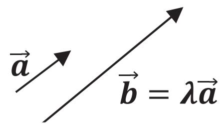
# I - Systèmes de coordonnées

## 1- Introduction



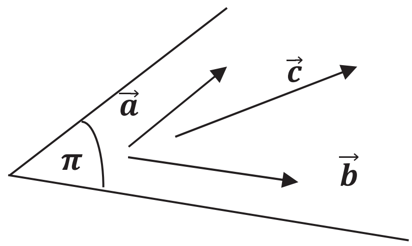

*vecteurs linéairement dépendants*

- On dit que deux vecteurs sont linéairement dépendants, si l'un peut s'exprimer en fonction de l'autre.

$$\vec{b} = \lambda\vec{a} \quad \text{où "}\lambda\text{" est un réel}$$

- On dit que deux vecteurs sont linéairement indépendants, si on ne peut pas exprimé l'un en fonction de l'autre

Remarques : - Dans le plan un vecteur peut s'exprimer en fonction de deux vecteurs linéairement indépendants



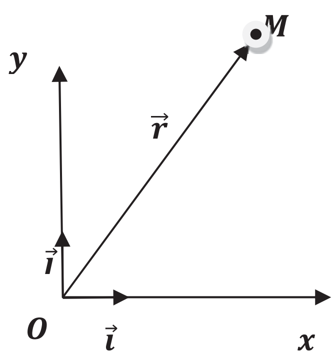

*vecteurs linéairement indépendants*

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$

- Le cas peut se généraliser à trois dimensions et plus

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + \cdots$$

- On dit que trois vecteurs $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ forment une base, s'ils sont linéairement indépendants. S'ils sont orthogonaux deux à deux ils forment une base orthogonale. S'ils sont normés, la base est dite orthonormée




## 2- Représentation dans le plan

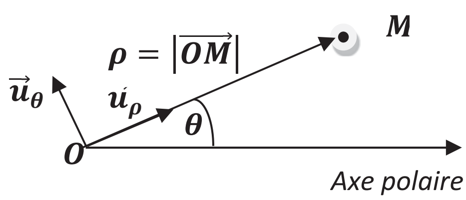
### 2.1- Coordonnées cartésiennes $[(x, y) \rightarrow (\vec{i}, \vec{j})]$

Dans le plan on choisit une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$ où les coordonnées du point "$M$" sont $(x, y)$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Le module est : $|\overrightarrow{OM}| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

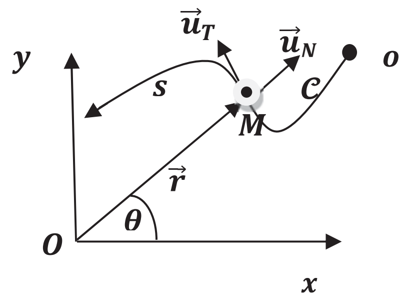
### 2.2- Coordonnées polaires $[(\rho, \theta) \rightarrow (\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)]$




Si on choisit une base locale$(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$. "$O$" choisit arbitrairement comme pôle et $\vec{u}_\rho$ est orienté le long du vecteur $\overrightarrow{OM}$. La direction qui passe par le pôle "$O$" c'est l'axe polaire, il est pris comme référence pour définir l'angle (la coordonnée) "$\theta$". L'autre coordonnée "$\rho$" est le module du vecteur $\overrightarrow{OM}$

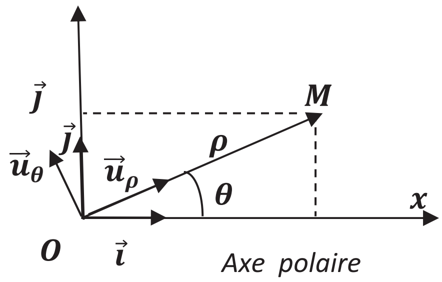
$\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$ Le module est : $|\overrightarrow{OM}| = \rho$

### 2.3- Coordonnées intrinsèques $[(\vec{u}_N, \vec{u}_T)]$




On ne peut représenter le point dans le système de coordonnées intrinsèques que si l'on connait la courbe"$\boldsymbol{C}$" de la trajectoire prise comme axe. Munit d'une origine, la distance $\widehat{oM}$ est notée"$\boldsymbol{s}$". $\widehat{oM} = s$ et $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$

### 2.4- Relation entre les coordonnées des différents systèmes




En coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$

En coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho$

Si on fait un choit tels que l'axe polaire soit confondu avec l'axe $\overrightarrow{ox}$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = \rho\vec{u}_\rho = \rho\cos\theta\,\vec{i} + \rho\sin\theta\,\vec{j}$$

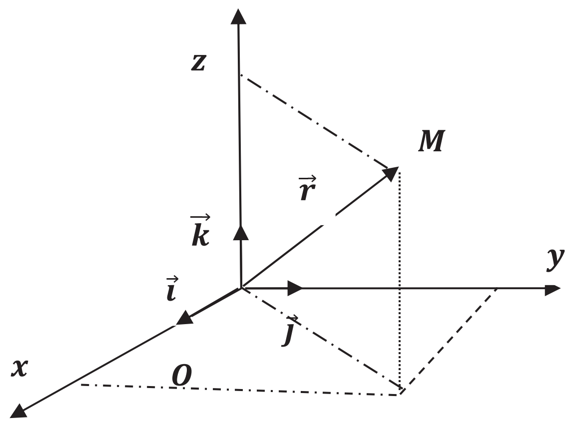
Par comparaison on aura

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg(y/x) \end{cases}$$

***Remarque*** : il ne faut pas confondre les coordonnées polaires et les coordonnées intrinsèques

## 3- Représentation dans l'espace

### 3.1- $[(x, y, z) \rightarrow (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})]$




Dans l'espace on choisit une base orthonormée$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les coordonnées du point "$\boldsymbol{M}$" sont $(x, y, z)$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\,\vec{k}$$

le module est : $\left|\overrightarrow{OM}\right| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

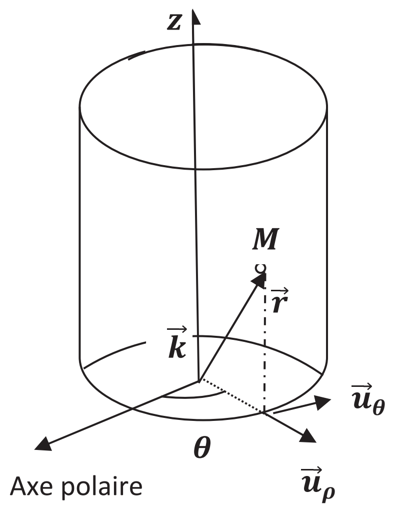
$x$ est la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur $\vec{i}$

$y$ est la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur $\vec{j}$

$z$ est la projection de $\overrightarrow{OM}$ sur $\vec{k}$

### 3.2- Coordonnées cylindrique $[(\rho,\theta,z) \rightarrow (\vec{u}_\rho,\vec{u}_\theta,\vec{k})]$

Le point"$M$" est repéré sur la surface d'un cylindre.
L'axe du cylindre est noté $\overrightarrow{oz}$.
La projection de $\overrightarrow{OM}$, sur sa base est repérée par $(\rho,\theta)$.




$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$$

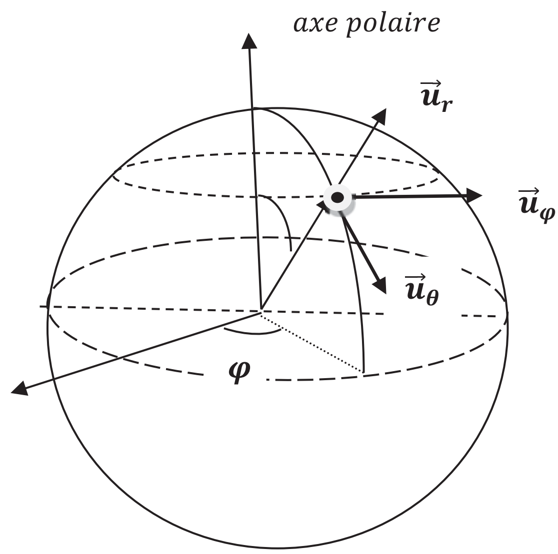
Et

$$|\overrightarrow{OM}| = |\vec{r}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$$

### 3.3- Coordonnées sphériques $[(r,\theta,\varphi) \rightarrow (\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)]$

- Le point"$M$" est repéré sur la surface d'une sphère.
- "$\theta$" angle polaire : entre l'axe polaire pris arbitrairement et la direction $\overrightarrow{OM}$ où "$O$" est le centre de cette sphère.
- La projection de $\overrightarrow{OM}$ sur le plan équatorial est repérée par l'angle azimutal"$\varphi$" par rapport à un axe de direction arbitraire dans ce plan.

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = |\vec{r}|\vec{u}_r$$




$\vec{u}_r$ : vecteur unitaire radial (dans la direction du rayon $\overrightarrow{OM}$)

$\vec{u}_\theta$ : vecteur unitaire tangent au grand cercle (tous les cercles de rayon $\overrightarrow{OM}$).

$\vec{u}_\varphi$ : vecteur unitaire tangent au parallèles (cercles parallèles à l'équateur).

### 3.4- Relation entre les coordonnées des différents systèmes

#### 3.4- 1 Relation entre coordonnées cartésiennes et coordonnées cylindriques

- En coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$
- En coordonnées cylindriques $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k}$ de plus $\vec{u}_\rho = \cos\theta\,\vec{\imath} + \sin\theta\,\vec{\jmath}$

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = \rho\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\sin\theta\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\begin{cases} x = \rho \cos\theta \\ y = \rho \sin\theta \\ z = z \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = arctg(y/x) \end{cases}$$

### 3.4- 2 Relation entre coordonnées cartésiennes et coordonnées sphériques

- En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

- En coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{OM} = |\vec{r}|\vec{u}_r = r\vec{u}_r$$

de plus :

$$\vec{u}_r = sin\theta \cos\varphi\, \vec{i} + sin\theta \sin\varphi\, \vec{j} + \cos\theta\, \vec{k}$$

donc :

$$\begin{cases} x = rsin\theta \cos\varphi \\ y = rsin\theta \sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi = arctg(y/x) \\ \theta = arcos(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}) \end{cases}$$