

**Université Mohamed Boudiaf de M'sila**

**Faculté de technologie**

**Département de Génie Electrique**

**Master 2 : Robotique prof / 2021-2022**

**Matière : Robotique aérienne / (UE Découverte - Crédits : 1, Coefficients : 1)**

## **Chapitre 4 : Modélisation d'un drone : Cas d'un Quadrotor**

### **1. Introduction**

Le quadrotor est classé dans la catégorie des systèmes volants les plus complexes vu le nombre d'effets physiques qui affectent sa dynamique à savoir les effets aérodynamiques, la gravité, les effets gyroscopiques, les frottements et le moment d'inertie.

Pour le cas d'un quadrotor, qui est le sujet de notre application, il faut tout d'abord comprendre les mouvements que peut effectuer cet engin et établir son modèle cinématique et dynamique approprié et qui décrit fidèlement son comportement, ceci est primordial non seulement pour la conception du contrôleur lui-même mais aussi pour s'assurer que les simulations faites pour l'objet volant reflètent un comportement aussi proche qu'aurait le système réel.

Cette étude consiste d'abord à attribuer au drone un modèle représentatif qui reflète sa dynamique de translation et celle de rotation, en négligeant les forces aérodynamiques et les effets gyroscopiques. Ce modèle a été élaboré en utilisant la méthode Newtonienne afin d'établir après, une commande non linéaire performante.

### **2. Modèle mathématique du quadrotor**

Le modèle dynamique de quadrotor est donné par le formalisme de Newton-Euler.

Pour pouvoir déterminer le modèle dynamique, le quadrotor est assimilé à une structure rigide et symétrique d'où l'hypothèse que la matrice d'inertie est diagonale. Les hélices sont également supposées rigides pour pouvoir négliger l'effet de leur déformation lors de la portance et la traînée de chaque moteur qui sont

proportionnelles au carré de la vitesse de rotation des rotors, ce qui est une approximation très proche du comportement aérodynamique et le repère lié à cette structure est généralement supposé confondu avec son centre de gravité. Cela nous emmène à considérer la dynamique du quadrotor comme celle d'un corps rigide dans l'espace, auquel s'ajoutent les forces aérodynamiques provoquées par le mouvement de rotation de ses quatre rotors. Les conditions atmosphériques sont la condition standard de pression et de température (pas de vent).

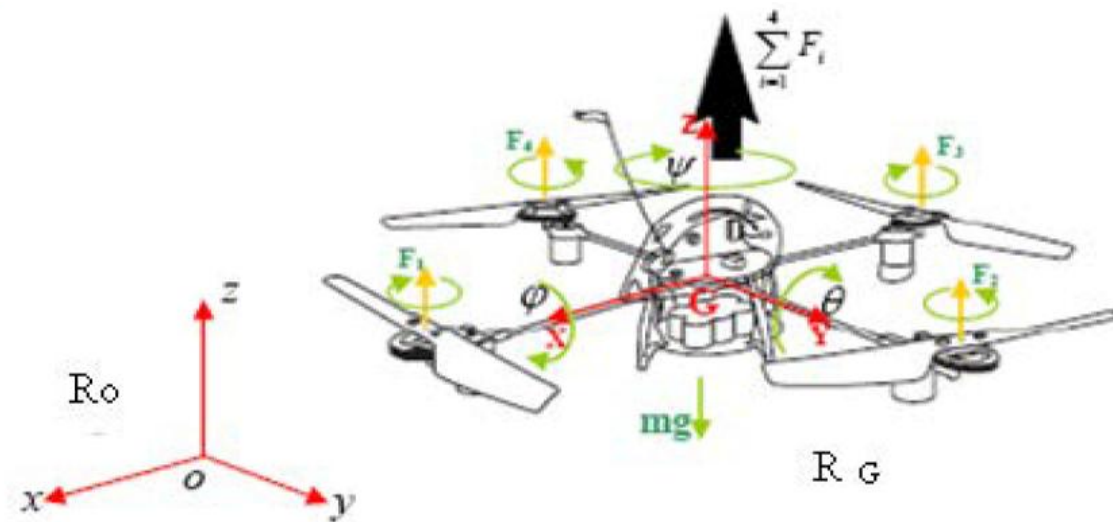


Figure 4.1 Le Quadrotor et ses coordonnées spatiales

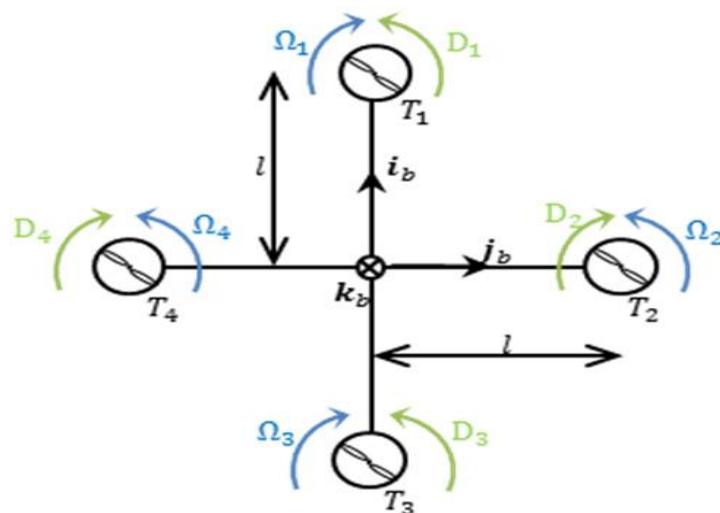
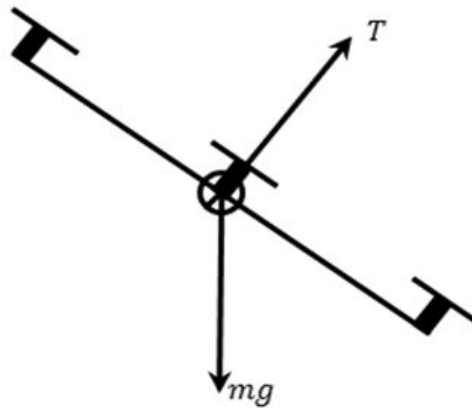


Figure 4.2 Identification du sens de rotation des moteurs



**Figure 4.3** Diagramme des forces

En se basant sur les équations (2.23) et (2.27), nous pouvons écrire la somme des forces appliquées au quadrotor, exprimée dans  $f$  ainsi :

$$f = R^T mg \cdot k - Tk$$

Où,  $k = [0 \ 0 \ 1]^T$  est un vecteur unitaire et  $T$  est la force totale de poussée telle que :

$$T = b(\Omega_1^2 + \Omega_2^2 + \Omega_3^2 + \Omega_4^2)$$

$F$ : La force de portance appliquée au quadrotor ; c'est la résultante des forces de poussée générée par les quatre rotors telle que :

$$F = \sum_{i=1}^4 F_i$$

Sachant que :  $F(i= 1, 2, 3,4)$  est la force de sustentation de chaque rotor (projetée dans le repère attaché au corps ( $\mathcal{R}_G$ )), tel que :

$$F_i = bw_i^2$$

- ❖  $b$  : la constante de portance dépendant des propriétés aérodynamiques des hélices, leur nombre et de la densité de l'air.
- ❖  $w_i$  : la vitesse de rotation du rotor en question (vitesse de l'hélice).

$$FR_{\Psi\theta\phi} e_3 = \begin{pmatrix} C_\phi S_\theta C_\Psi + S_\phi S_\Psi \\ C_\phi S_\theta S_\Psi - S_\phi C_\Psi \\ C_\phi C_\theta \end{pmatrix} \sum_{i=1}^4 F_i$$

Remplaçons dans l'équation (2.14) par les expressions ainsi calculées, il s'en suit :

$$\ddot{\xi} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \frac{1}{m} \begin{pmatrix} C_\phi S_\theta C_\Psi + S_\phi S_\Psi \\ C_\phi S_\theta S_\Psi - S_\phi C_\Psi \\ C_\phi C_\theta \end{pmatrix} \sum_{i=1}^4 F_i - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{pmatrix}$$

Par conséquent, les trois équations décrivant la dynamique de translation sont données par :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} (C_\phi S_\theta C_\Psi + S_\phi S_\Psi) U_1 \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} (C_\phi S_\theta S_\Psi - S_\phi C_\Psi) U_1 \\ \ddot{z} = -g + \frac{1}{m} (C_\theta C_\phi) U_1 \end{cases}$$

Etant donné que :

$$U_1 = \sum_{i=1}^4 F_i = b(w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 + w_4^2).$$

Un point dans l'espace peut être défini par des coordonnées cartésiennes, cylindriques ou sphériques. En générale le système choisi est le système cartésien permettant de désigner une rotation par les angles d'Euler.

L'étude du mouvement d'un drone évoluant dans l'espace, requiert la connaissance de sa position et de son orientation. Cette localisation nécessite le choix d'au moins deux repères : local et global qui sont initialement confondus. Le repère local  $\mathbf{R}_G = \{G, X, Y, Z\}$  est attaché au centre de masse G du véhicule. Le centre de masse est situé dans l'intersection des deux barres. Chaque barre porte deux moteurs. Les équipements comme par exemple les capteurs, les cartes des contrôleurs, etc..., sont placées proches du centre de masse G. le repère inertiel fixe lié à la terre (figure 2.1) est défini par  $\mathbf{R}_o = \{O, x, y, z\}$ .

Le quadrotor est un robot volant à six degré de liberté, *trois translations* ( $X, Y, Z$ ) et *trois rotations* ( $\phi, \theta, \psi$ ).

- Les translations du quadrotor sont les coordonnées cartésiennes ( $X, Y, Z$ ) du centre de masse G dans le repère inertiel.

- Les rotations du quadrotor sont décrites par trois rotations consécutives à travers trois angles qui s'appellent les angles d'Euler, et ce, en utilisant la séquence d'axe z - y - x (utilisée par la communauté aéronautique).

Les angles s'appellent alors **Roulis** autour de l'axe x, **Tangage** autour de l'axe y et **Lacet** autour de l'axe z. Dans cette partie, cette séquence est utilisée vu qu'elle est la plus adaptée par la plupart de centrales inertielles existantes sur le marché. Pour cet ensemble particulier d'angles d'Euler, l'orientation du système de référence attaché au quadrotor X, Y, Z par rapport au système de référence inertiel lié à la terre x, y, z est décrite suivant la combinaison des trois rotations consécutives suivantes (figure 2.2):

- Une rotation autour de l'axe z d'un angle  $\psi$  avec :  $-\pi < \psi < \pi$
- Une rotation autour de l'axe y d'un angle  $\theta$  avec :  $-\pi/2 < \theta < \pi/2$
- Une rotation autour de l'axe x d'un angle  $\phi$  avec :  $-\pi/2 < \phi < \pi/2$

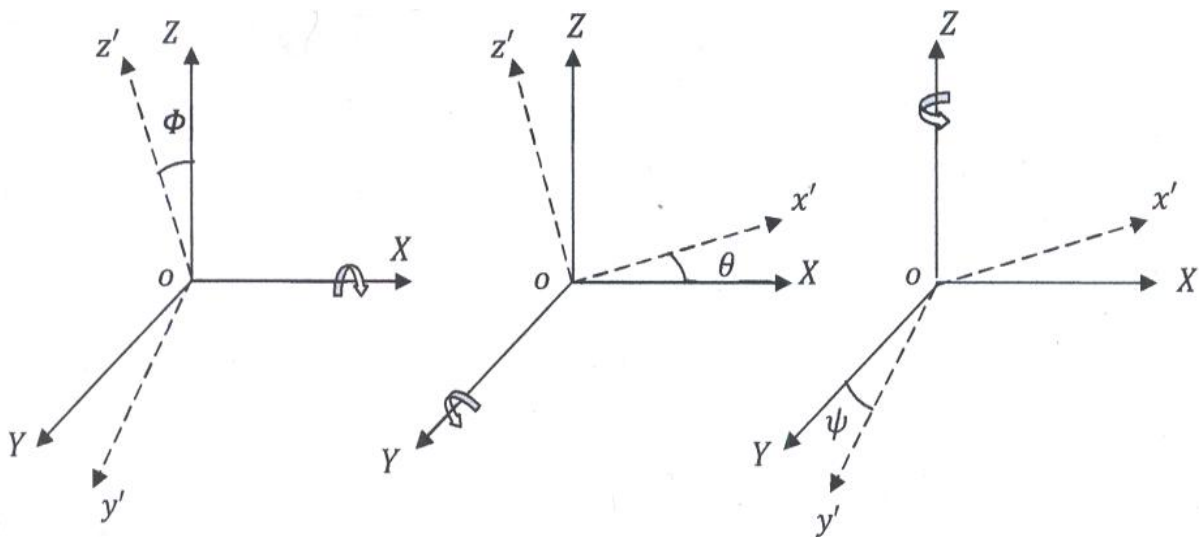


Figure 4.3 Rotation suivant *le roulis, le tangage et le lacet*

Les matrices relatives à ces transformations sont :

$$\text{Rot}(x, \phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\phi & -\sin\phi \\ 0 & \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}, \quad \text{Rot}(y, \theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$$

### 3. Modèle cinématique et dynamique de l'orientation

Le modèle cinématique et dynamique du mouvement de la rotation est donné par :

$$\begin{cases} \dot{R}_{\Psi\theta\phi} = R_{\Psi\theta\phi} \Omega \\ J\dot{\Omega} = -\Omega \times J\Omega + \tau_f + \tau_g \end{cases}$$

$(\dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$  et décrites dans le repère inertiel telles que :

$$\Omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = \dot{\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(x, \phi) \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Rot}(x, \phi)\text{Rot}(y, \theta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

Posons :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \end{pmatrix}$$

Alors  $\Omega$  aura pour expression :

$$\Omega = \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -S_\theta \\ 0 & C_\phi & S_\phi C_\theta \\ 0 & -S_\phi & C_\phi C_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} - S_\theta \dot{\psi} \\ C_\phi \dot{\theta} + C_\theta S_\phi \dot{\psi} \\ -S_\phi \dot{\theta} + C_\theta C_\phi \dot{\psi} \end{pmatrix}$$

#### Remarque :

La plupart des cas étudiés dans la littérature travaillent avec un modèle simplifié du quadrotor.

On considère :

$$\begin{cases} \Omega = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} \\ \dot{\Omega} = \begin{pmatrix} \ddot{\phi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \end{pmatrix} \end{cases}$$

➤  $J$  est la matrice d'inertie diagonale donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

➤  $\tau_g$  est l'ensemble des couples dus à l'effet gyroscopique, ces couples gyroscopiques sont produits par la rotation des pales du quadrotor, ils s'expriment par :

$$\tau_g = \sum_{i=1}^4 \Omega \wedge J_r W_i$$

Où :  $J_r$  est l'inertie du rotor et  $W_i = [0 \ 0 \ (-1)^{i+1} w_i]^T$  ( $w_i$ : la vitesse de rotation d'un rotor).  
En développant l'expression (2.27) on trouve :

$$\tau_g = \begin{pmatrix} -J_r \dot{\theta} (-w_1 + w_2 - w_3 + w_4) \\ J_r \dot{\phi} (-w_1 + w_2 - w_3 + w_4) \\ 0 \end{pmatrix}$$

➤  $\tau_f$  représente le vecteur des moments développés par l'hélicoptère dans son propre repère, il est donné par :

$$\tau_f = \begin{pmatrix} d(F_4 - F_2) \\ d(F_3 - F_1) \\ (M_1 - M_2 + M_3 - M_4) \end{pmatrix}$$

Avec :

- $d$  est la distance entre le centre de masse du quadrotor et l'axe de rotation du rotor.
- $M_i$  ( $i= 1, 2, 3,4$ ) est le couple de la traînée généré par chaque rotor et qui oppose la rotation

des pales (dû à la résistance de l'air) tel que :

$$M_i = k_d w_i^2$$

- $k_d$  : étant le coefficient aérodynamique de trainée dépendant des propriétés aérodynamiques des hélices, leur nombre et de la densité de l'air.
- Le terme  $\Omega \times (J\Omega)$  est donné par :

$$\Omega \times (J\Omega) = \begin{pmatrix} (I_{zz} - I_{yy})\dot{\theta}\dot{\psi} \\ (I_{xx} - I_{zz})\dot{\phi}\dot{\psi} \\ (I_{yy} - I_{xx})\dot{\phi}\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

Alors, les équations de la dynamique de l'orientation peuvent être exprimées par :

$$\begin{cases} \ddot{\phi} = \frac{1}{I_{xx}} [(I_{yy}-I_{zz}) \dot{\theta}\dot{\psi} + J_r \dot{\theta}\bar{\Omega} + U_2] \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{I_{yy}} [(I_{zz}-I_{xx}) \dot{\phi}\dot{\psi} + J_r \dot{\phi}\bar{\Omega} + U_3] \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{I_{zz}} [(I_{xx}-I_{yy}) \dot{\phi}\dot{\theta} + U_4] \end{cases}$$

Où :

$$\bar{\Omega} = (w_1 - w_2 + w_3 - w_4)$$

$$U_2 = d(F_4 - F_2)$$

$$U_3 = d(F_3 - F_1)$$

$$U_4 = k_d(w_1^2 - w_2^2 + w_3^2 - w_4^2) = (M_1 - M_2 + M_3 - M_4)$$

A signaler que  $U_1$ ,  $U_2$ ,  $U_3$  et  $U_4$  sont les entrées de commande du système qui s'écrivent en fonction des vitesses des quatre rotors comme suit :

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b & b & b \\ 0 & -b & 0 & b \\ -b & 0 & b & 0 \\ k_d & -k_d & k_d & -k_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^2 \\ w_2^2 \\ w_3^2 \\ w_4^2 \end{pmatrix}$$

En conséquence, et après l'annulation de  $J_r$  (inertie du moteur) due à sa faible valeur (négligeable), le modèle dynamique complet qui régit la dynamique du quadrotor :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{1}{m} (C_\phi S_\theta C_\psi + S_\phi S_\psi) U_1 \\ \ddot{y} = \frac{1}{m} (C_\phi S_\theta S_\psi - S_\phi C_\psi) U_1 \\ \ddot{z} = -g + \frac{1}{m} (C_\theta C_\phi) U_1 \\ \ddot{\phi} = \frac{1}{I_{xx}} [(I_{yy}-I_{zz}) \dot{\theta}\dot{\psi} + U_2] \\ \ddot{\theta} = \frac{1}{I_{yy}} [(I_{zz}-I_{xx}) \dot{\phi}\dot{\psi} + U_3] \\ \ddot{\psi} = \frac{1}{I_{zz}} [(I_{xx}-I_{yy}) \dot{\phi}\dot{\theta} + U_4] \end{cases}$$



#### 4. Représentation d'état du quadrotor

Le modèle précédant peut être réécrit dans l'espace d'état sous la forme  $\dot{x} = F(x) + G(x, U)$  en considérant  $x = (x_1, \dots, x_{12})^T$  comme vecteur d'état du système.

Soit :

$$X = (\phi \ \dot{\phi} \ \theta \ \dot{\theta} \ \psi \ \dot{\psi} \ z \ \dot{z} \ x \ \dot{x} \ y \ \dot{y})^T$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = a_1 x_4 x_6 + b_1 U_2 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = a_3 x_2 x_6 + b_2 U_3 \\ \dot{x}_5 = x_6 \\ \dot{x}_6 = a_5 x_2 x_4 + b_3 U_4 \\ \dot{x}_7 = x_8 \\ \dot{x}_8 = -g + a_6 C x_4 C x_2 U_1 \\ \dot{x}_9 = x_{10} \\ \dot{x}_{10} = a_6 (C x_1 S x_3 C x_5 + S x_1 S x_5) U_1 \\ \dot{x}_{11} = x_{12} \\ \dot{x}_{12} = a_6 (S x_1 S x_3 C x_5 - C x_1 S x_5) U_1 \end{array} \right.$$

Avec :

$$a_1 = \frac{1}{I_{xx}} (I_{yy} - I_{zz}) ; \quad a_2 = \frac{J_r}{I_{xx}} ; \quad a_3 = \frac{1}{I_{yy}} (I_{zz} - I_{xx}) ;$$

$$a_4 = -\frac{J_r}{I_{yy}} ; \quad a_5 = \frac{1}{I_{zz}} (I_{xx} - I_{yy}) ; \quad a_6 = \frac{1}{m}$$

$$b_1 = \frac{d}{I_{xx}} ; \quad b_2 = \frac{d}{I_{yy}} ; \quad b_3 = \frac{1}{I_{zz}}$$