من جهة ثانية أن الحالة الابتدائية، لنفس الجملة، في تمثيل شرودينغر تكون موصوفة بالشعاع الابتدائي $|i\rangle = |\psi(t_0)\rangle$. يمكن إذن الربط بين وصفي هذه الحالة الابتدائية في كلا التمثيلين بواسطة التحويل (37-6) ونكتب

$$(45-6) \quad |\psi(t_0)\rangle_I = e^{\frac{it_0 H_0}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle = e^{\frac{it_0 H_0}{\hbar}} |i\rangle$$

إذا علمنا أن تطور شعاع الحالة مع الزمن $|\psi(t)\rangle$ في تمثيل شرودينغر يعطى بواسطة مؤثر التطور $U(t, t_0)$ كما هو مبيّن في العلاقة (18-6) (أو أيضا (16-6))، فيتعويض هذه الأخيرة في العلاقة (37-6) من أجل أي لحظة t لاحقة سنجد أن

$$(46-6) \quad |\psi(t)\rangle_I = e^{\frac{it H_0}{\hbar}} \overbrace{U(t, t_0)|i\rangle}^{|\psi(t)\rangle} = e^{\frac{it H_0}{\hbar}} U(t, t_0) \left(e^{-\frac{it_0 H_0}{\hbar}} e^{\frac{it_0 H_0}{\hbar}} \right) |i\rangle$$

وباستعمال (45-6) نستطيع أن نكتب (46-6) كما يلي

$$(47-6) \quad |\psi(t)\rangle_I = e^{\frac{it H_0}{\hbar}} U(t, t_0) e^{-\frac{it_0 H_0}{\hbar}} |\psi(t_0)\rangle_I$$

وبمقارنة كل من (44-6) و (47-6) نستنتج أن¹⁸

$$(48-6) \quad U_I(t, t_0) = e^{\frac{it H_0}{\hbar}} U(t, t_0) e^{-\frac{it_0 H_0}{\hbar}}$$

والتي نرفق بها الشرط الابتدائي (بالاستعانة بالشرط في تمثيل شرودينغر (21-6))

$$(49-6) \quad U_I(t_0, t_0) = I$$

كما أن معادلة الحركة لمؤثر التطور الزمني $U_I(t, t_0)$ في التمثيل التفاعلي يمكن استخراجها من (41-6). فيتعويض عبارة $|\psi(t)\rangle_I$ المعطاة بالعلاقة (44-6) فيها يكون¹⁹

$$(50-6) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} U_I(t, t_0) = V_I(t) U_I(t, t_0)$$

والتي يمكن مقارنتها بنظيرتها في تمثيل شرودينغر (22-6)، حيث نلاحظ أننا نقصّر هنا في معادلة الحركة (50-6) الخاصة بالتمثيل التفاعلي على الجزء المسؤول عن تفاعل الجملة مع الوسط الخارجي (أو نقول نقصّر على الحد المسؤول عن الاضطراب إن كان هذا الأخير داخليا) الممثل بالمؤثر $V_I(t)$. بينما في تمثيل شرودينغر يكون الهاملتوني الكلي $H(t)$ هو الذي يحكم معادلة الحركة لمؤثر التطور. وكما فعلنا في (23-6)، فإن حل (50-6) سيكون على شكل المعادلة التكاملية

¹⁸ وهنا يجب ملاحظة أن تحويل مؤثر التطور بشكل خاص لا يشبه تحويل الملاحظات الأخرى التي عبارتها العامة معطاة بالعلاقة (38-6)، كما نرى ذلك مثلا بالنسبة لمؤثر الاضطراب $V_I(t)$ المعطى بالمعادلة (42-6) التي نجد فيها نفس اللحظة t في كلا الأُسَيْن. بينما بالنسبة لمؤثر التطور نجد كلا من اللحظة الابتدائية t_0 واللحظة اللاحقة t في الدوال الأسية الموجودة في علاقة التحويل (48-6).

¹⁹ كنا سنصل طبعاً لنفس هذه المعادلة (50-6) لو اعتمدنا اختيار التحويل الواحد الذي ذكرناه في هامش الصفحة 7. أي باختيارنا للتحويل

$$|\psi(t)\rangle_I = \exp[iH_0(t - t_0)/\hbar] |\psi(t)\rangle$$

لكن العلاقة بين مؤثري التطور في التمثيلين المذكورين لن تكون كما في (48-6)، بل ستكون في هذه الحالة كما يلي

$$U_I(t, t_0) = U^{(0)+}(t, t_0) U(t, t_0) = \exp[iH_0(t - t_0)/\hbar] U(t, t_0)$$

$$(51-6) \quad U_I(t, t_0) = I - \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t V_I(t_1) U_I(t_1, t_0) dt_1$$

التي يتم حلها عموما بشكل تقريبي في المسائل المتعلقة بالزمن. في الحقيقة، فباستعمال (10-6) نستطيع كتابتها أيضا على الشكل

$$(52-6) \quad U_I(t, t_0) = I - \frac{i\lambda}{\hbar} \int_{t_0}^t W_I(t_1) U_I(t_1, t_0) dt_1$$

حيث أظهرنا الوسيط $1 \ll \lambda$ حتى نستطيع التفكير بحلول على شكل متسلسلة قوى لهذا الوسيط، أي متسلسلة للاضطراب $V_I(t)$.

2.5 النشر الاضطرابي لمؤثر التطور في التمثيل الفاعلي - سلسلة دايزن

في نظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن يتم حل المعادلة (51-6) (أو بصورة مكافئة المعادلة (52-6)) بالتكرار وذلك بالاعتماد على حقيقة ضعف الاضطراب $V_I(t)$ الذي نفترضه في هذه النظرية. فالنشر إلى سلسلة قوى للوسيط λ يتم بإدراج الحلول $U_I(t, t_0)$ بالتكرار اعتمادا على عبارتها (52-6). في الحقيقة، يمكن كتابة $U_I(t_1, t_0)$ بالاعتماد على شكل المعادلة التكاملية (52-6)

$$(53-6) \quad U_I(t_1, t_0) = I - \frac{i\lambda}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} W_I(t_2) U_I(t_2, t_0) dt_2$$

وبتعويضها من جديد في (52-6) نجد

$$(54-6) \quad U_I(t, t_0) = I - \frac{i\lambda}{\hbar} \int_{t_0}^t W_I(t_1) dt_1 + \left(\frac{i\lambda}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} W_I(t_1) W_I(t_2) U_I(t_2, t_0) dt_2$$

ثم نقوم بتعويض $U_I(t_2, t_0)$ بعبارته التكاملية المناسبة له من الشكل (52-6) وتعويضها في (54-6) وهكذا دواليك حتى نتحصل في النهاية على سلسلة دايزن الاضطرابية التالية

$$(55-6) \quad \begin{aligned} & U_I(t, t_0) \\ &= I - \frac{i\lambda}{\hbar} \int_{t_0}^t W_I(t_1) dt_1 + \left(\frac{i\lambda}{\hbar}\right)^2 \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} W_I(t_1) W_I(t_2) dt_2 + \dots \\ &+ \left(-\frac{i\lambda}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n W_I(t_1) W_I(t_2) W_I(t_3) \dots W_I(t_n) + \dots \end{aligned}$$

والتي يمكن كتابتها بشكل مكثف كما يلي

$$(56-6) \quad U_I(t, t_0) = I + \sum_{n=1}^{\infty} U_I^{(n)}(t, t_0)$$

حيث وضعنا

$$(57-6) \quad U_I^{(n)}(t, t_0) = \left(-\frac{i\lambda}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n W_I(t_1) W_I(t_2) W_I(t_3) \dots W_I(t_n)$$

²⁰ تماما كما لو قلنا النشر إلى سلسلة للاضطراب $V_I(t)$.

يمثل كل واحد من الحدود $U_I^{(n)}(t, t_0)$ رتبة معينة من سلسلة دايژن والتي تمكننا من البحث عن شعاع الحالة للجملية في أي لحظة من خلال (16-6) أو (44-6). ونلاحظ أن الرتبة صفر لهذا النشر تقابل

$$(58-6) \quad U_I^{(0)}(t, t_0) = I$$

3.5 النشر الاضطرابي لمؤثر التطور في تمثيل شرودينغر

يمكننا أن نبحث الآن أيضا إن شئنا عن عبارة مؤثر التطور $U(t, t_0)$ في تمثيل شرودينغر، فحسب (48-6) يمكننا أن نكتب بصورة مقابلة

$$(59-6) \quad U(t, t_0) = e^{-\frac{it}{\hbar}H_0} U_I(t, t_0) e^{\frac{it_0}{\hbar}H_0}$$

وعندئذ فباستعمال (56-6) و (59-6) نجد

$$(60-6) \quad U(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_0)} + \sum_{n=1}^{\infty} U^{(n)}(t, t_0)$$

حيث أن عبارة $U^{(n)}(t, t_0)$ تكون حسب (57-6)

$$(61-6) \quad U^{(n)}(t, t_0) = e^{-\frac{it}{\hbar}H_0} U_I^{(n)}(t, t_0) e^{\frac{it_0}{\hbar}H_0}$$

والتي نكتبها بشكل صريح حسب (57-6) و (61-6)

$$(62-6) \quad U^{(n)}(t, t_0) = \left(-\frac{i\lambda}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n e^{-\frac{it}{\hbar}H_0} W_I(t_1) W_I(t_2) W_I(t_3) \dots W_I(t_n) e^{\frac{it_0}{\hbar}H_0}$$

فإذا أخذنا في الحسبان أنه لدينا حسب (42-6)

$$(63-6) \quad W_I(t_i) = e^{\frac{it_i}{\hbar}H_0} W(t) e^{-\frac{it_i}{\hbar}H_0}$$

فبتعويض هذه الأخيرة في (62-6) نتحصل على

$$(64-6) \quad U^{(n)}(t, t_0) = \left(-\frac{i\lambda}{\hbar}\right)^n \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 \int_{t_0}^{t_2} dt_3 \dots \int_{t_0}^{t_{n-1}} dt_n e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_1)} W(t_1) e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t_1-t_2)} W(t_2) e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t_2-t_3)} W(t_3) \dots \times \dots e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t_{n-1}-t_n)} W(t_n) e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t_n-t_0)}$$

إن السلسلتين (56-6) و (60-6) هما سلسلتا نشر لقوى الاضطراب الحادث للجملية (وبشكل مكافئ نقول سلسلة قوى للوسيط λ). إن تقاربهما يكون

سريعا كلما كان الاضطراب ضعيفا، أي كلما كان الاختلاف بين $U(t, t_0)$ و $U^{(0)}(t, t_0)$ صغيرا، حيث

$$(65-6) \quad U^{(0)}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_0)}$$

الذي يمثل الرتبة صفر للنشر (60-6). بينما الرتبة الأولى لهذا النشر ستحتوي على الحد $U^{(1)}(t, t_0)$ ، بالإضافة إلى حد الرتبة صفر طبعاً، حيث

$$(66-6) \quad U^{(1)}(t, t_0) = -\frac{i\lambda}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_1)} W(t_1) e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t_1-t_0)}$$

إن نظرية الاضطراب المتعلق بالزمن تعتمد على سلسلة النشر لمؤثر التطور الزمني لحساب احتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ من حالة ذاتية ابتدائية للماهملتوني المستقر إلى حالة ذاتية أخرى نهائية بحيث أننا نكتفي بالتعامل مع هذه السلسلة اللانهائية بشكل تقريبي فيكون التصحيح من الرتبة صفر لهذا التقريب هو $U^{(0)}(t, t_0)$ بينما تصحيح التقريب من الرتبة الأولى هو مجموع كل من $U^{(0)}(t, t_0)$ و $U^{(1)}(t, t_0)$. وهكذا. في الحقيقة.

كلما زدنا في رتبة تصحيح التقريب كلما زادت المسألة صعوبة، لذلك يُكتفى عادة بالتصحيح من الرتبة الأولى فقط وذلك لما يُظهره من كفاية جيدة لمطابقة الحسابات مع النتائج العملية.

6. احتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$

إن كانت الحالة الابتدائية للجلمة موصوفة بأحد الأشعة الذاتية للهاملتوني المستقر H_0 ، ولتكن $|i\rangle$ مثلا، فإن احتمال تغير حالة الجلمة، بعد مدة زمنية $(t - t_0)$ ، إلى حالة ذاتية أخرى²¹، نسميها الحالة النهائية $|f\rangle$ ، يعطى بأحد العبارتين (6-11) أو (6-17). وحساب هذا الاحتمال هو المسألة الأساسية التي تعالجها نظرية الاضطراب المتعلق بالزمن. يمكن طبعا أن نبيّن أن الاستمرار في العمل في إطار التصوّر التفاعلي مكافئ تماما للعودة إلى تصوّر شرودينغر، ذلك لأن التحويل بينهما هو تحويل واحد، والذي نعلم أن من خصائصه أنه يحافظ على الطولية والقيم المتوسطة. في الحقيقة، إن الحالة الابتدائية في التمثيل التفاعلي ستكون هي $|\psi(t_0)\rangle_I$ المعطاة بالعلاقة (6-45) والتي نكتبها هنا بشكل خاص

$$(67-6) \quad |\psi(t_0)\rangle_I = e^{\frac{it_0 H_0}{\hbar}} |i\rangle = e^{\frac{it_0 E_i^0}{\hbar}} |i\rangle$$

حيث استفدنا من العلاقة (6-3) لأننا اعتبرنا هنا أن $|i\rangle$ هو شعاع ذاتي للهاملتوني H_0 . إن تطور شعاع الحالة مع الزمن موصوف بالشعاع $|\psi(t)\rangle_I$ المعطى بالعلاقة (6-44). كما أن الحالة النهائية ستكون في هذا التمثيل، حسب (6-37)، هي

$$(68-6) \quad |f\rangle_I = e^{\frac{it H_0}{\hbar}} |f\rangle \Rightarrow {}_I \langle f| = \langle f| e^{-\frac{it H_0}{\hbar}} = e^{-\frac{it E_f^0}{\hbar}} \langle f|$$

ولذلك ففي التمثيل التفاعلي نحسب احتمال الانتقال من الحالة الابتدائية $|\psi(t_0)\rangle_I$ إلى الحالة النهائية $|f\rangle_I$ بعد مدة زمنية $(t - t_0)$ كما يلي

$$(69-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = |{}_I \langle f| \psi(t) \rangle_I|^2 = |{}_I \langle f| U_I(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle_I|^2$$

وبتعبير $U_I(t, t_0)$ بعبارته (6-48) واستعمال (6-67) و (6-68) نجد

$$(70-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = \left| \left(\langle f| e^{-\frac{it H_0}{\hbar}} \right) \left(e^{\frac{it H_0}{\hbar}} U(t, t_0) e^{-\frac{it_0 H_0}{\hbar}} \right) e^{\frac{it_0 H_0}{\hbar}} |i\rangle \right|^2 = |\langle f| U(t, t_0) |i\rangle|^2$$

وهي نفس العبارة (6-17) في تمثيل شرودينغر. في الواقع إن الفكرة الأساسية من استخدام التمثيل التفاعلي هي تمكيننا من القيام بالنشر (6-56) والذي ساعدنا فيما بعد على استنتاج نشر مؤثر التطور في تمثيل شرودينغر (6-60). فسواء استمرنا في العمل بالتمثيل التفاعلي واعتمدنا على تصحيح التقريب للنشر (6-56) أو العمل بتمثيل شرودينغر واعتمدنا تصحيح التقريب للسلسلة (6-60) فالأمر سيان لأننا سنتحصل على نفس النتائج. لذلك نفضل العودة لتمثيل شرودينغر ما دمنا نتعامل مع الأشعة الذاتية للهاملتوني المستقر. فيكون لدينا إذن حسب (6-60) و (6-70)

$$(71-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = \left| e^{-\frac{i E_f^0}{\hbar} (t-t_0)} \langle f|i\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle f| U^{(n)}(t, t_0) |i\rangle \right|^2$$

وهذه العبارة يمكن أن نكتبها بصورة مشابهة للعبارة (6-15) الخاصة بالطريقة الأولى لحساب احتمال العبور $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ ، أي نكتب

$$(72-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = \left| C_f^{(0)}(t) + C_f^{(1)}(t) + C_f^{(2)}(t) + \dots \right|^2$$

حيث نضع هنا

$$(73-6) \quad \begin{cases} C_f^{(0)}(t) = e^{-\frac{i E_f^0}{\hbar} (t-t_0)} \langle f|i\rangle = e^{-\frac{i E_f^0}{\hbar} (t-t_0)} \delta_{if} \\ C_f^{(n)}(t) = \langle f| U^{(n)}(t, t_0) |i\rangle \end{cases}$$

وكما هو واضح فإن سلسلة المعاملات $C_f^{(n)}(t)$ في العبارة (6-72) غير منتهية. وكما قلنا سابقا، فإن نظرية الاضطراب تقوم على استعمال التقريبات الأولى لحساب احتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$. فإذا قمنا الآن بأخذ التصحيح من الرتبة صفر لهذا التقريب سنجد

²¹ وهي أشعة متعمدة، وبالتالي

$$\langle f|i\rangle = \delta_{if}$$

$$(74-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = |C_f^{(0)}(t)|^2 = \delta_{if} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } f = i \\ 0 & \text{إذا كان } f \neq i \end{cases}$$

وهذه نتيجة متوقعة، لأن التصحيح من الرتبة صفر يوافق اهمال الاضطراب تماما، أي أن الهاملتوني الكلي هو نفسه الهاملتوني المستقر، وبالتالي فإذا كانت الحالة الابتدائية للجملة هي أحد الأشعة المستقرة فستبقى كذلك دائما كما هو معلوم. وبالتالي فإن احتمال الانتقال إلى حالة أخرى غير الحالة الابتدائية معدوم. لكن في الحقيقة، إن وجود الاضطراب، حتى لو كان ضعيفا، يُحدث فعلا انتقالا بين الحالات، ولذلك يجب علينا أن نمر لحساب التصحيح من الرتبة الأولى للتقريب

$$(75-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = |C_f^{(0)}(t) + C_f^{(1)}(t)|^2$$

فإذا كان ($|f\rangle \neq |i\rangle$) كما افترضنا في البداية فإن $C_f^{(0)}(t) = 0$ كما هو واضح من (73-6). وفي المقابل، فإنه حسب نفس هذه العلاقة الأخيرة (73-6) والعلاقة (66-6) يكون لدينا

$$(76-6) \quad C_f^{(1)}(t) = \langle f | U^{(1)}(t, t_0) | i \rangle = -\frac{i\lambda}{\hbar} \int_{t_0}^t dt_1 \langle f | e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_1)} W(t_1) e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t_1-t_0)} | i \rangle$$

لكن نحن نعلم أن

$$(77-6) \quad \begin{cases} e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t_1-t_0)} | i \rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}E_i^0(t_1-t_0)} | i \rangle \\ \langle f | e^{-\frac{i}{\hbar}H_0(t-t_1)} = e^{-\frac{i}{\hbar}E_f^0(t-t_1)} \langle f | \end{cases}$$

وبالتالي فيمكن إعادة كتابة العبارة (76-6) لتصبح

$$(78-6) \quad C_f^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar}(E_f^0 t - E_i^0 t_0)} \int_{t_0}^t dt_1 e^{\frac{i}{\hbar}(E_f^0 - E_i^0)t_1} V_{fi}(t_1)$$

حيث أن $V_{fi}(t_1)$ هو عنصر مصفوفة الاضطراب بين الحالتين $|i\rangle$ و $|f\rangle$. فحسب (10-6) لدينا

$$(79-6) \quad V_{fi}(t_1) = \langle f | \lambda W(t_1) | i \rangle = \langle f | V(t_1) | i \rangle$$

فإذا أدخلنا التواتر ω_{fi} المسعى بتواتر بور حيث

$$(80-6) \quad \omega_{fi} = \frac{E_f^0 - E_i^0}{\hbar}$$

فإن احتمال الانتقال (75-6) سيساوي إذن

$$(81-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = |C_f^{(1)}(t)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t dt_1 e^{i\omega_{fi}t_1} V_{fi}(t_1) \right|^2$$

وحتى يكون هذا التقريب جيدا يجب أن يكون $C_f^{(1)}(t) \ll 1$ حتى يوافق حالة الاضطراب الضعيف ($\lambda \ll 1$). أي يجب أن يكون

$$(82-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) \ll 1$$

كشرط لصلاحية التقريب الذي قمنا به. لا شك أننا نستطيع مبدئيا أن نقوم بحساب التصحيحات من الرتب العليا، لكن هذه التصحيحات تزداد صعوبة أيضا بازدياد رتبها. وفي الحقيقة، إذا كان الشرط (82-6) محققا، فإن هذا التقريب الأول كاف جدا.

كتطبيقات خاصة للنتيجة (81-6) التي تعطي احتمال الانتقال من حالة إلى حالة أخرى للجملة، سنعالج فيما سيأتي الحالتين المهمتين التي يكون فيها الاضطراب ثابتا أو اهتزازيا جيبيًا. وفي كلا هاتين الحالتين سنفترض دائما أن الحالة الابتدائية للجملة هي دائما الحالة الذاتية $|i\rangle$. المنفصلة والمحددة

جيدا، للهاملتوني المستقر H_0 وهي مختلف تماما عن الحالة النهائية، لكن بالنسبة للانتقال الناتج عن الاضطراب سنميز بين كون الحالة النهائية للجملة منفصلة مثل الحالة الابتدائية أو تنتمي إلى متصل من الحالات النهائية. وفي هذه الأخيرة نستخرج ما يُسمى بالقاعدة الذهبية لفيرومي. في الحقيقة، إن هذا التمييز بين حالات الوصول النهائية تستلزم أن نعتبر أن الهاملتوني المستقر يمكن أن يملك طيفا مستمرا أيضا أو خليطا من الطيف المنفصل والمتصل، مثل طيف ذرة الهيدروجين.

7. حالة الاضطراب الثابت (غير المتعلق بالزمن)

كنا قد عالجنا في الفصل السابق الاضطراب المستقر ودرسنا تأثيره على مستويات طاقة الجملة وكذا تأثيره على حالاتها المستقرة لكننا لم نعالج مسألة الانتقال بين الحالات التي يسببها هذا الاضطراب الثابت. ما سنقوم به هنا هو معالجة المسألة من أجل الحالتين اللتين ذكرناهما أعلاه. أي، بالانطلاق من حالة ابتدائية منفصلة ومحددة جيدا، نبحث عن احتمال الانتقال إلى الحالة النهائية التي يمكن أن تكون هي الأخرى منفصلة أو يمكن أن تكون منتمية إلى مجموعة متصلة من الحالات النهائية الممكنة. سنعتبر لحظة تطبيق الاضطراب فيما سيأتي هي $(t_0 = 0)$.

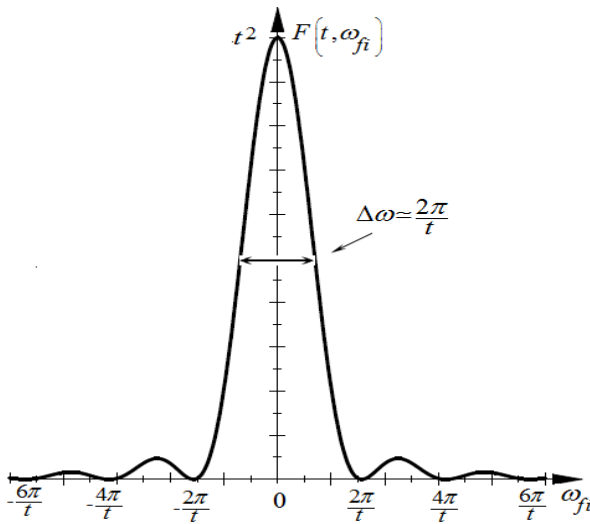
1.7 احتمال الانتقال من حالة منفصلة $|i\rangle$ إلى حالة منفصلة أخرى $|f\rangle$

نهتم هنا بحساب احتمال الانتقال من الحالة ابتدائية $|i\rangle$ إلى حالة نهائية محددة جيدا $|f\rangle$ وتنتمي إلى الطيف المتقطع للهاملتوني غير المضطرب H_0 بحيث تكون مختلفة عن الحالة الابتدائية، أي $(i \neq f)$. في هذه الحالة سيكون حساب احتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ سهلا لأنه يمكن إخراج العناصر المصفوفية V_{fi} من التكامل الموجود في العلاقة (6-81) لأنها عناصر ثابتة هنا، بينما يبقى لنا مكاملة ما بقي وهو سهل فنجد

$$\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = \left[\frac{2|V_{fi}|}{\hbar\omega_{fi}} \sin\left(\frac{\omega_{fi}t}{2}\right) \right]^2 = \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2} F(t, \omega_{fi}) \quad (83-6)$$

حيث وضعنا

$$F(t, \omega_{fi}) = \left[\frac{2 \sin(\omega_{fi}t/2)}{\omega_{fi}} \right]^2 \quad (84-6)$$



إن منحنى تغير الدالة $F(t, \omega_{fi})$ بدلالة تواتر بور ω_{fi} ومن أجل لحظة معينة t ، المعطى في الشكل أدناه، يُبرز قمة عالية جدا بالنسبة لباقي القمم من أجل $\omega_{fi} = 0$ ، وهو ما يميز ظاهرة التجاوب لاحتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ لحالة نهائية $|f\rangle$ تملك نفس طاقة الحالة الابتدائية $|i\rangle$ (مسموح إن كانت هذه الأخيرة منحلّة). يتناقص هذا الاحتمال من قيمته العظمى المتناسبة مع t^2 كلما ازداد تواتر بور ω_{fi} (بالقيمة المطلقة) حتى ينعدم عند القيمة $|\omega_{fi}| = 2\pi/t$. نأخذ كعرض لهذه القمة المركزية القيمة $\Delta\omega$ التي تساوي نصف البعد بين القيمتين اللتين تنعدم عندهما الدالة F ، حيث نلاحظ أن هذا العرض يصبح صغيرا مع ازدياد الزمن، في حين يزداد ارتفاع القمة المتناسبة مع مربع هذا الأخير والتي تصبح مستدقة أكثر بمرور الزمن. لدينا

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{t} \quad (85-6)$$

إن هذه الدالة $F(t, \omega_{fi})$ ستؤول إلى دالة دلتا ديراك كلما ازداد الزمن كما توضحه العلاقة (6-86) أدناه. إن المنحنى في الشكل المقابل يتعامل مع تواتر بور ω_{fi} كمتغير مستمر رغم أننا ندرس هنا حالة الانتقال بين مستويات منفصلة، لكن هذا الاستمرار في قيمة تواتر بور سيكون مفيدا حين

²² هناك من يختار عرض القمة الفرق بين القيمتين التي تعدم عندهما القمة المركزية، وبالتالي سيكون $\Delta\omega = 4\pi/t$.

معالجة احتمال الانتقال الى الحالات المتصلة لطيف الهاملتوني المستقر وهو ما سيسمح لنا بحساب نسبة الانتقال في وحدة الزمن فيما بعد.
من الجيد أن نعطي في هذه المرحلة العلاقتين المفيدتين التاليتين

1- من أجل الأزمنة الكبيرة لدينا

$$(86-6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F(t, \omega_{fi}) = 2\pi t \delta(\omega_{fi})$$

2- كلما ازداد الزمن كلما كانت المساهمة الرئيسية في الدالة $F(t, \omega_{fi})$ تأتي من القمة المركزية كما نرى من الشكل التجاوبي لها. في الحقيقة، من أجل هاته الأزمنة الكبيرة تكون المساحة المحصورة داخل القمة المركزية (التي نعتبرها بتقريب جيد كمستطيل عرضه $\Delta\omega$ وطوله t^2 أو كمثلث قاعدته $2\Delta\omega$ وارتفاعه t^2) هي

$$(87-6) \quad s \approx \Delta\omega \times t^2 = 2\pi t$$

والتي تساوي التكامل $\int_{-2\pi/t}^{2\pi/t} F(t, \omega_{fi}) d\omega_{fi}$. في الحقيقة يمكن تمديد حدود التكامل إلى كل القيم الممكنة لتواتر بور دون أن يحدث ذلك خطأ كبيراً على النتيجة النهائية حيث لدينا في الواقع أن

$$(88-6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, \omega_{fi}) d\omega_{fi} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2 \sin(\omega_{fi} t / 2)}{\omega_{fi}} \right]^2 d\omega_{fi} = 2\pi t \approx s$$

سنستعمل كلا العلاقتين (86-6) و (88-6) لحساب احتمال الانتقال إلى مجموعة متصلة من الحالات النهائية في الفقرة القادمة، وسنرى أنه رغم أن كلا منهما يقود لنفس النتيجة، إلا أن لكل منهما فائدته الخاصة.

من الواضح من خلال العبارة (83-6) أن احتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ يتعلق بالزمن وكذا بتواتر بور ω_{fi} ، لذلك سندرسه بهذين الاعتبارين

1.1.7 باعتبار الاحتمال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ كدالة لتواتر بور ω_{fi}

من أجل لحظة زمنية معينة t ، فإن احتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ متناسب مع مربع عنصر مصفوفة الاضطراب V_{fi} ، لكن وجود المعامل $F(t, \omega_{fi})$ في العبارة (83-6)، والذي يملك قمة مركزية مستدقة عند القيمة $\omega_{fi} = 0$ ، سيجعل احتمال الانتقال إلى الحالات التي طاقاتها $E_f^{(0)}$ بعيدة عن قيمة طاقة الحالة الابتدائية $E_i^{(0)}$ ضعيفاً جداً من أجل الحالات التي يكون فيها

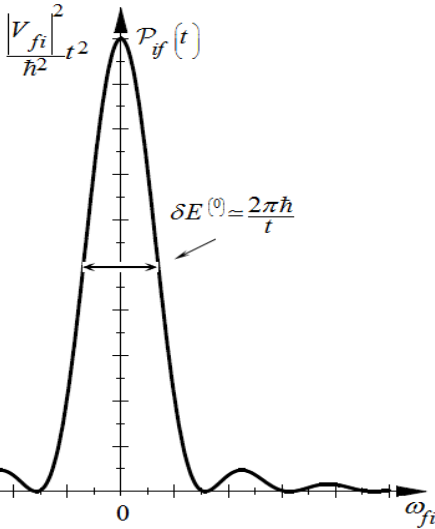
$$\omega_{fi} \geq \frac{2\pi}{t}$$

بل يكاد يكون شبه معدوم من أجل الحالات التي تواتراتها تحقق $\omega_{fi} \gg \frac{2\pi}{t}$ في المقابل، يكون احتمال الانتقال إلى الحالات النهائية التي تقع طاقاتها

$E_f^{(0)}$ ضمن المجال $\delta E^{(0)}$ حول القيمة الابتدائية $E_i^{(0)}$ معتبراً جداً، حيث أن المجال $\delta E^{(0)}$ يساوي حسب (85-6)

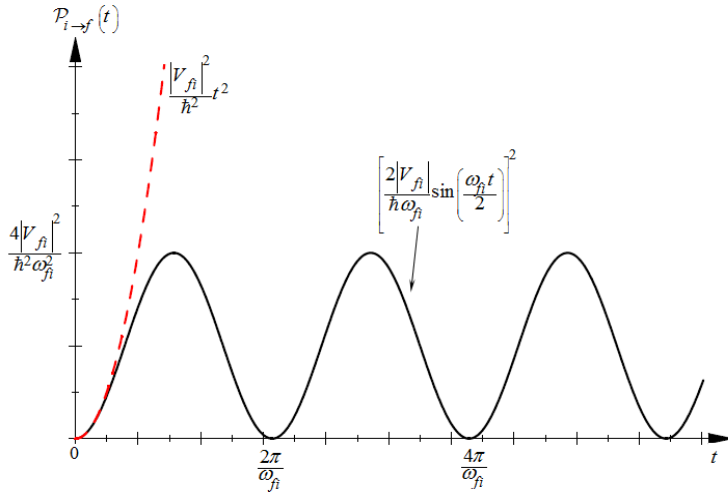
$$(89-6) \quad \delta E^{(0)} \cong \hbar \Delta\omega = \frac{2\pi \hbar}{t}$$

أي تلك الانتقالات التي تحفظ الطاقة الابتدائية $E_i^{(0)}$ غير المضطربة بقيمة $\delta E^{(0)}$ تقريبا. إن العلاقة (89-6) تذكر بعلاقة الارتباب الرابعة لهايزنبرغ. لكن سنترك مناقشة مضمونها إلى حين معالجة مسألة الاضطراب الاهتزازي الجيبي.



2.1.7 باعتبار الاحتمال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ كدالة للزمن

ونحدث هنا عن الانتقال إلى حالة محددة بالضبط طاقتها $E_f^{(0)}$ ، أي من أجل ω_{fi} ثابتة، ونرى كيف يتغير احتمال الانتقال بدلالة الزمن. إن قيمة هذا الاحتمال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ تكون أعظمية عندما تنطبق طاقة الحالة النهائية مع طاقة الحالة الابتدائية (أي أن المستوى الطاقوي $E_i^{(0)} = E_f^{(0)}$ منحل). وهو ما يوافق طبعاً $\omega_{fi} = 0$ ، ونقول أن هذا الانتقال يحفظ الطاقة غير المضطربة بصفة تامة، ونجد عندئذ أن احتمال الانتقال يتزايد كمرعب للزمن كما في العبارة التالية²³



$$(90-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2} t^2$$

هذا فيما يخص احتمال الانتقال (90-6) بين الحالات المنحلة الذي نرى بيانه بالأحمر في الشكل المقابل. أما إذا كان الانتقال إلى حالة $|f\rangle$ طاقتها مختلفة عن طاقة الحالة الابتدائية، أي $\omega_{fi} = \text{cte} \neq 0$ ، فإن تغير قيمة الاحتمال $\mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t)$ بمرور الزمن سيكون حسب (83-6) اهتزازيا بين القيمتين 0 و $(2|V_{fi}|/\hbar\omega_{fi})^2$ ، ودور هذا الاهتزاز هو $2\pi/\omega_{fi}$ كما يبينه المنحنى الأسود في الشكل. نلاحظ أيضا أنه من أجل أزمنة صغيرة جدا فإن احتمال الانتقال يظهر نفس السلوك كما في (90-6). أي متناسب مع مربع الزمن.

2.7 مناقشة شرط صلاحية عبارة احتمال الانتقال

1.2.7 شرط صلاحية عبارة احتمال الانتقال بين حالات المستوى المنحل ($\omega_{fi} = 0$)

لاشك أن العبارة (90-6) الخاصة باحتمال الانتقال بين حالتين $|i\rangle$ و $|f\rangle$ تابعتين لنفس المستوى الطاقوي (مستوى منحل $E_i^{(0)} = E_f^{(0)}$) مزعجة كونها تؤدي إلى قيمة لانهائية لاحتمال الانتقال في حال كان زمن تطبيق الاضطراب كبيرا جدا ($t \rightarrow \infty$). لكن يجب أن نتذكر في المقابل أن شرط صلاحية نظرية الاضطراب (82-6) يسمح بتحديد القيم العليا المسموحة للزمن، وفي هذه الحالة يجب أن نتحقق المتراجحة

$$(91-6) \quad \frac{|V_{fi}|^2}{\hbar^2} t^2 \ll 1 \Rightarrow t \ll \frac{\hbar}{|V_{fi}|}$$

وإلا تكون العلاقة (90-6) غير صالحة. يمكن تفسير هذا الشرط المفروض على زمن تفاعل الجملية مع الاضطراب الثابت في حالة الانتقال بين الحالات المنتمية لنفس المستوى الطاقوي $E_i^{(0)}$ كما يلي: بما أن هذا المستوى منحل، فمهما كان الاضطراب ضعيفا فسيبقى يعتبر قويا بالنسبة لحالتي المستوى الطاقوي المنحل (لأن الفرق الطاقوي بينهما منعدم في هذه الحالة)، وبالتالي فهو سيحدث انتقالا بين حالتي هذا المستوى واحتمال هذا الانتقال يكون كبيرا ويمكن أن تصل قيمته إلى 1. أي أن الانتقال يكون محتم الوقوع، فبعد مدة زمنية كافية سنجد حتما الجملية في الحالة النهائية $|f\rangle$. وفي هذه الحالة فإن نظرية الاضطراب تصبح غير صالحة لوصف هذا الاحتمال الكبير للعبور بين الحالات تحت تأثير الاضطراب من أجل الأزمنة الكبيرة، ويكون بالتالي التقريب (82-6) غير محقق. لكن الشرط (91-6) يشير إلى أنه إذا كان زمن تفاعل الجملية مع الاضطراب قصيرا جدا فإن ذلك لن يوفّر لها الوقت الكافي للانتقال بين الحالتين المنحلتين. وكلما كان الاضطراب ضعيفا كلما كان كُبر زمن التفاعل المسموح به لكي تبقى النتيجة (90-6) صحيحة. فمثلا، في جملية ذات مستويين سيكون الاضطراب متناسبا عكسا مع زمن الانتقال بين الحالتين بحيث كلما كان هذا الاضطراب صغيرا كلما كان زمن الانتقال بين الحالتين كبيرا.

²³ باستعمال $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x) = 1$ في العلاقة (83-6).

2.2.7 شرط صلاحية عبارة احتمال الانتقال بين المستويات الطاقوية المختلفة ($\omega_{fi} \neq 0$)

من المهم أيضا أن نرى كيف يظهر هنا شرط صلاحية التقريب من الرتبة الأولى لنظرية الاضطراب بالنسبة للمستويات الطاقوية المختلفة. فحسب العبارة (83-6) يكون لدينا

$$(92-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = \frac{4|V_{fi}|^2}{\hbar^2 \omega_{fi}^2} \sin^2\left(\frac{\omega_{fi} t}{2}\right) \leq \frac{4|V_{fi}|^2}{\hbar^2 \omega_{fi}^2}$$

وبالتالي فمن خلال هذه العلاقة نستطيع إعادة كتابة شرط الصلاحية (82-6) في هذه الحالة كما يلي

$$(93-6) \quad \frac{4|V_{fi}|^2}{\hbar^2 \omega_{fi}^2} \ll 1 \Rightarrow |V_{fi}| \ll \hbar \omega_{fi} = E_f^0 - E_i^0$$

إذن، يجب أن يكون الاضطراب ضعيفا أمام الفرق بين المستويات الطاقوية المختلفة للماهلوتوني المستقر حتى تكون العبارة (83-6) مقبولة مهما كان زمن تأثير الاضطراب على الجملة، وهو الأمر الذي عبرنا عنها في بداية هذا الفصل بالشرط (2-6) والذي افترضنا تحققه حتى نستطيع تأسيس نظرية للاضطرابات. وهذا عكس الحالة السابقة التي لا تكون فيها النتائج صالحة إلا من أجل أزمنة صغيرة. ولكن الانتقال إلى الحالات التي طاقتها قريبة جدا من طاقة الحالة الابتدائية $E_f^0 \sim E_i^0$ (الحالات شبه المنحلة)، فيمكن ألا يتحقق الشرط (93-6)، وتفضل نظرية الاضطراب في إعطاء قيمة الاحتمال في أي مدة زمنية للتفاعل لأنه سيخرق الشرط (82-6)، إلا أنه يمكن قبولها في حدود الأزمنة الصغيرة كتقريب من الرتبة الأولى بنفس التفسير الذي أعطيناه في الحالة السابقة.

3.7 احتمال الانتقال من حالة منفصلة $|i\rangle$ إلى مجموعة من الحالات النهائية المتصلة

1.3.7 كثافة الاحتمال واحتمال الانتقال

نريد أن نعالج في هذه الفقرة مسألة غاية في الأهمية ولها ارتباط وثيق بمفهوم المقطع الفعال للتفاعل في ميكانيك الكم. إنها مسألة حساب احتمال الانتقال في وحدة الزمن من حالة ابتدائية منفصلة $|i\rangle$ محددة جيدا إلى مجموعة من الحالات النهائية المتصلة $\{|\alpha\rangle; \alpha \in D_f\}$ ، والتي تقع طاقتها ضمن مجال طاقتي محدد $\Delta E_f^{(0)}$ ، ونقصد هنا الانتقال إلى فئة من الحالات النهائية التي تنتهي إلى الطيف المستمر للماهلوتوني المستقر H_0 في الحقيقة، يمكن أن يكون طيف هذا الماهلوتوني كله متصلا، أو يكون جزء منه متصلا والجزء الآخر متقطعا. ونشير عندئذ لطاقة الجزء المتصل من هذا الطيف بالرمز $E^{(0)}$. فإذا رمزنا إلى أشعة الحالة التي تنتهي إلى الطيف المستمر بالرمز $|\alpha\rangle$ فإن شرط تعمده هذه الأشعة هو

$$(94-6) \quad \langle \alpha | \alpha' \rangle = \delta(\alpha - \alpha')$$

إن الوسيط α يشير إلى مجموعة القرائن (القيم) التي يمكن أن نميزها بالحالة $|\alpha\rangle$ تماما²⁴. ولكن حتى يكون العرض واضحا وبسيطا، فإنه يمكن اعتبار الوسيط α بشكل خاص كدليل على طيف الطاقة المتصل ودرجة انحلاله إن كان منحلا. فمن جهة، نحن نعلم من مسلمات ميكانيك الكم الخاصة بالتحليل الطيفي في حالة الطيف المتصل أنه إن كانت الجملة، في لحظة ما t ، موصوفة بشعاع الحالة $|\psi(t)\rangle$ ، فإن القيمة $|\langle \alpha | \psi(t) \rangle|^2$ تمثل كثافة احتمال وجودها في الحالة $|\alpha\rangle$ ، بينما يكون احتمال الحصول على قيمة طاقة الجملة عند قياسها محصورة بين $E^{(0)}$ و $E^{(0)} + dE^{(0)}$ أي احتمال وجود قيمة الوسيط α بين α و $\alpha + d\alpha$ هو

$$(95-6) \quad d\mathcal{P}_{i \rightarrow \alpha}(t) = |\langle \alpha | \psi(t) \rangle|^2 d\alpha$$

وحيث أن حساب عبارة كثافة الاحتمال $|\langle \alpha | \psi(t) \rangle|^2$ يتم بنفس طريقة حساب احتمال الانتقال بين الحالات المنفصلة، فإن النتيجة ستتشابه مع العبارة (83-6)، أي أننا سنتحصل على

²⁴ أي مجموعة القيم الذاتية التي تعود لمجموعة تامة من ملحوظات متبادلة من ضمنها H_0 . فإن كان الماهلوتوني H_0 لوحده كاف لتحديد هذه الحالة بصفة تامة فسيكون α متعلقا بالطاقة $E^{(0)}$ فقط. وإلا سيكون مجموعة من القيم الداخلة في تحديد حالة الجملة تحديدا تاما. ولكن للاختصار فضلنا الإشارة بدليل واحد فقط لكل هذه القيم، مؤكداً في نفس الوقت بشكل خاص على استمرارية هذه القيمة، على الأقل من أجل الجزء الخاص بالطيف المتصل للماهلوتوني المستقر.

$$(96-6) \quad |\langle \alpha | \psi(t) \rangle|^2 = \left[\frac{2|V_{\alpha i}|}{\hbar \omega_{\alpha i}} \sin\left(\frac{\omega_{\alpha i} t}{2}\right) \right]^2$$

من جهة أخرى، فلا شك أن المجال D_f الخاص بالحالات النهائية للجملية بعد التفاعل مع الاضطراب تحدده شروط التجربة، ولكن مهما كانت دقة هذه الأخيرة (أو نقول مهما كانت قدرة التحليل للجهاز المستخدم في التجربة لقياس طاقة الحالة النهائية)، فكون الطيف مستمرا لا يسمح أبدا بتسجيل قيمة دقيقة لطاقة الحالة النهائية $E_f^{(0)}$ ، إذ لا بد وأن تقع نتيجة القياس ضمن مجال طاقتي $\Delta E_f^{(0)}$ حول القيمة $E_f^{(0)}$ والذي تحدده التجربة، وفي هذه الحالة يلزمنا أن نتكلم عن احتمال الانتقال إلى مجموعة الحالات النهائية $\{|\alpha\rangle; \alpha \in D_f\}$ التي تنتمي طاقتها إلى هذا المجال $\Delta E_f^{(0)}$. ولذلك فإنه يجب جمع (في الحقيقة هو تكامل) كل الاحتمالات من الشكل (95-6) على كل الميدان D_f الذي تقع ضمنه الحالات النهائية للجملية عند القياس. إذن

$$(97-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t) = \int_{\alpha \in D_f} d\mathcal{P}_{i \rightarrow \alpha}(t) = \int_{\alpha \in D_f} |\langle \alpha | \psi(t) \rangle|^2 d\alpha$$

من السهل الربط بين الوسيط α الذي يميز شعاع الحالة $|\alpha\rangle$ وطاقة الطيف المتصل $E^{(0)}$ إذ أن المجال $dE^{(0)}$ يحوي عددا من الحالات قدره $d\alpha$. يمكن إذن إيجاد عبارة كثافة الحالات $\rho(E^{(0)})$ التي هي عدد الحالات في وحدة الطاقة، وذلك كما يلي

$$(98-6) \quad \rho(E^{(0)}) = \frac{d\alpha}{dE^{(0)}} \Rightarrow d\alpha = \rho(E^{(0)}) dE^{(0)}$$

ولكي نكون أكثر شمولا، يجب أن نأخذ في الاعتبار أيضا انحلال المستويات الطاقوية $E^{(0)}$. فإن كانت درجة انحلالها هي $d\beta$ فإن العبارة (98-6) تكتب إذن²⁵

$$(99-6) \quad d\alpha = \rho(E^{(0)}, \beta) dE^{(0)} d\beta \Rightarrow \rho(E^{(0)}, \beta) = \frac{d\alpha}{dE^{(0)} d\beta}$$

ونقول هنا أن $\rho(E^{(0)}, \beta)$ هو عدد الحالات في وحدة الطاقة لكل درجة انحلال²⁶. وبالتالي فإن أردنا استعمال (96-6) ضمن التكامل (97-6) فيسكون من الجيد استبدال المتغير $E^{(0)}$ بالمتغير α وذلك باستخدام (98-6) أو (99-6) حسب الحاجة. ونكتب عموما

²⁵ لاحظ أننا اعتبرنا درجة انحلال المستويات كمتغير مستمر. لكن هذا ليس إلزاميا فيمكن أن يكون متقطعا. فسين جسيم مثلا يضيء درجة انحلال متقطعة على مستويات الطاقة. كما أن الوسيط β يشير إلى كل درجات الانحلال الممكنة. فإن كان متقطعا فيكفي الضرب في عدد الانحلال فقط.

²⁶ لتوضيح العلاقة (99-6)، نعتبر كمثال جسيما حرا يتحرك في بعد واحد بحيث يكون محصورا في المجال $0 \leq x \leq L$ ويملك اندفاعا p . فيمكن وصف حالته في تمثيل الاندفاع بالأشعة $\{p\}$ ، حيث نعتبر الطول L كبيرا بشكل يسمح بمعالجة المسألة بطريقة كلاسيكية. أي عدم الأخذ بعين الاعتبار تكميم مستويات طاقة هذا الجسيم لأنه الفرق بين مستويين طاقتويين متتاليين سيكون مهملا في هذه الحالة لأنه يتناسب عكسا مع الطول L ، وبالتالي يمكن التعامل مع طيف الطاقة على أنه مستمر في هذه النهاية الكلاسيكية. إن قيم طيف الطاقة المستمر هذا هي $E = p^2/2m$ ، وكل قيمة من هذه القيم منحلة مرتان، أي تملك شعاعا حالة. في الحقيقة، إن كل قيمة E يمكن أن تحققها القيمتان p و $(-p)$ لاندفاع الجسيم لأنه لدينا $|p| = \sqrt{2mE}$. وحسب العلاقة (99-6) (الوسيط $\beta = 2$ هنا، غير مستمر) فإن عدد الحالات الموجودة ضمن مجال طاقتي dE هو $2dp$ حيث

$$2dp = 2\rho(E, \beta = 2)dE \Rightarrow \rho(E, \beta = 2) = \frac{dp}{dE}$$

ولكن حسب العلاقة بين طاقة واندفاع الجسيم لدينا $dp = \sqrt{m/2E} dE$ وبالتالي فإن كثافة الحالات $\rho(E)$ ستكون

$$\rho(E) = 2\rho(E, \beta = 2) = \sqrt{2m/E}$$

لكن إن عبرنا عن أشعة الحالة في التمثيل الطاقتي $\{E\}$ فإن كثافة الحالات هي $\rho(E) = 2$ فقط. في الحقيقة، وبصفة عامة فإن كان الهاملتوني H_0 يمثل لوحده مجموعة تامة من الملحوظات المتبادلة، فإن استخدام تمثيل الطاقة $\{E\}$ لوصف حالات الجملية يغني عن الحاجة إلى كثافة الحالات $\rho(E)$ لأنها تساوي الواحد في هذه الحالة ($\alpha \equiv E$). وإن كانت منحلة فإن كثافة الحالات $\rho(E)$ هي نفسها درجة الانحلال في هذه الحالة، لكن تبقى $\rho(E, \beta)$ مساوية للواحد في كلتا الحالتين في هذا التمثيل الطاقتي.

$$(100-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \int_{\{E^{(0)} \in \Delta E_f^{(0)}; \beta \in \Delta \beta_f\}} |\langle \beta, E^{(0)} | V | i \rangle|^2 F\left(t, \frac{E^{(0)} - E_i^{(0)}}{\hbar}\right) \rho(E^{(0)}, \beta) dE^{(0)} d\beta$$

حيث أبرزنا في هذه العبارة أن العناصر المصفوفية للاضطراب $V_{\alpha i}$ يمكن أن تتعلق بقيم الطاقة $E^{(0)}$ وكذا بدرجة انحلالها β . أي قمنا بالاستبدال التالي $\{|\alpha\rangle \rightarrow |\beta, E^{(0)}\rangle\}$ حتى يظهر المتغير $E^{(0)}$ بشكل صريح في كل الحدود داخل التكامل (100-6). كما أنه حسب (84-6) يكون

$$(101-6) \quad F\left(t, \frac{E^{(0)} - E_i^{(0)}}{\hbar}\right) = \left\{ \frac{2\hbar \sin\left[\left(E^{(0)} - E_i^{(0)}\right)t/2\hbar\right]}{E^{(0)} - E_i^{(0)}} \right\}^2$$

لقد رأينا أن شكل الدالة F كتابع لتواتر بور، أي كتابع للفرق بين طاقتي الحالة الابتدائية والنهائية، يملك قمة مركزية مرتفعة جدا عند القيمة $E^{(0)} = E_i^{(0)}$. الأمر الذي يميز ظاهرة التجاوب لاحتمال الانتقال. في الحقيقة، إن الدالة F تتغير بسرعة كبيرة جدا بجوار قيمة طاقة الحالة الابتدائية $E_i^{(0)}$. بينما تكون باقي القمم صغيرة جدا بالمقارنة مع القمة المركزية، وخاصة إذا كان زمن التفاعل مع الاضطراب كبيرا (كبير في حدود شرط صلاحية التقريب من الرتبة الأولى (82-6) لنظرية الاضطراب). حيث نجد حسب (86-6) أن

$$(102-6) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} F\left(t, \frac{E^{(0)} - E_i^{(0)}}{\hbar}\right) = 2\pi t \delta\left(\frac{E^{(0)} - E_i^{(0)}}{\hbar}\right) = 2\pi \hbar t \delta(E^{(0)} - E_i^{(0)})$$

سنرى أن هذه العلاقة (102-6) تعمل كقاعدة انتقاء في النتيجة النهائية لاحتمال الانتقالات الممكنة بانطلاقنا من حالة ابتدائية $|i\rangle$. فبتعويض (102-6) في (100-6) نجد إذن

$$(103-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t) = \frac{2\pi t}{\hbar} \Delta \beta_f \int_{E^{(0)} \in \Delta E_f^{(0)}} |\langle \beta, E^{(0)} | V | i \rangle|^2 \rho(E^{(0)}, \beta) \delta(E^{(0)} - E_i^{(0)}) dE^{(0)}$$

حيث افترضنا هنا للتبسيط أن مجال درجة انحلال المستويات الطاقوية $\Delta \beta_f$ صغير جدا بحيث لا حاجة لإجراء التكامل عليه إذ يكفي الضرب في $\Delta \beta_f$ فقط. وقبل المرور إلى النتيجة النهائية، سنتعامل فيما سيأتي مع الرمز $E_f^{(0)}$ كدليل على كل قيم طاقات الحالات النهائية المنتمية للمجال $\Delta E_f^{(0)}$ وليس فقط لطاقة حالة نهائية وحيدة، وذلك بدلا من الرمز $E^{(0)}$ الذي تعاملنا به والذي يميز في الواقع طاقات كل حالات الطيف المتصل وليست فقط تلك المنتمية للمجال $\Delta E_f^{(0)}$. إذن نكتب (103-6) كما يلي

$$(104-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t) = \frac{2\pi t}{\hbar} \Delta \beta_f \int_{E_f^{(0)} \in \Delta E_f^{(0)}} \left| \langle \beta_f, E_f^{(0)} | V | i \rangle \right|^2 \rho(E_f^{(0)}, \beta_f) \delta(E_f^{(0)} - E_i^{(0)}) dE_f^{(0)}$$

الآن، ومن خلال هذه العبارة (104-6)، يمكن أن نميز الحالتين التاليتين

1- إن كانت طاقة الحالة الابتدائية $E_i^{(0)}$ خارج المجال الطاقوي $\Delta E_f^{(0)}$ فإن نتيجة احتمال الانتقال معدوم كما هو واضح من خصائص دالة دلتا ديراك، أي

$$(105-6) \quad \text{if } E_i^{(0)} \notin \Delta E_f^{(0)} \Rightarrow \mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t) = 0$$

2- إن كانت طاقة الحالة الابتدائية $E_i^{(0)} \in \Delta E_f^{(0)}$ فإن نتيجة احتمال الانتقال ستكون

$$(106-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t) = \frac{2\pi t}{\hbar} \Delta \beta_f \left| \langle \beta_f, E_f^{(0)} = E_i^{(0)} | V | i \rangle \right|^2 \rho(E_f^{(0)} = E_i^{(0)}, \beta_f)$$

حيث قمنا بكتابة العناصر المصفوفية على الشكل $\langle \beta_f, E_f^{(0)} | V | i \rangle = E_i^{(0)}$ قاصدين إظهار المساواة بين طاقة الحالات النهائية $E_f^{(0)}$ والطاقة الابتدائية $E_i^{(0)}$ بدلا من الكتابة البسيطة $\langle \beta, E_i^{(0)} | V | i \rangle$ وذلك تفاديا لأي غموض يمكن منه أن يُعتقد أن البرا الموجودة في هذا العنصر المصفوفي هي نفس الكات الموجودة على اليمين. في الحقيقة هما حالتان مختلفتان يشتركان في نفس قيمة الطاقة $E_i^{(0)}$ فقط وذلك بتقريب $\delta E^{(0)}$ ط طبعاً. إن تفسير هاته النتائج بسيط للغاية، فكما قلنا في الفقرة السابقة التي عالجت مسألة احتمال الانتقال بين الحالات المنفصلة تحت تأثير اضطراب ثابت أن هذا الانتقال يحفظ الطاقة بتقريب $\delta E^{(0)}$ ، فكذا الأمر هنا بالنسبة للانتقال إلى مجموعة حالات نهائية متصلة، فالاضطراب الثابت يحدث انتقالاً إلى الحالات النهائية المتصلة والتي طاقتها $E^{(0)}$ تساوي طاقة الحالة الابتدائية $E_i^{(0)}$ بتقريب $\delta E^{(0)}$ (انظر (6-89)). لذلك نرى أن عبارة احتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t)$ تظهر فيها الطاقة الابتدائية $E_i^{(0)}$ بالذات، كما أن هذا الاحتمال يكون معدوماً بالنسبة لمجال طاقات الحالات النهائية الذي لا يحتوي على $E_i^{(0)}$ ، فمثل هذه الانتقالات لا تعتبر حافظة للطاقة ضمن التقريب $\delta E^{(0)}$.

بالإضافة إلى ذلك، نلاحظ أيضاً أن العبارة (6-106) تظهر أن الاحتمال $\mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t)$ يتعلق بالزمن بصورة خطية، ولكن ينبغي أن نتذكّر دائماً أنها مقرونة بشرط الصلاحية (6-82). إن هذه النتيجة، أي الارتباط الخطي بالزمن، تعتبر جيدة جداً من حيث أنها ستسمح لنا بالحصول على ما نسميه نسبة الانتقال في وحدة الزمن أو ما يطلق عليه في هذه الحالة بالقاعدة الذهبية لفيرمي. لكن قبل المرور إلى حساب هذه النسبة، لا بد أن ننبه إلى نقطة مهمة، فرغم سهولة وسرعة الطريقة التي وصلنا بها إلى النتيجة (6-106)، إلا أن من عيوبها أنها تختصر، أو نقول تتجاوز، توضيح بعض الشروط الإضافية المبينة لصلاحيتها وكذا عدم إبراز المعنى الأعمق لها. ولفعل ذلك، نريد أن نعالج المسألة بطريقة بديلة الآن وذلك بالعودة إلى العبارة (6-100). في الحقيقة، إن عرض القيمة المركزية $\delta E^{(0)}$ للدالة F يتناسب عكسا مع الزمن كما رأينا في (6-89)، أي $\delta E^{(0)} = 2\pi\hbar/t$ ، ونظراً لصغر هذا المجال الطاقوي الذي يزداد ضيقاً بمرور الزمن، يمكننا أن نقوم بمجموعة فروض ستسمح لنا في النهاية بالحصول على نفس العبارة (6-106) لاحتمال الانتقال. يجب أولاً أن نميز بين المجال الطاقوي $\Delta E_f^{(0)}$ الذي يضم مجموعة قيم طاقات الحالات النهائية المنتمية لمجال الحالات D_f والذي تحدده شروط التجربة، وبين المجال الطاقوي $\delta E^{(0)}$ الذي يمثل عرض القيمة المركزية للدالة F والذي يشتمل على قيم طاقات الحالات النهائية التي يكون من أجلها احتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t)$ معتبراً. ثم لنفرض أن زمن التفاعل t كبير بحيث يكون لدينا

$$(107-6) \quad \Delta E_f^{(0)} \gg \delta E^{(0)} \Rightarrow \Delta E_f^{(0)} \gg \frac{2\pi\hbar}{t}$$

وفي هذه الحالة تكون أكبر مساهمة في التكامل (6-100) آتية من المجال الطاقوي $\delta E^{(0)}$ (انظر المنحني الخاص بالدالة F) الذي يمكن أن نفرض فيه أن الحد $\left| \langle \beta_f, E_f^{(0)} | V | i \rangle \right|^2 \rho(E_f^{(0)}, \beta_f)$ يتغير ببطء شديد بحيث يمكن اعتباره ثابتاً فيه²⁷، كما يمكن أن نفترض، كما فعلنا في الطريقة الأولى أن مجال درجة انحلال المستويات الطاقوية $\Delta\beta_f$ صغير بحيث لا حاجة لإجراء التكامل عليه فيكفي الضرب في $\Delta\beta_f$ فقط. وبالتالي يكون لدينا

$$(108-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t) = \frac{\Delta\beta_f}{\hbar^2} \left| \langle \beta_f, E_f^{(0)} = E_i^{(0)} | V | i \rangle \right|^2 \rho(E_f^{(0)} = E_i^{(0)}, \beta_f) \\ \times \int_{E_f^{(0)} \in \Delta E_f^{(0)}} F\left(t, \frac{E_f^{(0)} - E_i^{(0)}}{\hbar}\right) dE_f^{(0)}$$

وبما أن المساهمة الأساسية في التكامل الموجود في (6-108) تأتي من قيم الطاقة الموجودة في المجال $\delta E^{(0)}$ فإنه يمكن حسب العلاقة (6-107) تمديد حدود التكامل لتكون لانهائية بدون أن يسبب ذلك خطأً كبيراً في النتيجة (لأننا سنقوم بإضافة مساهمات القيم خارج المجال $\delta E^{(0)}$ الذي من أجله

²⁷ إن هذا الحد $\left| \langle \beta_f, E_f^{(0)} | V | i \rangle \right|^2 \rho(E_f^{(0)}, \beta_f)$ يمكن أن يتغير بشكل معتبر ضمن مجال التكامل $\Delta E_f^{(0)}$ على قيم الطاقة $E_f^{(0)}$ بحيث لا يمكن إخراجها من التكامل (6-100)، ولكن حقيقة أن قيم الدالة F خارج المجال $\delta E^{(0)}$ تكون صغيرة جداً، بل تكاد تكون منعدمة مقارنة بمساهمة طاقات مجال القيمة المركزية يجعل من تأثير الحد السابق مهملًا في حساب التكامل خارج المجال $\delta E^{(0)}$. وبما أننا نهتم بالمساهمة الأساسية للمجال $\delta E^{(0)}$ في القيم الكبيرة للدالة F فإن الصغر الشديد للمجال $\delta E^{(0)}$ يسمح باعتبار الحد المذكور ثابتاً فيه وبالتالي إخراجها من التكامل.

قمنا بالافتراضات السابقة، بل إضافة حتى مساهمات القيم الخارجة عن المجال $\Delta E_f^{(0)}$ ، ولكنها في النهاية ليست ذات تأثير يأخذ في الحسبان نظرا للطبيعة التجاوبية للدالة F). وباستعمال العلاقة (6-88) التي تصير هنا كما يلي

$$(109-6) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} F\left(t, \frac{E_f^{(0)} - E_i^{(0)}}{\hbar}\right) dE_f^{(0)} = 2\pi\hbar t$$

وتعويضها في (6-108) نجد نفس النتيجة (6-106). أوضحت هذه الطريقة البديلة أنه بالإضافة إلى شرط صلاحية نظرية الاضطراب من الرتبة الأولى، يجب اعتبار الشرط (6-107) أيضا.

2.3.7 معدل (منسوب) الانتقال للحالات النهائية المتصلة- القاعدة الذهبية لفيرمي Fermi golden rule

يعرف معدل الانتقال (transition rate) بأنه احتمال الانتقال في وحدة الزمن، أي

$$(110-6) \quad \mathcal{W}_{i \rightarrow D_f} = \frac{d\mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t)}{dt}$$

وبالتالي فإن معدل الانتقال من حالة منفصلة إلى مجموعة من الحالات النهائية المتصلة تحت تأثير الاضطراب الثابت سيكون مستقلا عن الزمن لأن احتمال الانتقال في هذه الحالة سيكون متناسبا خطيا مع الزمن كما توضحه العلاقة (6-106) والتي نجد منها أن

$$(111-6) \quad \mathcal{W}_{i \rightarrow D_f} = \frac{2\pi}{\hbar} \Delta\beta_f \left| \langle \beta_f, E_f^{(0)} = E_i^{(0)} | V | i \rangle \right|^2 \rho(E_f^{(0)} = E_i^{(0)}, \beta_f)$$

فإن لم نأخذ في الحسبان درجة انحلال المستويات، سنجد النتيجة الأكثر شيوعا

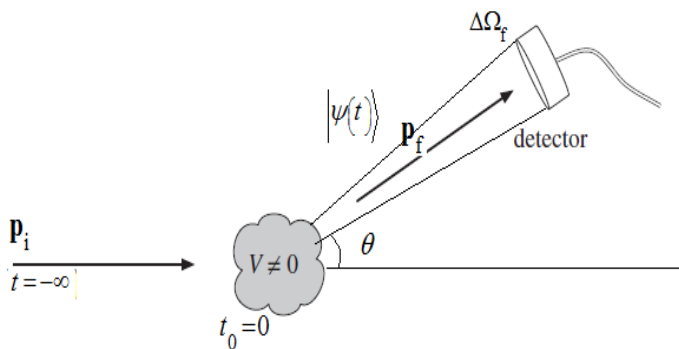
$$(112-6) \quad \mathcal{W}_{i \rightarrow D_f} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle E_f^{(0)} = E_i^{(0)} | V | i \rangle \right|^2 \rho(E_i^{(0)})$$

كما يمكن تعريف معدل الانتقال في وحدة الزمن ولوحدة درجة الانحلال كما يلي

$$(113-6) \quad w_{i \rightarrow D_f} = \frac{\mathcal{W}_{i \rightarrow D_f}}{\Delta\beta_f} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \beta_f, E_f^{(0)} = E_i^{(0)} | V | i \rangle \right|^2 \rho(E_f^{(0)} = E_i^{(0)}, \beta_f)$$

رغم أن الذي تحصل عليهما أولا هو ديراك، إلا أن هذه النتيجة (وبصفة مكافئة (6-111) أو (6-112)) تسمى بالقاعدة الذهبية لفيرمي لأن هذا الأخير هو من أطلق عليها هذا الاسم وذلك لأهميتها الكبيرة وكثرة استعمالها سواء في الفيزياء الذرية والنوية أو غيرهما. نشير هنا إلى أن هذه القاعدة الذهبية ليست صالحة من أجل الاضطراب الثابت فقط، بل حتى من أجل الاضطراب المتعلق بالزمن كالاضطراب الاهتزازي الجيبي الذي سنعالجه فيما بعد. في الفقرة التالية سنعالج مثلا بسيطا يسمح لنا بتطبيق هذه القاعدة.

3.3.7 مسألة تشتت الجسيم الحر بواسطة كمون $V(\mathbf{r})$ - المعالجة الاضطرابية



إن مسألة التشتت المرين لجسيم حر، اندفاعه الابتدائي \mathbf{p}_i معلوم، بواسطة كمون $V(\mathbf{r})$ هي أحد الأمثلة عن الانتقال من حالة ابتدائية منفصلة $|\mathbf{p}_i\rangle$ إلى مجموعة من الحالات النهائية المتصلة $\{|\mathbf{p}\rangle\}$ اندفاعاتها متمركزة حول قيمة نهائية \mathbf{p}_f . إن جهاز الكشف (الكاشف - detector) عن الجسيم المشتت لا بد وأن تكون له نافذة تسجيل أبعادها منتهية (مهما كانت صغيرة)، وبالتالي فإن قيمة الطاقة التي يسجلها هذا الكاشف حتما ستقع ضمن مجال طاقي

ΔE_f مرتبط بأبعاد نافذته متناسبة بدورها مع قيمة الزاوية المجسمة $\Delta\Omega_f$ (انظر الشكل). في الحقيقة، إن كان اتجاه الجسيم المشتت يقع ضمن الزاوية المجسمة $\Delta\Omega_f$ فإن الكاشف سيسجل وجود جسيم اندفاعه \mathbf{p} يقع ضمن المجال D_f . أي مجال الاندفاعات \mathbf{p} المتمركزة حول القيمة النهائية \mathbf{p}_f والتي تحقق الشرط السابق (أي الاندفاعات \mathbf{p} المنجبهة وفق الزاوية المجسمة $\Delta\Omega_f$)، وبالتالي فإن طاقة الجسيم التي يسجلها الكاشف ستكون

بدورها متمركزة حول القيمة النهائية E_f المرتبطة بالاندفاع \mathbf{p}_f بواسطة العلاقة $E_f = \mathbf{p}_f^2/2m$ والموجودة ضمن المجال ΔE_f . إن حالة الجسيم في أي لحظة زمنية بعد التفاعل مع الكمون المُشْتَتِ يمثلها الشعاع $|\psi(t)\rangle$ ، وبالتالي فإن احتمال تسجيل الكاشف لجسيم وفق الشروط أعلاه هو

$$(114-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t) = \int_{\mathbf{p} \in D_f} d\mathcal{P}_{\mathbf{p}_i \rightarrow \mathbf{p}}(t) = \int_{\mathbf{p} \in D_f} |\langle \mathbf{p} | \psi(t) \rangle|^2 d\mathbf{p}$$

وكما فعلنا في (96-6)، يمكن أن نعوض كثافة الاحتمال $|\langle \mathbf{p} | \psi(t) \rangle|^2$ بالعبارة

$$(115-6) \quad |\langle \mathbf{p} | \psi(t) \rangle|^2 = \left[\frac{2|V_{\mathbf{p}\mathbf{p}_i}|}{\hbar\omega_{\mathbf{p}\mathbf{p}_i}} \sin\left(\frac{\omega_{\mathbf{p}\mathbf{p}_i}t}{2}\right) \right]^2$$

وحتى نظهر حد الطاقة في العلاقة (114-6) يجب أن نجد نبحث عن كثافة الحالات لهذه المسألة كما فعلنا في (100-6). في الحقيقة، إن عنصر الحجم في فضاء الاندفاعات هو

$$(116-6) \quad d^3p = d\mathbf{p} = p^2 dp d\Omega$$

وهذا الحجم العنصري يحتوي على

1- الاندفاعات التي لها نفس الطول $|\mathbf{p}|$ ولكنها مختلفة الاتجاهات، فرؤوس نهاياتها تقع ضمن سطح كروي يحدده عنصر الزاوية الصلبة $d\Omega$. إن هذه الحالات $|\mathbf{p}\rangle$ تشترك إذن في نفس قيمة الطاقة E لأن هذه الأخيرة مرتبطة بمربع طول الاندفاع وليس باتجاهه، أي أن طاقة هذه الحالات $|\mathbf{p}\rangle$ منحلة ودرجة انحلالها $d\Omega$.

2- الاندفاعات التي يقع طولها ضمن المجال p و $p + dp$ ، وطاقات هذه الحالات $|\mathbf{p}\rangle$ تقع إذن ضمن المجال E و $E + dE$ وبالتالي فإن علاقة عدد الحالات $|\mathbf{p}\rangle$ التي يحتويها عنصر الحجم d^3p في فضاء الاندفاعات بالمجال الطاقي dE هي (انظر (99-6))

$$(117-6) \quad d^3p = \rho(E, \Omega) dE d\Omega$$

وبمقارنة بين (116-6) و (117-6) نجد أن كثافة الحالات (عدد الحالات في وحدة الطاقة وفي وحدة الزاوية المجسمة) هي

$$(118-6) \quad \rho(E, \Omega) = \rho(E) = p^2 \frac{dp}{dE} = m\sqrt{2mE}$$

وهي غير متعلقة إذن بالزاوية المجسمة. من جهة أخرى، إن رمزنا ب \mathbf{p}_f إلى كل الاندفاعات $\mathbf{p} \in D_f$ ، وليس فقط للاندفاع النهائي المركزي، فمن المستحسن إعادة كتابة (114-6) كما يلي

$$(119-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t) = \int_{\mathbf{p}_f \in D_f} |\langle \mathbf{p}_f | \psi(t) \rangle|^2 d\mathbf{p}_f$$

و التي يمكن أن نكتبها الآن أيضا، حسب (117-6)، كما يلي

$$(120-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t) = \int_{\{E_f \in \Delta E_f; \Omega_f \in \Delta \Omega_f\}} |\langle E_f, \Omega_f | \psi(t) \rangle|^2 \rho(E_f, \Omega_f) dE_f d\Omega_f$$

حيث وضعنا

$$(121-6) \quad \langle \mathbf{p}_f | \psi(t) \rangle \equiv \langle E_f, \Omega_f | \psi(t) \rangle$$

لكي نبرز تعلق كثافة الاحتمال $|\langle \mathbf{p}_f | \psi(t) \rangle|^2$ بطاقة الحالات النهائية E_f ودرجات انحلالها Ω_f . إن نتيجة احتمال الانتقال (120-6) يمكن الحصول عليها كما فعلنا في الفقرة السابقة باتباع نفس الخطوات، ولذلك فحسب (106-6) فإن

$$(122-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t) = \frac{2\pi t}{\hbar} \Delta \Omega_f |\langle E_f = E_i | V | \mathbf{p}_i \rangle|^2 \rho(E_f = E_i)$$

إن العناصر المصفوفية $V_{\mathbf{p}_f \mathbf{p}_i}$ الموجودة في (122-6) هي

$$(123-6) \quad V_{\mathbf{p}_f \mathbf{p}_i} = \langle \mathbf{p}_f | V | \mathbf{p}_i \rangle = \langle E_f = E_i | V | \mathbf{p}_i \rangle$$

حيث أن المساواة $E_f = E_i$ تعني أن $|\mathbf{p}_f| = |\mathbf{p}_i|$ وليس $\mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f$ ، فالحالتان $|\mathbf{p}_i\rangle$ و $|\mathbf{p}_f\rangle$ مختلفتان ولكنهما مشتركتان في نفس المستوى الطاقوي E_i . كمت أن كثافة الحالات $\rho(E_f = E_i)$ غير متعلقة بالزاوية الصلبة كما هو واضح من العلاقة (118-6). ولإيجاد العبارة الصريحة لاحتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t)$ نقوم بحساب عنصر المصفوفة $V_{\mathbf{p}_f \mathbf{p}_i}$ كما يلي

$$(124-6) \quad V_{\mathbf{p}_f \mathbf{p}_i} = \langle \mathbf{p}_f | V | \mathbf{p}_i \rangle = \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \langle \mathbf{p}_f | \mathbf{r} \rangle \langle \mathbf{r} | V | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \mathbf{p}_i \rangle$$

حيث ادخلنا مرتان علاقة الانغلاق لتمثيل الموضع $\{|\mathbf{r}\rangle\}$ ، وإن استخدمنا العلاقات التالية

$$(125-6) \quad \begin{cases} \langle \mathbf{r} | V | \mathbf{r}' \rangle = V(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ \langle \mathbf{r} | \mathbf{p} \rangle = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^{\frac{3}{2}} e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} \end{cases}$$

فإننا نجد

$$(126-6) \quad V_{\mathbf{p}_f \mathbf{p}_i} = \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^3 \int V(\mathbf{r}) e^{i\frac{(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} d\mathbf{r}$$

وبتعبير كل من (118-6) و (126-6) في (122-6) نجد

$$(127-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow D_f}(t) = \frac{2\pi t}{\hbar} \Delta\Omega_f m \sqrt{2mE_i} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^6 \left| \int V(\mathbf{r}) e^{i\frac{(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} d\mathbf{r} \right|^2$$

إن احتمال انتقال حالة الجسيم المتشتت من الحالة $|\mathbf{p}_i\rangle$ إلى مجموعة الحالات النهائية المتصلة $|\mathbf{p}_f\rangle$ ($\mathbf{p}_f \in D_f$) في وحدة الزمن ووحدة الزاوية المجسمة هو ما سميناه معدل الانتقال $\mathcal{W}_{i \rightarrow D_f}$ الذي نجده حسب (127-6) ما يلي

$$(128-6) \quad \mathcal{W}_{i \rightarrow D_f} = \frac{2\pi}{\hbar} m \sqrt{2mE_i} \left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^6 \left| \int V(\mathbf{r}) e^{i\frac{(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f)\cdot\mathbf{r}}{\hbar}} d\mathbf{r} \right|^2$$

إن معدل الانتقال $\mathcal{W}_{i \rightarrow D_f}$ يمثل عدد الجسيمات المتشتتة في وحدة الزمن وفي وحدة الزاوية المجسمة في الاتجاه المحدد بالاندفاع النهائي \mathbf{p}_f ، وبقسمته على تدفق الجسيمات الواردة \mathcal{F} نتحصل على المقطع الفعال التفاضلي للتفاعل²⁸.

8. حالة الاضطراب الاهتزازي الجيبي

نعالج هنا مسألة غاية في الأهمية، وهي مسألة الاضطراب الاهتزازي الجيبي وليكن من الشكل التالي مثلا

$$(129-6) \quad V(t) = A \sin(\omega t)$$

حيث A و ω سعة الاهتزاز وتواتره على الترتيب. إن تفاعل ذرة مع الأمواج الكهرومغناطيسية (وحيدة اللون) هو أحد الأمثلة عن مثل هذا الاضطراب الاهتزازي الجيبي. إن دراسة هذا الأخير باستخدام التصحيح من الرتبة الأولى لنظرية الاضطرابات المتعلقة بالزمن تسمح بتفسير ظاهري الإصدار والامتصاص للإشعاع الكهرومغناطيسي من طرف الذرة عبر مفهوم التجاوب الذي تعرضنا له سابقا في حالة الاضطراب الثابت. فانتقال الذرة بين حالاتها المستقرة يوافق إصدار أو امتصاص فوتون من هذا الحقل الكهرومغناطيسي كما هو معلوم، واحتمال الانتقال هذا يمكن حسابه انطلاقا من النتيجة العامة (81-6).

²⁸ إن هذا يتطلب منا إرسال حزمة من الجسيمات كلها حاضرة في نفس الحالة الابتدائية $|\mathbf{p}_i\rangle$ أو نقوم بإرسال جسيم واحد ونعيد التجربة عددا كبيرا من المرات حتى نتحصل على مفهوم المقطع الفعال المذكور هنا. ونكتب إذن

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\mathcal{W}_{i \rightarrow D_f}}{\mathcal{F}}$$

للتبسيط، سنقتصر فيما سيأتي على شرح حالة انتقال الجملة من حالة ابتدائية منفصلة $|i\rangle$ إلى حالة نهائية منفصلة $|f\rangle$ محددة جيدا ومختلفة عن $|i\rangle$ ونعتبر أيضا أن $E_i \neq E_f$ (طيف غير منحل). في حين سنشير باختصار إلى معالجة احتمال الانتقال من حالة ابتدائية منفصلة إلى مجموعة من الحالات المتصلة النهائية، لأن معالجتها تتم بنفس الطريقة التي عالجتنا بها حالة الاضطراب الثابت، ونرى كيف تكون عبارة القاعدة الذهبية لفيرمي في هذه الحالة.

1.8 احتمال الانتقال من حالة منفصلة $|i\rangle$ إلى حالة منفصلة أخرى $|f\rangle$

لنعتبر الجملة موجودة في اللحظة الابتدائية في حالة منفصلة $|i\rangle$ ، نود هنا أن ندرس احتمال انتقالها إلى حالة نهائية منفصلة $|f\rangle$ محددة جيدا ومختلفة عن $|i\rangle$ تحت تأثير الاضطراب الجيبي (6-129). سنعتبر أن طاقتيها مختلفتين $E_i \neq E_f$ (طيف غير منحل). في الحقيقة، يجب أن ننبه إلى أن الاضطراب V عبارة عن مؤثر ولذلك يجب أن يكون A كذلك، كما سنعتبر هذا الأخير مستقلا عن الزمن، فبتعويض (6-129) في (6-81) نجد أن احتمال الانتقال من $|i\rangle$ إلى $|f\rangle$ في هذه الحالة هو²⁹

$$(130-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t) = \frac{|A_{fi}|^2}{4\hbar^2} \left| \int_{t_0}^t dt_1 \left[e^{i(\omega_{fi} + \omega)t_1} + e^{i(\omega_{fi} - \omega)t_1} \right] \right|^2$$

والعناصر المصفوفية A_{fi} هي طبعاً $\langle f|A|i\rangle$. فإن أخذنا كل لحظة ابتدائية $t_0 = 0$ ، فإن (130-6) تصبح

$$(131-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t, \omega) = \frac{|A_{fi}|^2}{4\hbar^2} |a_+(t, \omega) - a_-(t, \omega)|^2$$

حيث وضعنا

$$(132-6) \quad a_+(t, \omega) = \frac{1 - e^{i(\omega_{fi} + \omega)t}}{\omega_{fi} + \omega} = -2ie \frac{i(\omega_{fi} + \omega)t \sin[(\omega_{fi} + \omega)t/2]}{2(\omega_{fi} + \omega)}$$

$$(133-6) \quad a_-(t, \omega) = \frac{1 - e^{i(\omega_{fi} - \omega)t}}{\omega_{fi} - \omega} = -2ie \frac{i(\omega_{fi} - \omega)t \sin[(\omega_{fi} - \omega)t/2]}{2(\omega_{fi} - \omega)}$$

نلاحظ أن هذان المعاملان يتعلقان بالزمن وبتواتر الاضطراب ω الذي تنفق على اعتباره موجبا ($\omega \geq 0$). لنعتبر الآن أن طاقة الحالة النهائية أكبر من طاقة الحالة الابتدائية $E_i < E_f$ ، (أو $\omega_{fi} > 0$)، فإن كان زمن التفاعل t مع الاضطراب كبيرا بشكل كاف (سنرى هذه الكفاية الآن) فإننا نلاحظ أنه من أجل $\omega = \omega_{fi}$ فإن a_- هو المعامل المهيمن في (131-6) بينما يكون a_+ مهملاً أمامه، أي

$$(134-6) \quad |a_-(t, \omega = \omega_{fi})| \gg |a_+(t, \omega = \omega_{fi})|, \text{ if } \omega_{fi} > 0$$

في الواقع، يمكننا تقدير كبر الزمن t الذي تكون من أجله (134-6) صحيحة، فإذا كانت $\omega_{fi} > 0$ فإننا نجد حسب (132-6) و (133-6) أن

$$(135-6) \quad |a_-(t, \omega = \omega_{fi})| = \left| \lim_{\omega \rightarrow \omega_{fi}} \left\{ -2ie \frac{i(\omega_{fi} - \omega)t \sin[(\omega_{fi} - \omega)t/2]}{2(\omega_{fi} - \omega)} \right\} \right| = t$$

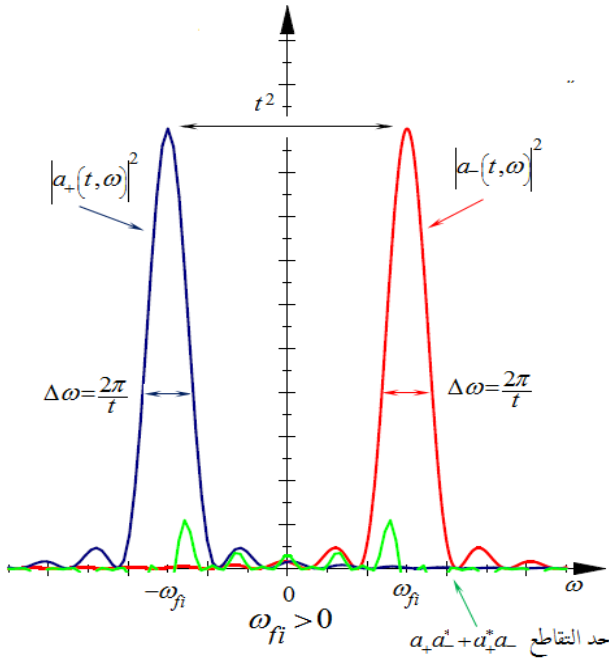
بينما

$$(136-6) \quad |a_+(t, \omega = \omega_{fi})| = \left| -ie^{i\omega_{fi}t} \frac{\sin(\omega_{fi}t)}{\omega_{fi}} \right| \leq \frac{1}{\omega_{fi}}$$

إذن حتى نتحقق (134-6) يجب أن يكون

$$(137-6) \quad t \gg \frac{1}{\omega_{fi}}$$

²⁹ حيث استخدمنا العلاقة $\sin x = (e^{ix} - e^{-ix})/2i$.



سنرى تفسير شرط الصلاحية هذا فيما بعد. في الحقيقة، إن نشر العبارة (131-6) يحتوي أيضا على حد التقاطع $(a_+ a_* + a_* a_-)$ بين هذين الحدين المركبين بالإضافة إلى $|a_-(t, \omega)|^2$ و $|a_+(t, \omega)|^2$. لكن هذا الحد سيكون مهملًا، بل شبه معدوم كلما كان زمن التفاعل كبيرًا ومحققًا للشرط (137-6). يمكن أن نرى ذلك في الرسم البياني لهذين المعاملين من أجل $\omega_{fi} > 0$. فباعتبارنا أن تواتر الاضطراب الجيبي موجب، ففي منطقة القيم الموجبة لهذا التواتر $\omega \geq 0$ نلاحظ هيمنة الحد $|a_-(t, \omega)|^2$ وتلاشي الحد $|a_+(t, \omega)|^2$ وذلك في الحالة التي تكون فيها طاقة الحالة النهائية أكبر من طاقة الحالة الابتدائية. بالإضافة إلى ذلك يمكن تبرير الشرط (137-6) ببساطة من خلال المنحنى المشترك السابق. فحتى يمكن إهمال أحد الحدين مقارنة مع الحد الأخر يجب أن يكون التداخل بينهما ضعيفا وذلك بأن يكون البعد بين مركزي قمتيهما أكبر بكثير من عرض هاتين القمتين. ومن خلال الشكل يمكن أن نكتب أن

$$(138-6) \quad 2\omega_{fi} \gg \Delta\omega = \frac{2\pi}{t} \Rightarrow t \gg \frac{\pi}{\omega_{fi}}$$

وفي المقابل سنجد أيضا أنه من أجل $\omega_{fi} < 0$ ، أي في حالة كون طاقة الحالة الابتدائية $|i\rangle$ أكبر من طاقة الحالة النهائية $|f\rangle$ ، أي $E_i > E_f$ ، فإن الأمر ينعكس فيصبح الحد $|a_+(t, \omega)|^2$ هو المهيمن بجوار التواتر $(\omega = -\omega_{fi} \geq 0)$ في حين يتلاشى الحد $|a_-(t, \omega)|^2$. ونكتب³⁰

$$(139-6) \quad |a_-(t, \omega = -\omega_{fi})| \ll |a_+(t, \omega = -\omega_{fi})|, \text{ if } \omega_{fi} < 0$$

تتحقق من أجل نفس الشرط (137-6) أيضا، ولكن نكتبه هنا وبشكل عام

$$(140-6) \quad t \gg \frac{1}{|\omega_{fi}|}$$

دعونا نسعي كل الشروط (137-6) و (138-6) و (140-6) بشرط صلاحية تقريب الحد المجاوب والذي سنناقش مضمونه الفيزيائي وصلاحيته في فقرة خاصة فيما بعد. قبل ذلك نود أن نعالج كل حالة من الحالتين السابقتين على حدة.

1- حالة $\omega_{fi} > 0$

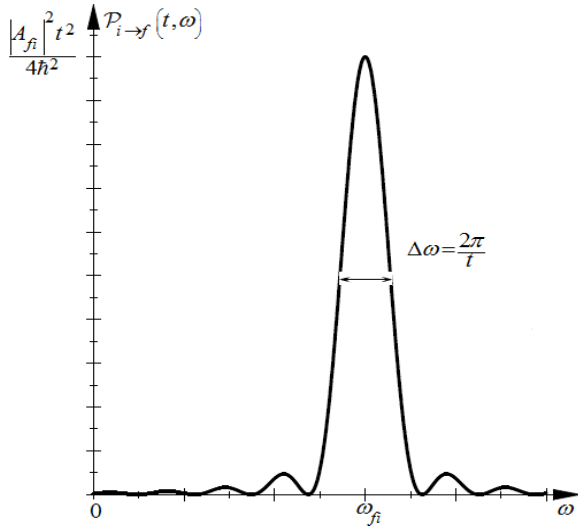
في هذه الحالة التي تكون فيها طاقة الحالة النهائية أكبر من طاقة الحالة الابتدائية $E_i < E_f$ ومن خلال ما ذكرناه أعلاه، فمن أجل قيم تواتر الاضطراب ω القريبة جدا من قيمة تواتر بور ω_{fi} ، فإنه حسب شرط الحد المجاوب (137-6) الذي نتحقق من أجله المتراجحة (134-6) يمكن أن نكتب احتمال الانتقال (131-6) كما يلي

$$(141-6) \quad P_{i \rightarrow f}(t, \omega) \cong \frac{|A_{fi}|^2}{4\hbar^2} |a_-(t, \omega)|^2 = \frac{|A_{fi}|^2}{4\hbar^2} g(t, \omega)$$

حيث وضعنا

$$(142-6) \quad g(t, \omega) = \left| \frac{2 \sin[(\omega_{fi} - \omega)t/2]}{(\omega_{fi} - \omega)} \right|^2$$

³⁰ وفي هذه الحالة فإن المنحنى باللون الأحمر يصبح ممثلا للحد $|a_+(t, \omega)|^2$ بينما الأزرق ممثلا للحد $|a_-(t, \omega)|^2$.



إن هذه الدالة $g(t, \omega)$ تشبه الدالة $F(t, \omega_{fi})$ غير أن هذه الأخيرة، كدالة متعلقة بتواتر بور ω_{fi} ، تظهر السلوك التجاوبي بجوار الصفر، أي في حالة المستوى الطاقوي المنحل $\omega_{fi} = 0$ ، في حين أن الأولى g كدالة متعلقة بتواتر الاضطراب تظهر السلوك التجاوبي عند القيمة $\omega = \omega_{fi} \neq 0$ ، وتبعاً لذلك، ومن أجل لحظة زمنية ثابتة، فإن احتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \to f}(t, \omega)$ كدالة لتواتر الاضطراب الجيبي سيُظهر سلوكاً تجاوبياً بجوار تواتر بور ω_{fi} كما يوضحه الشكل المقابل. فالاحتمال يأخذ إذن قيمته العظمى عندما يكون تواتر الاضطراب يساوي تواتر بور، ويتناقص بسرعة كبيرة بالابتعاد عن هذه القيمة حيث أن عرض القمّة المركزية هو $\Delta\omega = 2\pi/t$ ، والتي تضيق كلما ازداد زمن تفاعل الجملة مع الاضطراب الجيبي في حين تزداد قيمة الاحتمال الأعظمي بازدياد الزمن لأنه يكون لدينا

$$(143-6) \quad \mathcal{P}_{i \to f}(t, \omega = \omega_{fi}) = \frac{|A_{fi}|^2}{4\hbar^2} t^2$$

وفي هذه الحالة فإن الجملة تتجاوب مع الاضطراب عبر آلية امتصاص كم من الطاقة مقدارها $\hbar\omega$ يساوي الفرق بين طاقتي الحالة الابتدائية والحالة النهائية. أي

$$(144-6) \quad \hbar\omega = \hbar\omega_{fi} = E_f - E_i$$

وتنتقل بالتالي من الحالة الابتدائية $|i\rangle$ إلى الحالة النهائية $|f\rangle$ كما يوضحه الشكل المبسط في الجانب. ولهذا السبب يسمى في هذه الحالة الحد $a_-(t, \omega)$ بالحد المُجاوب لأنه هو المسؤول عن السلوك التجاوبي لاحتمال الانتقال، في حين أن الحد $a_+(t, \omega)$ يسمى بالحد ضد المجاوب (وهو الذي يمكن إهماله هنا في عبارة الاحتمال (141-6) وكما يمكن أيضاً ملاحظة ذلك من البيان السابق المشترك لهما بجوار ω_{fi}). إن العلاقة (144-6) ما هي إلا علاقة بور لامتصاص كم الطاقة عند تفاعل الجملة مع اضطراب خارجي. لنمر الآن إلى الحالة الثانية.

2- حالة $\omega_{fi} < 0$

في هذه الحالة تكون فيها طاقة الحالة النهائية أصغر من طاقة الحالة الابتدائية $E_i > E_f$ ، وبالتالي فإن الحد المهمين الآن من أجل زمن تفاعل كبير هو $a_+(t, \omega)$ بينما نهمل الحد الآخر $a_-(t, \omega)$ وذلك من أجل قيم تواتر الاضطراب ω القريبة جداً من قيمة تواتر بور $(\omega = -\omega_{fi})$. لذلك فإنه حسب شرط الحد المجاوب (140-6) الذي يسمح بتحقيق (139-6)، يمكن أن نكتب احتمال الانتقال (131-6) هنا كما يلي

$$(145-6) \quad \mathcal{P}_{i \to f}(t, \omega) \cong \frac{|A_{fi}|^2}{4\hbar^2} |a_+(t, \omega)|^2 = \frac{|A_{fi}|^2}{4\hbar^2} g'(t, \omega)$$

حيث وضعنا

$$(146-6) \quad g'(t, \omega) = \left| \frac{2 \sin[(\omega_{fi} + \omega)t/2]}{(\omega_{fi} + \omega)} \right|^2$$

فمن أجل لحظة زمنية t معينة تحقق (140-6)، فإن هذه الدالة الجديدة $g'(t, \omega)$ كدالة متعلقة بتواتر الاضطراب ω تظهر السلوك التجاوبي عند القيمة $(-\omega_{fi})$. لذلك فإن احتمال الانتقال $\mathcal{P}_{i \to f}(t, \omega)$ سيظهر تبعاً لذلك سلوكاً تجاوبياً بجوار تواتر بور $(-\omega_{fi})$. فهو يأخذ قيمته العظمى عندما يوافق تواتر الاضطراب ω هذه القيمة، ويتناقص بسرعة كبيرة بالابتعاد عنها. إن القيمة العظمى لاحتمال الانتقال في هذه الحالة هي نفسها كما في (143-6) غير أننا نكتب

$$(147-6) \quad P_{i \rightarrow f}(t, \omega = -\omega_{fi} = |\omega_{fi}|) = \frac{|A_{fi}|^2}{4\hbar^2} t^2$$

وفي هذه الحالة فإن الجملة تتجاوب أيضا مع الاضطراب ولكن المرة عن طريق إصدار كم من الطاقة مقداره $\hbar\omega$ يساوي الفرق بين طاقتي الحالة الابتدائية والحالة النهائية. أي أن الاضطراب يحرض الجملة على العبور من مستوى طاقتي أعلى إلى مستوى أدنى، ولذلك نسميه الإصدار المحرض أو المحثوث، ونكتب علاقة بور للإصدار إذن

$$(148-6) \quad \hbar\omega = \hbar|\omega_{fi}| = |E_f - E_i| = E_i - E_f$$

وتنتقل الجملة بالتالي من الحالة النهائية $|i\rangle$ ذات المستوى الطاقتي الأعلى إلى الحالة النهائية $|f\rangle$ ذات المستوى الطاقتي الأدنى كما يوضحه الشكل المقابل. ونسي هنا الحد $a_-(t, \omega)$ بالحد ضد المجاب في حين أن الحد $a_+(t, \omega)$ يصبح هو الحد المجاب (عكس الحالة السابقة).

إصدار كم طاقة بصفة مخنونة بواسطة الاضطراب والانتقال من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية

2.8 مناقشة شروط الصلاحية في حالة الاضطراب الجيبي

1.2.8 تفسير شرط صلاحية تقريب الحد المجاب

لنبحث الآن عن التفسير الفيزيائي لشرط وجوب كون الزمن كبيرا بشكل كاف حتى تكون العلاقات السابقة مقبولة. لقد قمنا عند حساب احتمال الانتقال في كلتا الحالتين السابقتين بإهمال أحد الحدين $|a_+(t, \omega)|^2$ و $|a_-(t, \omega)|^2$ بالنسبة للآخر، أي إهمال الحد ضد المجاب أمام الحد المجاب، وذلك في المجال الذي يكون فيه تواتر الاضطراب ω قريبا جدا من تواتر بور $|\omega_{fi}|$ المميز لمستويات الحالات الداخلية للجملة $(\omega \cong |\omega_{fi}|)$. في الحقيقة، إن فرض الشرط (6-138) هو الذي يحكم صلاحية هذا التقريب، والذي يمكن إعادة كتابته هنا بشكل عام (أي من أجل الحالتين $\omega_{fi} > 0$ و $\omega_{fi} < 0$) كما يلي

$$(149-6) \quad t \gg \frac{\pi}{|\omega_{fi}|} \cong \frac{\pi}{\omega} = \frac{T}{2} \Rightarrow t \gg T$$

حيث T هو دور الاضطراب الجيبي. فنرى إذن من خلال هذه المتراجحة أننا نستطيع أن نفسر شرط صلاحية الحد المجاب بقولنا إنه يجب أن يكون زمن تفاعل الجملة مع الاضطراب كبيرا بشكل كاف بالنسبة لدور الاضطراب وذلك حتى يسمح للجملة بأن تحس بالتأثير الاهتزازي الجيبي له وبالتالي صلاحية النتائج السابقة. لكن إن لم يتحقق الشرط (6-149)، أي أن مدة التفاعل مع الاضطراب كانت صغيرة بالمقارنة مع دوره، فإن الجملة لن ترى هذا الاضطراب بشكل اهتزازي في هذه المدة القصيرة، بل ستراه كاضطراب خطي في الزمن ذلك أنه يسلك في هذه الحالة السلوك الخطي التالي

$$(150-6) \quad V(t) = A \sin(\omega t) \sim A\omega t ; \text{ if } t \ll T$$

2.2.8 شرط صلاحية نظرية الاضطراب في حالة الاضطراب الجيبي

في الواقع، عند الحديث عن شرط صلاحية تقريب الحد المجاب، يجب ألا ننسى أن لدينا قبل كل ذلك شرط صلاحية التقريب من الرتبة الأولى (6-82) لنظرية الاضطراب والذي يجب أن يتحقق أولا حتى نستطيع استعمال (6-131) وما نتج عنها باستعمال تقريب الحد المجاب. وللجمع بين هذين الشرطين، يجب أولا أن نميز بين حالة التجاوب $(\omega = |\omega_{fi}|)$ وغيرها $(\omega \neq |\omega_{fi}|)$ لكي نرى كيف يكون تأثير الاضطراب على الجملة. تماما كما فعلنا حين ميزنا بين تأثيرات الاضطراب الثابت على المستويات المنحلة وغير المنحلة.

$$أ- حالة التجاوب $\omega = |\omega_{fi}|$$$

من خلال العبارتين (6-143) و (6-147)، لاحظنا كيف أن احتمال الانتقال يكون في حالة التجاوب متناسبا مع مربع الزمن، وهو الأمر الذي يطرح مشكلة إمكانية كونه قريبا من الواحد (وحتى إمكانية كونه أكبر من الواحد!!)، خاصة وأنه ناتج عن فرضنا لشرط الحد المجاب، الذي أعدنا كتابته كما توضحه العبارة (6-149) التي تنص على ضرورة أن يكون زمن التفاعل مع الاضطراب كبيرا مقارنة مع دور الاهتزاز الجيبي لهذا الأخير. وهذا أمر غير

مقبول طبعاً لأن كلا من النتيجةين (6-143) و (6-147) مشتقتان من العبارة (6-130) وبالتالي (6-131)) المبنية أصلاً على أساس شرط صلاحية التقريب من الرتبة الأولى لنظرية الاضطراب المتعلق بالزمن (6-82). إذن فإن تطبيق هذا الشرط الأخير على أحد العبارتين (6-143) أو (6-147) يقودنا إلى

$$(151-6) \quad \frac{|A_{fi}|^2}{4\hbar^2} t^2 \ll 1 \Rightarrow t \ll \frac{2\hbar}{|A_{fi}|}$$

وهذا يقترح أن يكون زمن التفاعل بين الجملّة والاضطراب حدّاً أعلى بحيث يبقى الشرط (6-82) محققاً. إذن، وللجمع بين كلا الشرطين (6-149) و (6-151) يمكننا أن نكتب الحصر التالي

$$(152-6) \quad \frac{\pi}{|\omega_{fi}|} \ll t \ll \frac{2\hbar}{|A_{fi}|}$$

ما يعني أنه يجب ألا يكون زمن التفاعل كبيراً جداً بحيث يخرق شرط صلاحية التقريب من الرتبة الأولى لنظرية الاضطراب، ولا صغيراً جداً بحيث لا يحقق شرط الحدّ المجاوب. إن هذا الحصر يتوافق كما هو واضح مع فرض ضعف الاضطراب أمام الهاملتوني المستقر الذي اشتراطناه في المقدمة، لأنه يقود إلى النتيجة التالية

$$(153-6) \quad |A_{fi}| \ll \hbar |\omega_{fi}| = |E_f - E_i|$$

وفي هذا المجال الزمني (6-152) تكون نتائجنا مقبولة. صحيح أنه كلما كان الاضطراب ضعيفاً كلما كان الزمن المسموح به لبقاء النتائج السابقة صحيحة كبيراً، لكن هذا الحصر لا يعني أن زمن التفاعل لا يمكن أن يتجاوز حدود الصلاحية هذه، فهو يمكن أن يحقق شرط الحدّ المجاوب ويخرق شرط صلاحية التقريب من الرتبة الأولى في نفس الوقت بحيث يكون

$$(154-6) \quad t \gg \frac{2\hbar}{|A_{fi}|} \gg \frac{\pi}{|\omega_{fi}|}$$

وعند هذه النقطة يجب علينا البحث عن طرق بديلة لحساب احتمال الانتقال. في واقع الأمر، إن احتمال الانتقال في حالة التجاوب يكون كبيراً ويصل إلى قيمته العظمى، يعني 1، وذلك بغض النظر عن ضعف شدة الاضطراب. فمهما كان هذا الأخير ضعيفاً فإن الجملّة بانطلاقها في اللحظة الابتدائية للتفاعل من الحالة $|i\rangle$ ، ستنتقل حتماً إلى الحالة النهائية $|f\rangle$ بعد مدة زمنية معينة سواء بامتصاص أو إصدار كم من الطاقة. لتوضيح هذه النقطة، لنبأس أن نعطي هنا النتيجة التي تعطىها طريقة التقريب التجاوبي³¹ لاحتمال الانتقال من أجل أي لحظة زمنية t

$$(155-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t, \omega = \omega_{fi}) = \sin^2 \left(\frac{|A_{fi}|}{2\hbar} t \right)$$

والتي تظهر اهتزاز احتمال الانتقال بين القيمتين 1 و 0 بدور يساوي

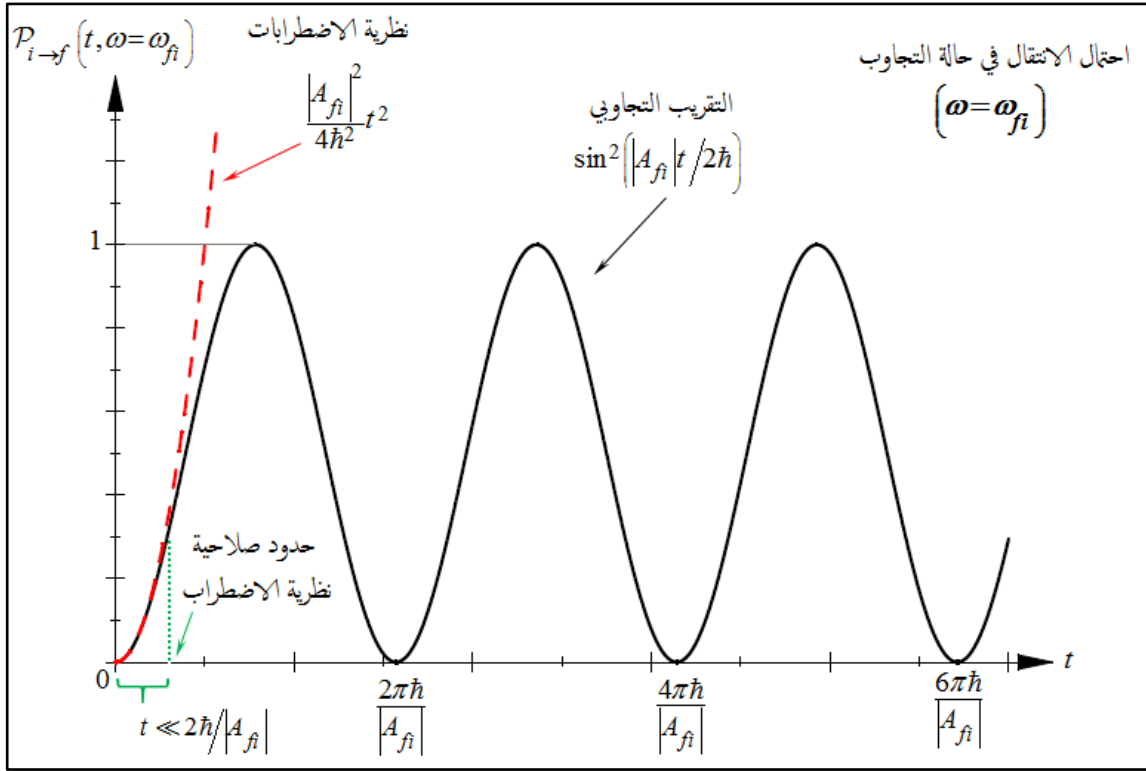
$$(156-6) \quad T_0 = 2\pi\hbar / |A_{fi}|$$

إذن ففي حالة التجاوب، نلاحظ من خلال (6-155) و (6-156) أن شدة الاضطراب $|A_{fi}|$ لا تتدخل إلا في دور اهتزاز الجملّة بين حالتها $|i\rangle$ و $|f\rangle$ فقط. فحتى لو كان الاضطراب شديد الضعف فهو سيحدث انتقالاً بين الحالات لا محالة. لكن المدة الزمنية التي تستغرقها الجملّة لهذا الانتقال تتعلق بشدة الاضطراب، فكلما كان هذا الأخير ضعيفاً كلما استغرقت الجملّة زمناً أطول وهذا يتفق مع النتيجة (6-152). ولكن يمكن أن نقول أن العبارة (6-155) تؤول إلى (6-143) من أجل الأزمنة الصغيرة

$$(157-6) \quad \mathcal{P}_{i \rightarrow f}(t, \omega = \omega_{fi}) = \sin^2 \left(\frac{|A_{fi}|}{2\hbar} t \right) \sim \frac{|A_{fi}|^2}{4\hbar^2} t^2 ; t \ll \frac{2\hbar}{|A_{fi}|}$$

كما نوضح ذلك في الشكل أدناه. لنمر الان لدراسة صلاحية التقريبات في الحالة الثانية.

³¹ طريقة بديلة أنظر [tannodji p 1335 eqs. 9 +10]



ب- حالة عدم التجاوب $\omega \neq |\omega_{fi}|$ والقرب من التجاوب $\omega \sim |\omega_{fi}|$

وفي هذه الحالة، فإنه يمكن تحديد القيمة العليا لاحتمال الانتقال عندما يكون قيمة تواتر الاضطراب موجودة بجوار تواتر بور. في الحقيقة، لدينا حسب (141-6) (أو بصورة مكافئة (145-6))

$$(158-6) \quad P_{i \to f}(t, \omega) = \frac{|A_{fi}|^2}{\hbar^2(\omega_{fi} - \omega)^2} \sin^2[(\omega_{fi} - \omega)t/2] \leq \frac{|A_{fi}|^2}{\hbar^2(\omega_{fi} - \omega)^2}$$

مع شرط الصلاحية (82-6) نجد أن يجب أن يكون

$$(159-6) \quad \frac{|A_{fi}|^2}{\hbar^2(\omega_{fi} - \omega)^2} \ll 1 \Rightarrow |A_{fi}| \ll \hbar|\omega_{fi} - \omega|$$

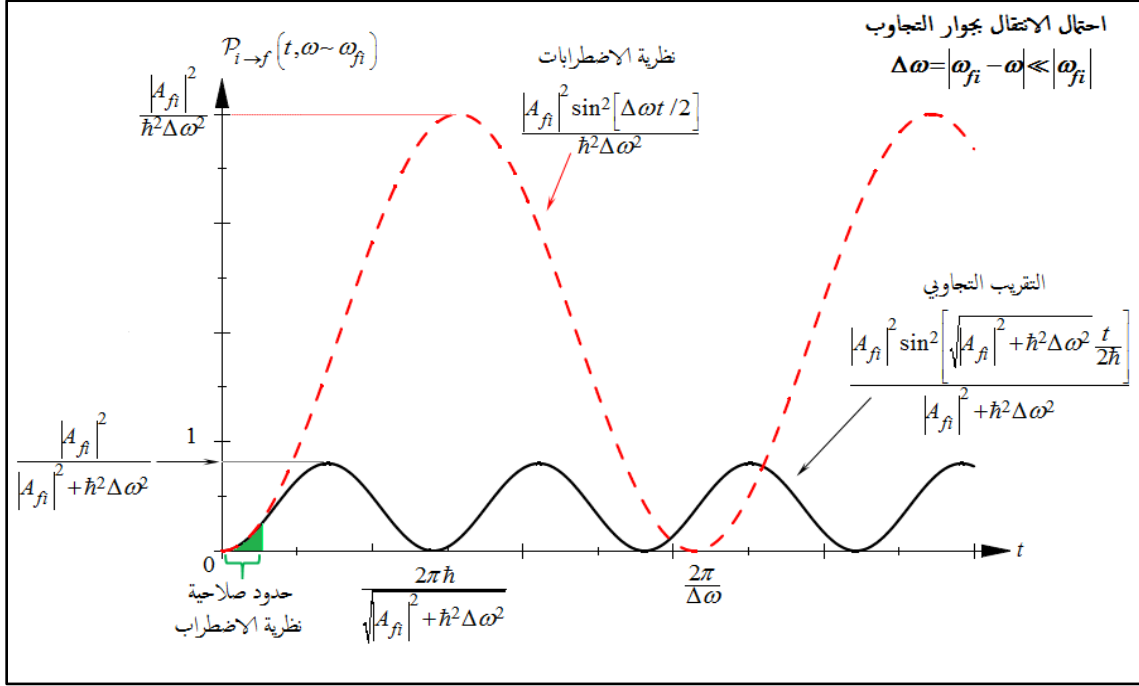
وهذا يعني أنه يكفي أن يكون الاضطراب ضعيفا جد أمام الفرق³² $|\omega_{fi} - \omega|$ حتى تكون النتيجة صالحة مهما كان زمن التفاعل. عكس حالة التجاوب التي تكون صالحة من أجل أزمنة صغيرة. لكن هذا سيجعل قيم الاحتمال ضعيفة جدا نظرا لوجود شدة الاضطراب كعامل ضرب في قيمته. فإن كان تواتر الاضطراب قريبا من قيمة تواتر بور، فإن المتراجحة (159-6) يمكنها ألا تتحقق، وبالتالي يمكن أن يكون احتمال الانتقال كبيرا ويصل إلى الواحد لأننا سنكون بجوار التجاوب، بل يمكن أن تعطي نتائج مناقضة بأن يكون الاحتمال أكبر من الواحد إن اقتربنا كثيرا من تجاوب لأن المتراجحة (159-6) يمكن أن تنعكس بغض النظر عن ضعف الاضطراب، وهذا يوضح أهمية الشرط (159-6) في قبول النتيجة (158-6). وعلى الرغم من ذلك، وحتى بالنسبة للتواترات التي تقترب فيها جدا من حالة التجاوب، فإن (158-6) يمكن أن تصف الاحتمال ولكن في أزمنة تفاعل صغيرة جدا. في الواقع، فباستخدام التقريب التجاوبي تكون عبارة الاحتمال هي

$$(160-6) \quad P_{i \to f}(t, \omega) = \frac{|A_{fi}|^2}{|A_{fi}|^2 + \hbar^2(\omega_{fi} - \omega)^2} \sin^2 \left[\sqrt{|A_{fi}|^2 + \hbar^2(\omega_{fi} - \omega)^2} \frac{t}{2\hbar} \right]$$

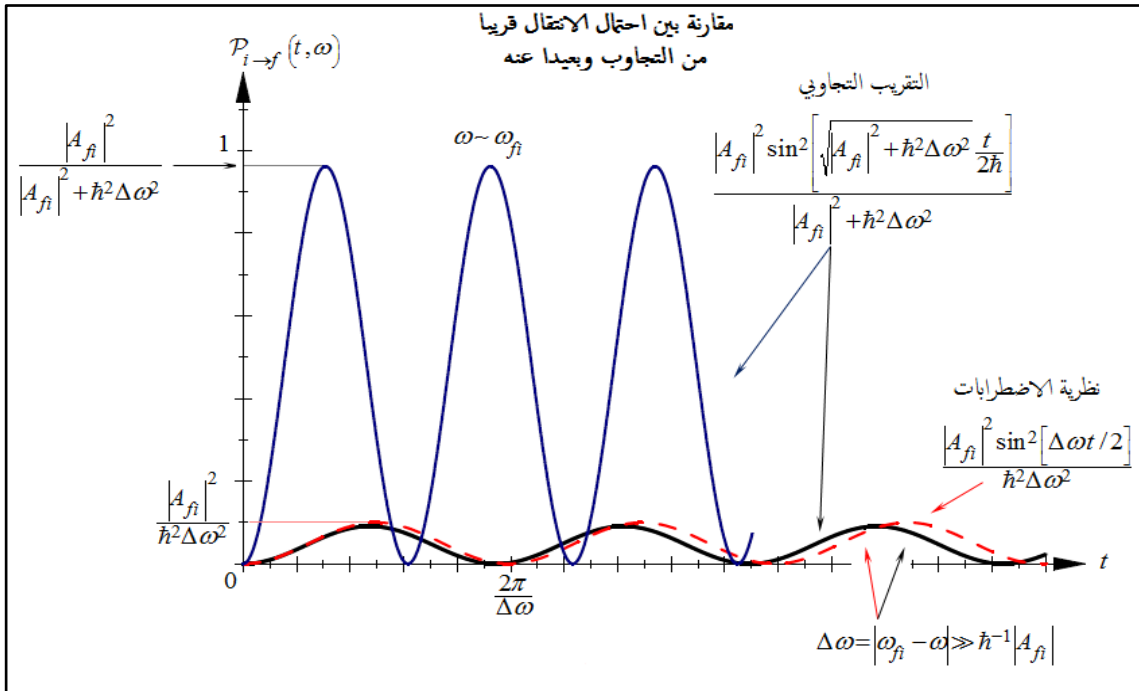
³² يجب أن نميز بين كون الاضطراب ضعيفا أمام الفرق بين المستويات الطاقوية للجملة كما تدل عليه المتراجحة (153-6) وبين كونه ضعيفا أمام الفرق (159-6). فالشرط الأول منهما لازم وضروري لبناء نظرية الاضطرابات، بينما الشرط الثاني ليس ضروريا، بل يمكن أن تخرقه شدة الاضطراب المطبق وخاصة عند التواترات القريبة جدا من التجاوب.

التي نلاحظ من خلالها أنه إذا كنا قريبين من التجاوب، أي $(\omega \sim \omega_{fi})$ ، فإن سعة الاحتمال (6-160) تقترب من الواحد وذلك مهما كان الاضطراب ضعيفا، أي أن احتمال قدرته على نقل الجملة من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية يكون كبيرا كلما اقتربنا من التجاوب. لكن من أجل زمن تفاعل صغير جدا فإن كلا من (6-158) و (6-160) يؤولان إلى نفس النتيجة، ولذلك قلنا أن (6-158) تبقى صحيحة في هذه الأزمنة الصغيرة والتي تتناسب عكسا مع شدة الاضطراب $|A_{fi}|$. أما في حال التجاوب بالضبط، فإن (6-160) تصبح نفسها العبارة (6-155). من جهة أخرى، فإن كان تواتر الاضطراب بعيدا عن التجاوب بحيث تتحقق (6-159) فإننا نرى أن (6-160) تؤول إلى العبارة (6-158) التي قلنا أنها تكون صالحة مهما كانت مدة التفاعل. في الشكلين أسفله توضيحات حول شروط الصلاحية وقيم الاحتمالات التي ناقشناها هنا.

في الأخير، نقول أنه رغم محدودية صلاحية نتائج نظرية الاضطرابات المستمرة، إلا أنها تتيح لنا إظهار السلوك التجاوبي لاحتمال الانتقال سواء في حالة الاضطراب الثابت أو في حلة الاضطراب الجيبي، وهذه نقطة غاية في الأهمية.



صلاحية التقريب من الرتبة الأولى بالجوار القريب من التجاوب



ضعف احتمال الانتقال بعيدا عن الجوار القريب للتجاوب

3.8 احتمال الانتقال من حالة منفصلة $|i\rangle$ إلى مجموعة من الحالات النهائية المتصلة

إن القاعدة الذهبية لفيرمي ليست صالحة من أجل الاضطراب الثابت فقط، بل يمكن أيضا اشتقاق قاعدة مثلها بالنسبة للاضطراب الجيبي وذلك بتابع نفس الخطوات. إن المسؤول عن ذلك هو السلوك التجاوبي لاحتمال الانتقال عند تواتر بور طبعاً. وكما فعلنا سابقاً، فإن كانت الحالة الابتدائية

هي $|i\rangle$ وطاقتها E_i وكانت مجموعة الحالات النهائية ممثلة بالأشعة $|E_f, \beta_f\rangle$ التي طاقتها تكون قريبة من القيمة $E_i + \hbar\omega$ ، أي

$$E_f \sim E_i + \hbar\omega \quad (161-6)$$

أو نقول أن الطاقات E_f تقع داخل المجال δE حول $E_i + \hbar\omega$. إن قيمة هذا المجال حسب (138-6) هي

$$\delta E = \hbar\Delta\omega = \frac{2\pi\hbar}{t} \quad (162-6)$$

والتي تضيق بمرور الزمن. إن نتيجة الحسابات تعطي العبارة التالية لاحتمال الانتقال في وحدة الزمن ولوحدة درجة الانحلال

$$w_{i \rightarrow D_f} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \beta_f, E_f = E_i + \hbar\omega | V | i \rangle|^2 \rho(\beta_f, E_f = E_i + \hbar\omega) \quad (163-6)$$

هذه النتيجة يمكن مقارنتها مع النتيجة (113-6) الخاصة بالاضطراب الثابت لئرى أن الفرق بينهما يمكن وضع $\omega = 0$ في هذه النتيجة حتى نتحصل على الأولى.

4.8 عرض القمة المركزية لاحتمال الانتقال وعلاقة الارتياح زمن - طاقة لهايزنبرغ

إن العلاقة (162-6) الخاصة بعرض القمة المركزية لاحتمال الانتقال تحت تأثير الاضطراب الجيبي (أو العرض (89-6) الخاصة بالاضطراب الثابت) تسببه علاقة الارتياح زمن - طاقة لهايزنبرغ. فنلاحظ من خلالها أنه كلما زاد زمن تفاعل الجمله مع الاضطراب كلما كان هذا العرض صغيراً، وبالتالي فعند بحثنا عن تواتر الاضطراب الذي يحدث تجاوبا للجمله معه، فإن كل الحالات النهائية $|E_f, \beta_f\rangle$ الموجودة طاقتها ضمن هذا المجال المحيط بالقيمة $E_i + \hbar\omega$ تكون ميدانا لاحتمال كبير أن تنتقل الجمله إلى أحدها أو إلى مجموعة متصلة منها. وبانتقال الجمله وعودتها بين الحالة الابتدائية وهذه الحالات النهائية فإنها تمتص وتصدر كموما من الطاقة تمكنا من قياس طاقة الحالات النهائية. ولأن كل هذه الكمات لا تملك نفس الطاقة فإن الارتياح في قياس الطاقة E_f هو

$$\Delta E = \delta E = \frac{2\pi\hbar}{t} \Rightarrow t \cdot \Delta E = h \quad (164-6)$$

فكلما كان زمن القياس كبيراً كان الارتياح في قياس المستوى النهائي صغيراً، ويجعل الزمن كبيراً جداً نحصل على دقة جيدة للقياس. صحيح أن (164-6) تشبه صورياً علاقة الارتياح لهايزنبرغ، إلا أن الزمن في علاقة الارتياح لهايزنبرغ هو الزمن الذاتي المميز لتطور الجمله وليس زمن القياس كما هو الحال هنا.

كمثال لتوضيح الفرق بين نوعي الزمنين المذكورين، سنأخذ حالة التجاوب التي درسناها سابقاً. إن الزمن المميز لتطور الجمله في هذه لحالة هو الزمن اللازم لانتقالها من الحالة الابتدائية إلى الحالة النهائية، وهو المعطى بالعلاقة (156-6)، فمن خلال هذه العلاقة و العلاقة الخاصة بشرط ضعف الاضطراب أمام الفرق بين المستويات الطاقوية للجمله (153-6) فإننا نجد

$$T_0 = 2\pi\hbar / |A_{fi}| \gg 2\pi\hbar / |E_f - E_i| \Rightarrow T_0 |E_f - E_i| \gg h \quad (165-6)$$

فالزمن T_0 في (165-6) غير الزمن في (164-6).