

# Chapitre 1 - THEORIE DU POTENTIEL INTERNE

## Méthodes énergétiques

### Sommaire :

- A - Hypothèses
- B - Théorème de Clapeyron
- C - Théorème de réciprocité de Maxwell-Betti
- D - Théorème de Castigliano
- E - Théorème de Ménabréa

### But de ce chapitre :

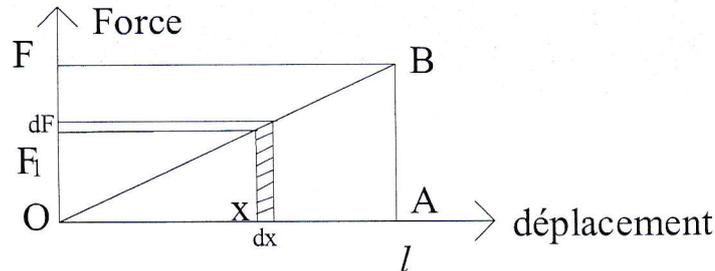
Exposer les théorèmes généraux. La théorie du potentiel interne apporte un aspect de l'étude des ouvrages qui n'avait pas été envisagé jusqu'ici.

## Rappels :

### 1) Travail d'une force constante :

$W = F \cdot \text{déplacement projeté sur sa direction}$ . Unité : Nm (comme un moment)

### 2) Travail d'une force qui varie de O à F pour un déplacement l :

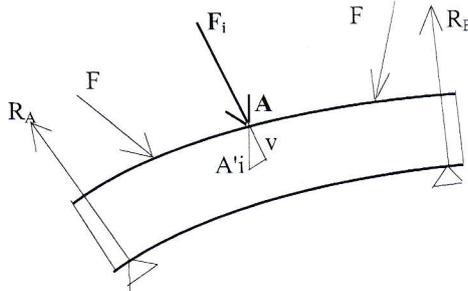


Calculons le travail pour un accroissement  $dF$  à partir d'une valeur intermédiaire  $F_1$  : le déplacement est  $dx$  et le travail  $dW = F_1 dx$ , il se mesure par l'aire hachurée.

Calculons le travail total de O à F :  $W = 1/2 Fl$  : mesure de l'aire du triangle OAB

## B. Théorème de CLAPEYRON

### 1) Calcul du potentiel interne en fonction des forces extérieures :



- Soit une poutre en équilibre sous l'action d'un système de forces concentrées :  $F_1, F_2, \dots, F_i, \dots, F_n$ .
- $F_i$  se déplace de  $A_i$  à  $A'_i$ . Dans tout ce qui suit nous considérerons seulement  $v_i$  : *déplacement projeté de  $F_i$  sur sa direction*. Ceci pour pouvoir exprimer simplement le travail de  $F_i$ .

Faisons varier les forces de 0 à leur valeur maximum  $F_i$ . D'après la loi de Hooke, si l'on applique  $kF_i$ , le déplacement est  $kv_i$  ( $0 < k < 1$ ).

Le travail d'une force  $F_1$  est donc :

$$W = \int_0^{v_1} kF_1 \cdot d(kv_1) = \int_0^1 kF_1 \cdot v_1 \cdot dk = \frac{1}{2} F_1 \cdot v_1$$

En appliquant le principe de superposition on obtient le travail total des forces qui sont appliquées à la structure :

$$W = \frac{1}{2} \sum F_i \cdot v_i$$

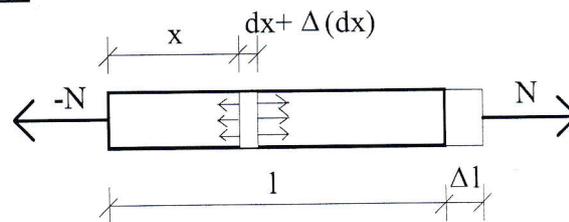
Remarque : On peut appliquer le même raisonnement à des couples :

$$W = 1/2 \sum M_i \omega_i$$

## 2) Expression du potentiel interne en fonction des sollicitations internes :

On peut donc calculer le potentiel interne d'une poutre en déterminant les déplacements par les équations de Bresse. On peut procéder plus simplement dans le cas **d'une poutre droite**.

### a. Effort normal N(x) :



$$W = 1/2 N \Delta l$$

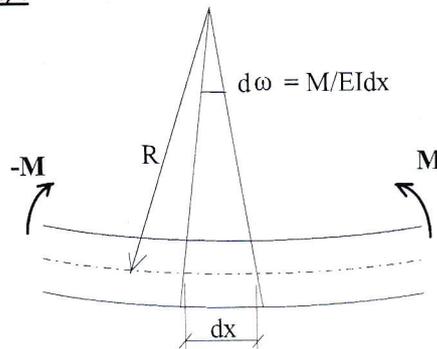
Considérons un tronçon  $dx$  :  $dW = 1/2 N \Delta(dx)$

$$\Delta(dx) = N dx/ES \quad (\text{loi de Hooke})$$

$$dW = 1/2 N^2 dx/ES \quad \text{et pour la poutre entière :}$$

$$W_N = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{ES} dx$$

### b. Moment de flexion M(x) :



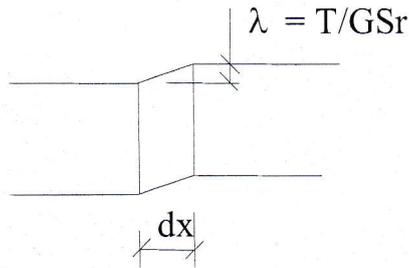
On a de même pour un tronçon  $dx$  :  $dW = 1/2 M d\omega$

$$d\omega/dx = M/EI$$

$$dW = 1/2 M^2 dx/EI \quad \text{et pour la poutre entière :}$$

$$W_M = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

c. **Effort tranchant T(x) :**



$$dW = 1/2 T \lambda dx$$

avec:  $\lambda = T / GS_r$

$dW = 1/2 T^2 dx/GS_r$  ; et pour la poutre entière :

$$W_T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{GS_r} .dx$$

d. **Cas général :**

Si toutes ces actions sont appliquées ensemble on obtient :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GS_r} + \frac{M_t^2}{GI_0} \right) .dx$$

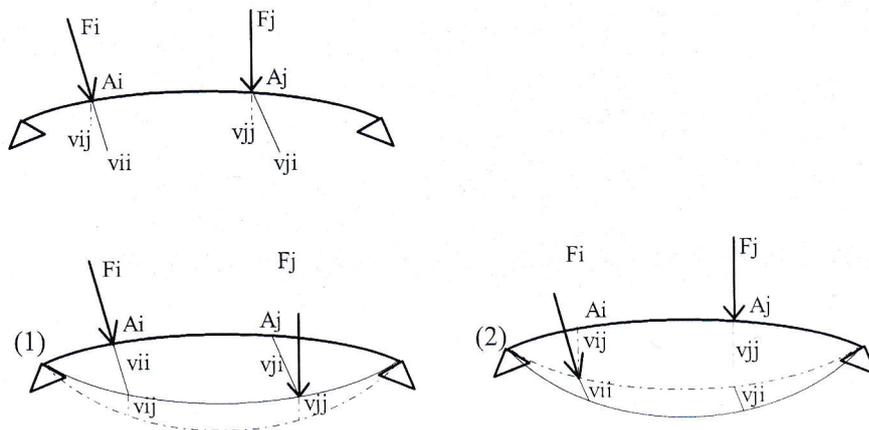
$N, M$  et  $T$  sont en général des fonction de  $x$ .

e. **Remarque :**

Dans le cas d'une poutre en flexion simple on néglige en général les déformations dues à  $T$ , on a donc :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} .dx$$

### C. Théorème de réciprocité de MAXWELL-BETTI



Considérons une poutre en équilibre sous l'action de 2 systèmes de forces :

(1) le système de forces  $F_i$  appliquées aux points  $A_i$

(2) le système de forces  $F_j$  appliquées aux points  $A_j$

- Sous l'action de  $F_i$  les déplacements projetés sur la direction de  $F_i$  sont :

$v_{ii}$  pour  $A_i$  et  $v_{ji}$  pour  $A_j$ .

- Sous l'action de  $F_j$  les déplacements projetés sur la direction de  $F_j$  sont :

$v_{jj}$  pour  $A_j$  et  $v_{ij}$  pour  $A_i$ .

Le premier indice indique l'effet (le déplacement), le deuxième indice indique la cause (la force).

Evaluons de 2 manières le potentiel dû à l'action simultanée de  $F_i$  et de  $F_j$  :

➤ Appliquons d'abord  $F_i$  :  $W_i = 1/2 \sum F_i v_{ii}$

Puis appliquons  $F_j$ . Il faut tenir compte du fait que les forces  $F_i$  qui demeurent constantes, se déplacent et effectuent le travail  $\sum F_i v_{ij}$ .

Le potentiel interne a donc pour valeur :  $W_{i+j} = 1/2 \sum F_i v_{ii} + 1/2 \sum F_j v_{jj} + \sum F_i v_{ij}$

➤ Appliquons d'abord  $F_j$ , puis  $F_i$ , on obtient :

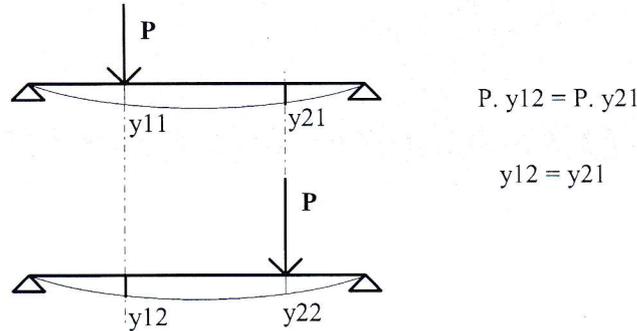
$W_{j+i} = 1/2 \sum F_j v_{jj} + 1/2 \sum F_i v_{ii} + \sum F_j v_{ji}$

Les 2 expressions du potentiel sont égales :

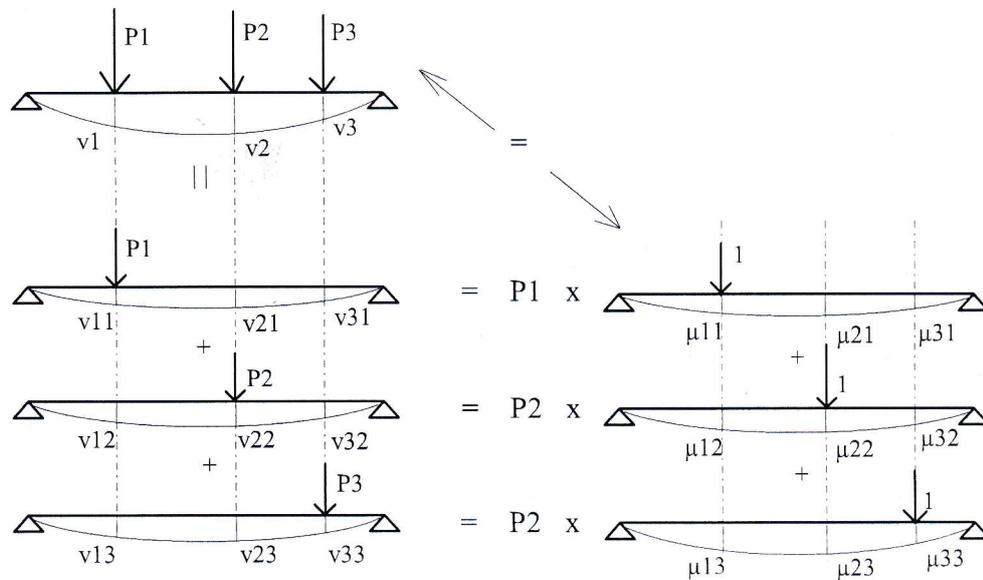
$$\sum F_i v_{ij} = \sum F_j v_{ji}$$

**Théorème** : Le travail du système de forces  $F_i$  pour les déplacements provoqués par le système de forces  $F_j$  est égal au travail du système  $F_j$  pour les déplacements provoqués par  $F_i$ .

**Exemple** :



**Coefficients d'influence** (déplacements sous l'action d'une charge unité) :



$$v_i = \mu_{i1} \cdot P_1 + \mu_{i2} \cdot P_2 + \mu_{i3} \cdot P_3 = \sum \mu_{ij} \cdot P_j$$

D'après Maxwell on a  $\mu_{ij} = \mu_{ji}$

Cette méthode est utilisée pour le tracé des lignes d'influence.

#### **D. Théorème de CASTIGLIANO**

Cherchons une méthode simple pour calculer les déplacements.

Forces appliquées :  $P_1, P_2 \dots P_i \dots P_n$

Points d'application :  $A_1, A_2 \dots A_i \dots A_n$

Le déplacement de  $A_i$  sous l'effet d'une force unité appliquée en :

$$\begin{array}{llll} A_1 & \text{dans la direction de } P_1 & \text{est } \mu_{i1} \\ A_2 & " & " & P_2 " \mu_{i2} \\ A_1 & " & " & P_i " \mu_{ii} \\ A_n & " & " & P_n " \mu_{in} \end{array}$$

Le déplacement de  $A_i$  dû à toutes les forces  $P_1 \dots P_n$  est  $v_i$ .

$$\begin{aligned} v_i &= \mu_{i1} \cdot P_1 + \mu_{i2} \cdot P_2 + \dots + \mu_{ii} \cdot P_i + \dots + \mu_{in} \cdot P_n \\ v_1 &= \mu_{11} \cdot P_1 + \mu_{12} \cdot P_2 + \dots + \mu_{1j} \cdot P_j + \dots + \mu_{1n} \cdot P_n \\ v_j &= \mu_{j1} \cdot P_1 + \mu_{j2} \cdot P_2 + \dots + \mu_{jj} \cdot P_j + \dots + \mu_{jn} \cdot P_n \end{aligned}$$

D'après le théorème de Clapeyron :  $W = 1/2 \sum P_i v_i$

$$W = 1/2 (v_1 P_1 + v_2 P_2 + \dots + v_i P_i + \dots + v_j P_j + \dots + v_n P_n)$$

Ce qui peut s'écrire, avec les coefficients d'influence, sous la forme :

$$W = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mu_{11} \cdot P_1 \cdot P_1 + \mu_{12} \cdot P_1 \cdot P_2 + \dots + \mu_{1i} \cdot P_1 \cdot P_i + \dots + \mu_{1n} \cdot P_1 \cdot P_n \\ \mu_{21} \cdot P_2 \cdot P_1 + \mu_{22} \cdot P_2 \cdot P_2 + \dots + \mu_{2i} \cdot P_2 \cdot P_i + \dots + \mu_{2n} \cdot P_2 \cdot P_n \\ \vdots \\ \mu_{i1} \cdot P_i \cdot P_1 + \mu_{i2} \cdot P_i \cdot P_2 + \dots + \mu_{ii} \cdot P_i \cdot P_i + \dots + \mu_{in} \cdot P_i \cdot P_n \\ \vdots \\ \mu_{n1} \cdot P_n \cdot P_1 + \mu_{n2} \cdot P_n \cdot P_2 + \dots + \mu_{ni} \cdot P_n \cdot P_i + \dots + \mu_{nn} \cdot P_n \cdot P_n \end{vmatrix}$$

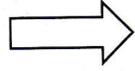
Faisons varier  $P_i$  en gardant les autres forces constantes et calculons

la dérivée partielle de  $W$  par rapport à  $P_i$  et en remarquant que :

$$\frac{\delta(\mu_{li} P_l P_i)}{\delta P_i} = \mu_{li} \cdot P_i \quad \text{et que} \quad \mu_{il} = \mu_{li}$$

$$\frac{\delta W}{\delta P_i} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & + & 0 & + & \dots & + & \mu_{li} \cdot P_l & + & 0 \\ & & & & & & \mu_{2i} \cdot P_2 & & \\ & & & & & & \vdots & & \\ & & & & & & \vdots & & \\ \mu_{i1} \cdot P_1 & + & \mu_{i2} \cdot P_2 & + & \dots & + & 2\mu_{ii} \cdot P_i & + & \dots & + & \mu_{in} \cdot P_n \\ & & & & & & \vdots & & \\ 0 & + & 0 & + & \dots & + & \mu_{ni} \cdot P_n & + & 0 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\delta W}{\delta P_i} = \mu_{i1} \cdot P_1 + \mu_{i2} \cdot P_2 + \dots + \mu_{ii} \cdot P_i + \dots + \mu_{in} \cdot P_n = v_i$$



$$\frac{\delta W}{\delta P_i} = v_i$$

**Théorème** : Le déplacement du point d'application d'une force quelconque, projeté sur la direction de cette force, est égal à la dérivée partielle, par rapport à cette force, du potentiel interne exprimé en fonction des forces appliquées.

Le raisonnement est le même pour un couple :  $\frac{\delta W}{\delta M_i} = \omega_i$

**Remarque** :

Le théorème de **Clapeyron** permet de calculer le déplacement du point d'application d'une force (projeté sur sa direction) lorsque cette force est unique. En effet :

$$W = 1/2 F \cdot v \rightarrow v = 2W/F$$

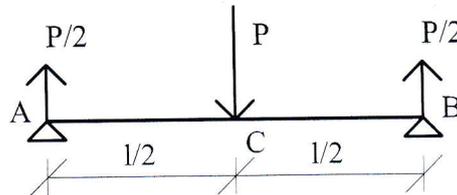
Le théorème de **Castigliano** permet de calculer directement les déplacements projetés des points d'application des forces quel que soit leur nombre.

**Applications** :

a) Calcul de flèche sous charge concentrée :

**Remarque** : pour calculer  $v = \frac{\delta W}{\delta P}$  avec  $W = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx$ , il est en général plus

facile de calculer :  $\frac{\delta W}{\delta P} = \int M \frac{\delta M}{\delta P} \cdot \frac{dx}{EI}$



$$v_C = \frac{\delta W}{\delta P} \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

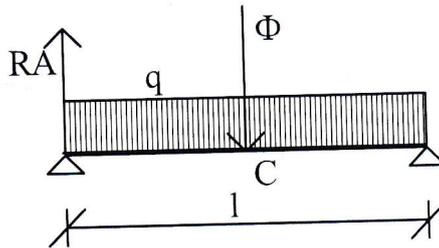
Compte tenu de la symétrie calculons :

$$W = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2}{EI} dx \quad \text{et} \quad v_C = 2 \int_0^{\frac{l}{2}} M \frac{\delta M}{\delta P} \cdot \frac{dx}{EI}$$

avec  $EI$  constant,  $M = Px/2$  et  $\delta M/\delta P = x/2$  on obtient :

$$v_C = \frac{Pl^3}{48EI}$$

- b) On peut aussi calculer le déplacement d'un point où n'agit aucune force en appliquant une force fictive  $\Phi$ . On calcule l'énergie potentielle avec cette force, puis sa dérivée partielle et on fait tendre  $\Phi$  vers 0. Cette méthode est pratique pour calculer les **flèches sous charges réparties** :



$$v_C = \frac{\delta W}{\delta \phi} \quad \text{et} \quad W = \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2}{EI} dx \quad \text{en utilisant la symétrie}$$

$$M(x) = R_A x - qx^2/2 \quad \text{et} \quad R_A = \Phi/2 + ql/2$$

$$\frac{\delta M}{\delta \phi} = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad v_C = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{l}{2}} M \frac{\delta M}{\delta \phi} dx \quad \text{on obtient :}$$

$$v_C = \frac{5ql^4}{384EI}$$

**Remarque sur le signe des déplacements :**

Par les formules de Bresse, ou par la double intégration, les déplacements dirigés vers le bas sont obtenus avec une valeur négative. Les méthodes énergétiques calculent des déplacements projetés sur les directions des forces qui en sont la cause. Leurs valeurs sont donc positives.

### E. Théorème de MENABREA

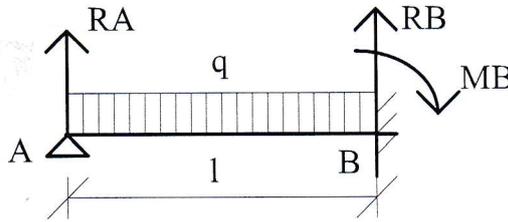
Appliquons le théorème de Castigliano à l'action de contact d'un appui. Le déplacement de cette force sur sa direction est nul si l'appui est fixe. Ce déplacement peut être perpendiculaire à la direction de la force s'il s'agit d'un appui glissant (et dans ce cas la force se déplace sans effectuer de travail). Donc :

**Théorème :** *La dérivée partielle du potentiel interne d'une poutre par rapport à une action de contact surabondante est nulle :*

$$\frac{\delta W}{\delta R_i} = 0$$

Ce théorème s'applique pour un nombre quelconque d'appuis et permet de calculer les inconnues hyperstatiques.

**Application :** poutre encadrée-appuyée.



Calculons  $R_A$  avec Ménabréa :  $\frac{\delta W}{\delta R_A} = 0$

$$M(x) = R_A x - qx^2/2 \quad , \quad \frac{\delta M}{\delta R_A} = x$$

$$\frac{\delta W}{\delta R_A} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\delta M}{\delta R_A} dx = 0 \quad ,$$

on obtient :

$$R_A = \frac{3ql}{8}$$

(c'est plus rapide qu'avec Bresse...)

#### **Remarque :**

si on utilise la même méthode avec une poutre isostatique associée on obtient le même résultat :

$$R_A = 3ql/8.$$

*Le théorème de Ménabréa ne s'applique qu'à des inconnues hyperstatiques .*