Rappels mathématiques

A- Mesures erreurs et représentation

1- Unité

- Toutes les grandeurs physiques sont quantifiées, ces quantités sont caractérisées par des unités qui conviennent à leurs mesures.
- Dans le système international (MKSA), on a 7 unités principales, le reste en découle.

-M $\longrightarrow$ mètre (longueur)
- K $\longrightarrow$ kilogramme (masse)
-S $\longrightarrow$ seconde (temps)
- A $\longrightarrow$ Ampère (intensité électrique)
- N $\longrightarrow$ môle (nombre de particules)
- K $\longrightarrow$ Kelvin (température)
- Cd $\longrightarrow$ candela (intensité lumineuse

2- Notation scientifique

Lors de la quantification des grandeurs physiques, on trouve pour certaines des valeurs très grandes ou trop petites pour cela, on utilise la notation pour les écrire.

$$\boldsymbol{v.10^n}\begin{cases}\boldsymbol{v: nombre\ réel} & \boldsymbol{1 \leq v \leq 9}\\ \boldsymbol{n: entier\ naturel}\end{cases}$$

Exemple : - la masse de la terre « 6 suivit de 24 zéros » $\boldsymbol{m = 6\ \ 10^{24} kg}$

- la masse de l'électron « 9.11 précédé de 30zéro » $\boldsymbol{m = 9.11\ \ 10^{-31} kg}$

3- Mesure, erreurs et chiffres significatif

3.1 Mesures

Il y a deux types de mesures

a- Mesures directes

C'est l'opération de lecture ou de prélèvement directement à partir de l'instrument de mesure (longueur, temps, courant,…).

b- Mesures indirectes

La grandeur voulue est exprimé mathématiquement en fonction d'autres grandeurs mesurées directement (surface, volume, densité,…)

3.2 Erreurs

a- Notions d'erreur et d'incertitude

- L'erreur : est l'écart entre la valeur réelle et mesurée de la grandeur physique. Cet écart peut-être positif ou négatif.

Il existe deux types d'erreurs :
- erreurs systématiques : celles qui se répètent à chaque fois de la même manière (erreur de l'instrument, ..)
- erreurs fortuites : celles qui apparaissent à chaque fois mais d'une façon aléatoire ou imprévisible (lecture, changement de température, ...)

- L'incertitude : est la valeur absolue maximale que peut prendre l'erreur.

b- Détermination de l'incertitude

- si "$\boldsymbol{x}$" est valeur réelle de la grandeur physique et "$\boldsymbol{x_0}$" la valeur mesurée de cette même grandeur, l'erreur est :

$$\boldsymbol{e} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}$$

Remarque : l'erreur peut-être négative ou positive ($\boldsymbol{e} < 0$ ou $e > 0$)

- la valeur absolue de l'erreur est : l'erreur absolue

$$\boldsymbol{\delta x} = |\boldsymbol{e}| = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}|$$

- l'incertitude absolue est donnée par :

$$\Delta\boldsymbol{x} = \boldsymbol{max}(\boldsymbol{\delta x})$$

Remarque : on a toujours $\Delta\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{\delta x}$

- Si l'erreur est positive ($\boldsymbol{e} > 0$) :
  $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} \quad \Rightarrow \Delta\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{\delta x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0} \quad \Rightarrow \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{x_0} + \Delta\boldsymbol{x}$
- Si l'erreur est négative ($\boldsymbol{e} < 0$) :
  $|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}| = -(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_0}) \quad \Rightarrow \Delta\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{\delta x} = \boldsymbol{x_0} - \boldsymbol{x} \quad \Rightarrow \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{x_0} - \Delta\boldsymbol{x}$
- La valeur réelle peut s'écrire finalement :
  $$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} \pm \Delta\boldsymbol{x}$$
- Détermination de l'incertitude
  - si la grandeur est mesurée directement, l'erreur commise se situe sur le chiffre le plus petit de l'instrument. (règle graduée en millimètre : l'erreur commise est sur les mm).
  - si la grandeur est donnée par la mesure indirecte, l'erreur s'exprime en fonction des erreurs des grandeurs mesurées directement ($x = F(a, b, c..)$)

  * <u>Somme</u> :

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + \cdots$$
$$\Delta\boldsymbol{x} = \Delta\boldsymbol{a} + \Delta\boldsymbol{b} + \Delta\boldsymbol{c} + \cdots$$

  * <u>Produit</u> :

$$\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{a}.\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c}$$
$$\Delta\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{b}.\boldsymbol{c})\Delta\boldsymbol{a} + (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{c})\Delta\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a}.\boldsymbol{b})\Delta\boldsymbol{c}$$

Et $\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x_0}} = \frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}} + \frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\Delta\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}} \quad \Rightarrow \Delta\boldsymbol{x} = \left(\frac{\Delta\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{a}} + \frac{\Delta\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{b}} + \frac{\Delta\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{c}}\right)\boldsymbol{x_0}$

Finalement : $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_0} \pm \Delta\boldsymbol{x}$

Exemples :

1°- Périmètre d'un rectangle : $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{2}.(\boldsymbol{L} + \boldsymbol{l}) \quad \Rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{2}(\Delta\boldsymbol{L} + \Delta\boldsymbol{l})$

2°- Surface de ce rectangle : $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{L}.\boldsymbol{l} \Rightarrow \quad \Delta\boldsymbol{S} = \boldsymbol{l}.\Delta\boldsymbol{L} + \boldsymbol{L}.\Delta\boldsymbol{l} \Rightarrow \frac{\Delta\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S}} = \frac{\Delta\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{L}} + \frac{\Delta\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}} \quad \Rightarrow \Delta\boldsymbol{S} = \left(\frac{\Delta\boldsymbol{L}}{\boldsymbol{L}} + \frac{\Delta\boldsymbol{l}}{\boldsymbol{l}}\right)\boldsymbol{S}$

4- Chiffres significatifs

Lors de la mesure, on écrit la grandeur quantifiée en notation scientifique, les chiffres qui expriment cette quantité sont dits *significatifs*.

Remarque : «13 » et « 13.0 » ont la même valeur, mais leurs significations sont différentes c.-à-d. que l'erreur de la seconde est 10 fois moins que la première

Généralement :

- Les chiffres non nuls sont toujours significatifs (3.1415 $\longrightarrow$ 5 chiffres significatifs).
- Tous les zéros qui viennent à la fin sont significatifs (0.4500 $\longrightarrow$ 4 chiffres significatifs).
- Les zéros entre les chiffres significatifs sont significatifs (0.104 $\longrightarrow$ 3 chiffres significatifs).
- Les zéros utilisés pour déplacer la virgule ne sont pas significatifs (0.00125=1.25 10^{-3} $\longrightarrow$ 3 chiffres significatifs).

5- Données et graphes

5.1- Données

Ce sont les valeurs que peut prendre une grandeur physique dans différents états

5.2- Graphes

La dépendance qui existe entre deux ou plusieurs grandeurs physiques s'exprime par une fonction qu'on peut la représenter par une courbe ou un graphe.

Il existe plusieurs types de fonctions :

- les fonctions linéaires : $\boldsymbol{y = ax + b}$, expriment la dépendance entre y *et* x.

- les fonctions quadratiques : $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ (parabole du 2eme ordre de même pour celle du 3eme ordre et ainsi de suite)

- Les fonctions inverses : $\boldsymbol{y = \frac{k}{x}}$

-les fonctions exponentielles et logarithmiques : $\boldsymbol{y = ae^{u(x)}}$, $\boldsymbol{y = \ln(v(x))}$ où $\boldsymbol{u(x)}$ *et* $\boldsymbol{v(x)}$ sont des fonctions numériques quelconques

- les fonctions circulaires ou trigonométriques : $\boldsymbol{y = a.sin[u(x)]}$, $\boldsymbol{y = b.cos[u(x)]}$, $\boldsymbol{y = tg[u(x)]}$ …

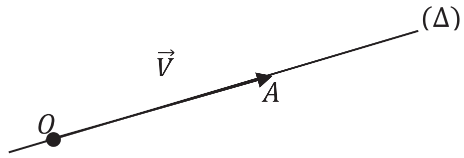
-les fonctions hyperboliques : $\boldsymbol{y = a.sinh[u(x)]}$, $\boldsymbol{y = b.cosh[u(x)]}$, $\boldsymbol{y = tgh[u(x)]}$ …

B- Rappels sur le calcul vectoriel

1- Notion de vecteur

1.1- Définition :

Un vecteur est une entité mathématique qui représente un élément d'un espace vectoriel $\mathbb{E}^3$ associé à un espace affine (de points)$\mathbb{R}^3$, où on définit une direction, un sens, un module et un point d'application.



1°- "$\boldsymbol{O}$" point d'application

2°- "Δ" est la direction (ligne d'action)

3°- (Dans la base orthonormée$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$,), le module du vecteur est:

$$\left|\overrightarrow{\boldsymbol{OA}}\right| = \boldsymbol{OA} = \sqrt{\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2}} = \left|\overrightarrow{\boldsymbol{V}}\right| = \boldsymbol{V}$$

4°- Le sens est de O vers A

1.2-Types de vecteurs

1.2.1- Vecteur libre

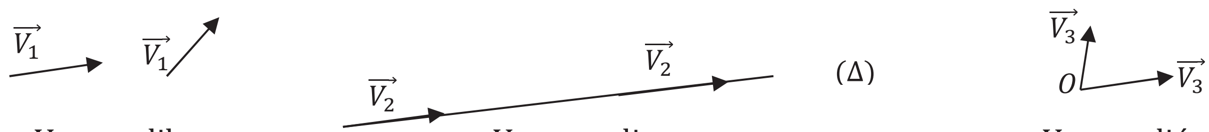
C'est un vecteur où le point d'application peut être transféré à n'importe quel point de l'espace

1.2.2- Vecteur glissant

C'est un vecteur où le point d'application peut se déplacer le long de sa ligne d'action

1.2.3- Vecteur lié

C'est un vecteur où le point d'application est fixe et définit par les coordonnées de son origine



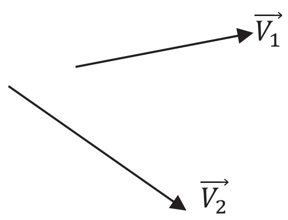
Vecteur libre — Vecteur glissant — Vecteur lié

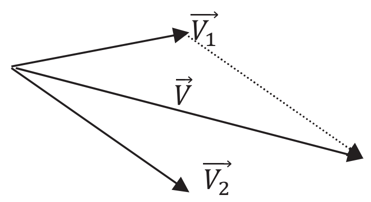
2- Opération sur les vecteurs

2.1- Somme de vecteurs (résultante) :

Rapportée à une base orthonormée$(\vec{\boldsymbol{\imath}}, \vec{\boldsymbol{\jmath}}, \vec{\boldsymbol{k}})$**,** la somme de deux vecteurs est un vecteur, où les composantes s'ajoutent deux à deux respectivement

$$\vec{\boldsymbol{V}}_1 = x_1\vec{\imath} + y_1\vec{\jmath} + z_1\vec{k} \;\; \textbf{et} \, \vec{\boldsymbol{V}}_2 = x_2\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath} + z_2\vec{k} \;\Longrightarrow\; \vec{\boldsymbol{V}} = \vec{\boldsymbol{V}}_1 + \vec{\boldsymbol{V}}_2 = (x_1 + x_2)\vec{\imath} + (y_1 + y_2)\vec{\jmath} + (z_1 + z_2)\vec{k}$$





Remarque : pour plusieurs vecteurs, la somme des composantes qui s'ajoutent respectivement représentent les composante du vecteur somme.

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \cdots + \vec{V}_n = (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\vec{i} + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)\vec{j} + (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)\vec{k}$$
$$\vec{V} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = \sum_{l=1}^{n} x_l \\ y = \sum_{l=1}^{n} y_l \\ z = \sum_{l=1}^{n} z_l \end{cases}$$

2.2- Produit de vecteurs:

a- Produit scalaire et projection :

Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, est un scalaire noté $\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2$ est égal à la somme des produits des composantes prisent deux à deux respectivement.

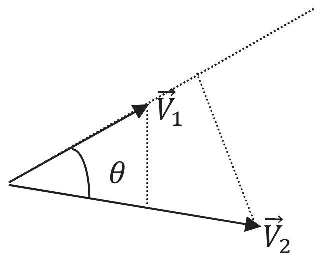
$$\vec{V}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{V}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} \quad \Longrightarrow \quad V = \vec{V}_1 \circ \vec{V}_2 = (x_1.x_2) + (y_1.y_2) + (z_1.z_2)$$

Remarque : - pour les vecteurs unitaires de la base orthonormée on a : $\begin{cases} \vec{i} \circ \vec{i} = \vec{j} \circ \vec{j} = \vec{k} \circ \vec{k} = 1 \\ \vec{i} \circ \vec{j} = \vec{i} \circ \vec{k} = \vec{j} \circ \vec{k} = 0 \end{cases}$

- le carré du module du vecteur est :

$$\vec{V} \circ \vec{V} = (x.x) + (y.y) + (z.z) = x^2 + y^2 + z^2 = V^2$$
$$\Longrightarrow \quad |\vec{V}| = V = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Le produit scalaire peut être définit aussi de la manière suivante



$$\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2 = |\vec{V}_1|.|\vec{V}_2|\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2) = |\vec{V}_1|.|\vec{V}_2|\cos(\theta)$$
$$\vec{V}_1 \circ \vec{V}_1 = |\vec{V}_1|.|\vec{V}_2|\cos(\vec{V}_1, \vec{V}_1) = V_1^2$$

<u>Propriétés</u> :

1° - Le produit scalaire est commutatif

$$\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2 = \vec{V}_2 \circ \vec{V}_1$$

2° - Le produit scalaire est distributif par rapport à l'addition

$$\vec{V}_1 \circ (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \circ \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \circ \vec{V}_3$$

3°- Le produit scalaire représente géométriquement

la projection d'un vecteur sur un autre

$$\begin{cases} \vec{V} \circ \vec{i} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \circ \vec{i} = x \\ \vec{V} \circ \vec{j} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \circ \vec{j} = y \\ \vec{V} \circ \vec{k} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \circ \vec{k} = z \end{cases}$$

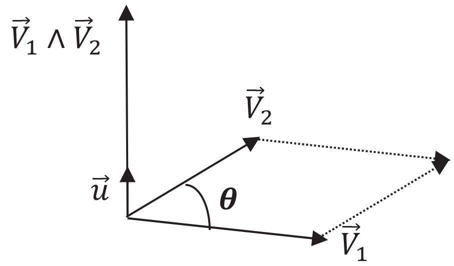
4° - Le produit scalaire est nul si :

$$|\vec{V}_1| = 0, |\vec{V}_2| = 0 \text{ ou } \vec{V}_1 \perp \vec{V}_2$$

b- Produit vectoriel et surface orientée :

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$, est un vecteur noté $\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ et donné par :

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = (y_1.z_2 - y_2.z_1)\vec{i} - (x_1.z_2 - x_2.z_1)\vec{j} + (x_1.y_2 - x_2.y_1)\vec{k}$$



Qui peut être, aussi, définit de la manière suivante

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = |\vec{V}_1|.|\vec{V}_2| \sin(\vec{V}_1, \vec{V}_2)\,\vec{u} = |\vec{V}_1|.|\vec{V}_2| \sin(\theta)\,\vec{u}$$

$\vec{u}$: est un vecteur unitaire, $\vec{u} \perp (\vec{V}_1 et\, \vec{V}_2)$

Propriétés :

1°- Le produit vectoriel est non commutatif

$$\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 = -\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_1$$

2°- Le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 + \vec{V}_3) = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2 + \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_3$$

3°- Le vecteur résultant du produit vectoriel est toujours perpendiculaire aux vecteurs opérandes.

4°- Le produit vectoriel obéit à la règle de la permutation circulaire

$$\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = 0$$

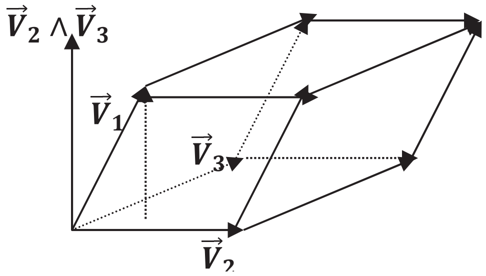
5°- Le produit vectoriel est nul si:

$$|\vec{V}_1| = 0,\ |\vec{V}_2| = 0 \text{ ou } \vec{V}_1 \parallel \vec{V}_2$$

6°- Le produit vectoriel représente géométriquement l'aire de la surface orientée formée par les vecteurs opérandes.

c- Produit mixte :

Le produit mixte, est un scalaire définit par la relation suivante :



$$\vec{V}_1 \circ (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = W$$

<u>Propriétés</u> :

1°- Le produit mixte est invariant par permutation cyclique

$$\vec{V}_1 \circ (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = \vec{V}_3 \circ (\vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2) = \vec{V}_2 \circ (\vec{V}_3 \wedge \vec{V}_1)$$

2° - Le produit mixte est nul si:

$|\vec{V}_1| = 0, |\vec{V}_2| = 0, |\vec{V}_3| = 0,$ où $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ *et* $\vec{V}_3$ sont coplanaires.

3°- Le produit mixte représente géométriquement le volume formé par les vecteurs opérandes.

d- Double produit vectoriel :

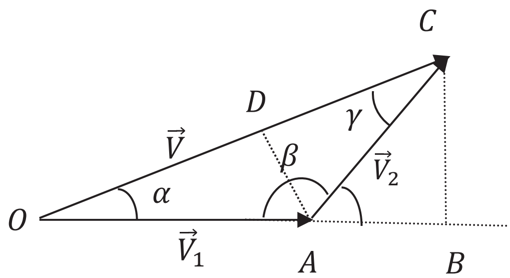
Le double produit vectoriel est un vecteur définit par la relation suivante :

$$\vec{V}_1 \wedge (\vec{V}_2 \wedge \vec{V}_3) = (\vec{V}_1 \circ \vec{V}_3)\vec{V}_2 - (\vec{V}_1 \circ \vec{V}_2)\vec{V}_3 = \alpha\vec{V}_2 + \beta\vec{V}_3 = \vec{W}$$

Remarque : la multiplication d'un vecteur par un scalaire est un vecteur (c'est une homothétie)

$$\lambda\vec{V} = \vec{W}$$

3- Règle des sinus



$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2$$

$$|\vec{V}| = \sqrt{(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \circ (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)} = \sqrt{|V_1| + |V_2| + 2|V_1| \circ |V_2|}$$

- Les triangles ABC et OBC donnent :

$$\begin{cases} sin(\alpha) = \dfrac{BC}{OC} \\ sin(\pi - \beta) = \dfrac{BC}{AC} \end{cases} \Rightarrow OC.sin(\alpha) = AC.sin(\beta) \Rightarrow \frac{|\vec{V}|}{sin(\beta)} = \frac{|\vec{V}_2|}{sin(\alpha)}$$

- Les triangles OAD et ACD donnent :

$$\begin{cases} \sin(\alpha) = \dfrac{AD}{OA} \\ \sin(\gamma) = \dfrac{AD}{AC} \end{cases} \Rightarrow OA.\sin(\alpha) = \mathrm{AC}.\sin(\gamma) \Rightarrow \frac{|\vec{V}_1|}{sin(\gamma)} = \frac{|\vec{V}_2|}{sin(\alpha)}$$

$$\Rightarrow \frac{|\vec{V}|}{sin(\beta)} = \frac{|\vec{V}_2|}{sin(\alpha)} = = \frac{|\vec{V}_1|}{sin(\gamma)}$$

4- Dérivée d'un vecteur

Dans une base orthonormée cartésienne on exprime le vecteur $\vec{a}$ par :

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

S'il est variable, sa dérivée revient à dérivée ces composantes.

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

- La dérivée de la somme des vecteurs est égale à la somme des dérivées de ces vecteurs

$$\frac{d(\vec{a} + \vec{b})}{dt} = \frac{d\vec{a}}{dt} + \frac{d\vec{b}}{dt}$$

- La dérivée du produit des vecteurs est égale à

$$\frac{d(\vec{a} \circ \vec{b})}{dt} = \vec{b} \circ \frac{d\vec{a}}{dt} + \vec{a} \circ \frac{d\vec{b}}{dt}$$ pour le produit scalaire

$$\frac{d(\vec{a} \wedge \vec{b})}{dt} = \vec{a} \wedge \frac{d\vec{b}}{dt} + \frac{d\vec{a}}{dt} \wedge \vec{b}$$ pour le produit vectoriel