II - Cinématique

La cinématique est l'étude du mouvement sans tenir compte des causes qui l'engendre

1- Notion de référentiel

2-

- Soit une base orthonormée$(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$, placée en un point pris comme origine, qui sert à repérer un point "M" ce qui constitue un repère. ($rep\grave{e}re = origine + base$)
- Si ce point "M" est en mouvement, il dépend du temps.

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k} \qquad \text{"}t\text{" : est le temps}$$

- La notion du mouvement est relative selon l'observateur (repos, en mouvement indépendamment ou avec le mobile"M"). L'observateur est le témoin du temps.

« Pour décrire le mouvement d'un point matériel, un repère est nécessaire, qu'on lui liant un observateur, ce qui nous amènes à définir un référentiel »

$$rep\grave{e}re\ (origine + base) + observateur = R\acute{e}f\acute{e}rentiel$$

2- Equation horaire et équation de la trajectoire

2.1- Vecteur position

Le mouvement d'un point matériel est décrit dans un référentiel. Commençant par le situé (vecteur position), puis donner sa nature.

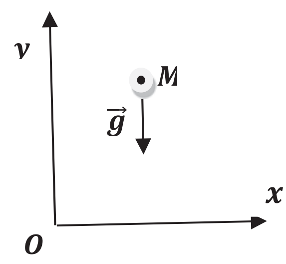
Dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ le vecteur position est donné par :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

2.2- Equation horaire

L'équation horaire exprime la manière du changement du mouvement dans le temps en donnant ces paramètres cinématiques.

Exemple : Chute libre



$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0$$

La distance parcourue "y" du point "M"est donnée en fonction du temps "$y(t)$" est l'équation horaire

Remarque : les coordonnées du point "M": $x(t), y(t), z(t)$, sont les équations paramétriques

2.3- Equation de la trajectoire

- Puisque le vecteur $\overrightarrow{OM}$ change de position lors de l'écoulement du temps on a :

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad (x(t), y(t), \text{et } z(t)) \text{ sont dites équations paramétriques du mouvement.}$$

- La trajectoire est le lieu géométrique qu'occupe le mobile dans l'espace lors des variations des équations paramétriques

- Pour trouver l'équation de la trajectoire, on élimine le temps des équations paramétriques, et on trouve la forme : $f(x, y, z) = 0$

Exemple : Mouvement dans le plan

$$\begin{cases} x = a\cos(\omega t) \\ y = a\sin(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = a^2\cos^2(\omega t) \\ y^2 = a^2\sin^2(\omega t) \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2$$

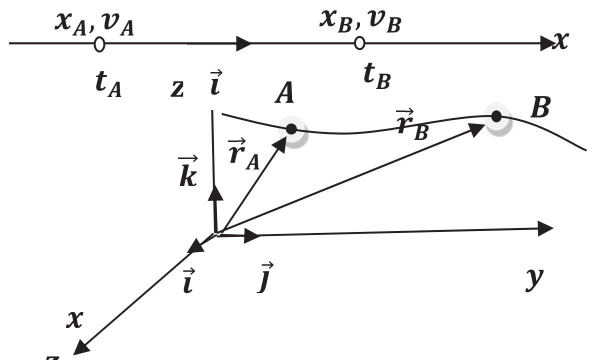
$Equation\ d'un\ cercle\ de\ rayon\ "R = a"\ et\ de\ centre\ "C(0,0)"$

3- Notion de vitesse

3.1- Vitesse moyenne

La vitesse moyenne est le rapport du déplacement entre deux points"A *et* B"au temps du parcours sans tenir compte de la nature du mouvement (la manière dont le tronçon AB est parcouru).

- Dans une seul direction (une dimension)



$$< \vec{v} >= \vec{v}_{moy} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}\vec{\imath} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}\vec{\imath} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{\imath}$$

- Dans l'espace (trois dimensions) :$A(x_A, y_A, z_A)$; $B(x_B, y_B, z_B)$

$$< \vec{v} >= \vec{v}_{moy} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_f - \vec{r}_i}{t_f - t_i} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}\vec{\imath} + \frac{y_B - y_A}{t_B - t_A}\vec{\jmath} + \frac{z_B - z_A}{t_B - t_A}\vec{k}$$

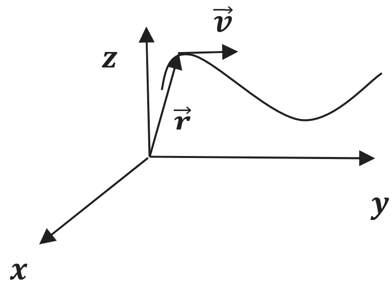
3.2- Vitesse instantanée

C'est la vitesse qu'aura le mobile à chaque instant du parcours

$$\vec{v}(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}$$

$$|\vec{v}(\mathrm{t})| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

Remarque : *La vitesse instantanée, géométriquement, est la pente de la courbe qui représente la variation de la position dans le temps.*

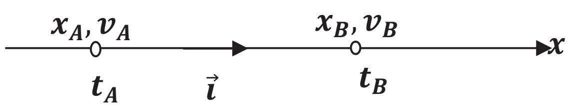


4- Notion d'accélération

4.1- Accélération moyenne

- L'accélération est le taux de variation de la vitesse dans le temps.
- L'accélération moyenne est le taux de variation de la vitesse entre les points initial"$\boldsymbol{A}$" et final"$\boldsymbol{B}$, sans tenir compte de la manière dont le parcours est traversé.

- Dans une seul direction



$$< \vec{a} >= \vec{a}_{moy} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A}\vec{i}$$

- Dans l'espace (trois dimensions)

$$< \vec{a} >= \vec{a}_{moy} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{v_{xB} - v_{xA}}{t_B - t_A}\vec{i} + \frac{v_{yB} - v_{yA}}{t_B - t_A}\vec{j} + \frac{v_{zB} - v_{zA}}{t_B - t_A}\vec{k}$$

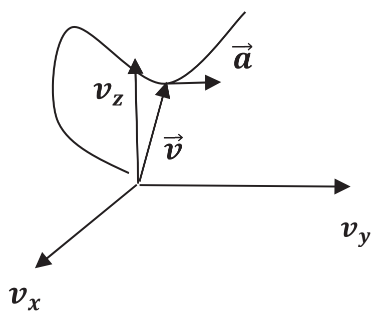
4.2- Accélération instantanée

- L'accélération instantanée est le taux de variation de la vitesse dans le temps à chaque moment

$$\vec{a}(\mathrm{t}) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

- L'hodographe du mouvement est le lieu géométrique décrit par l'extrémité du vecteur vitesse

- Remarque : *L'accélération instantanée, géométriquement, est la pente de la courbe (hodographe) qui représente la variation de la vitesse dans le temps.*



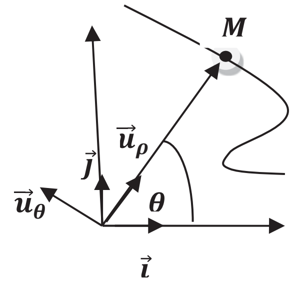
$$\vec{a}(\mathrm{t}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$$

5- Position, vitesse et accélération dans les différents systèmes de coordonnées

5.1- Dérivées des vecteurs unitaires

- Base polaire $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$

$\boldsymbol{\theta}(\boldsymbol{t})$ et $\boldsymbol{\rho}(\boldsymbol{t})$ sont variable dans le temps $\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta$ s'écrivent dans la base cartésienne comme suit :



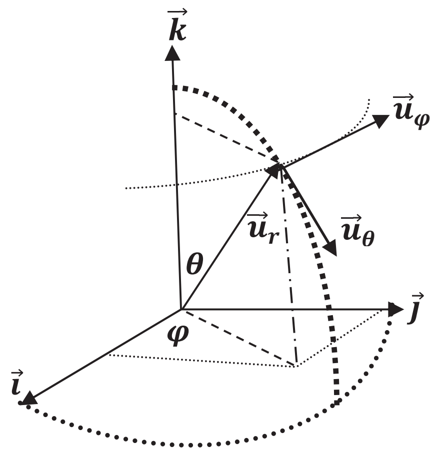
$$\begin{cases}\vec{u}_\rho = cos(\theta)\vec{\imath} + sin(\theta)\vec{\jmath}\\ \vec{u}_\theta = -sin(\theta)\vec{\imath} + cos(\theta)\vec{\jmath}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_\rho}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = [-sin(\theta)\vec{\imath} + cos(\theta)\vec{\jmath}]\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\left[cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\vec{\imath} + sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\vec{\jmath}\right]\\ \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_\theta}{d\theta}\dfrac{d\theta}{dt} = [-cos(\theta)\vec{\imath} - sin(\theta)\vec{\jmath}]\dfrac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\left|-sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)\vec{\imath} + cos(\theta+\dfrac{\pi}{2})\vec{\jmath}\right|\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dot{\vec{u}}_\rho = \dfrac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta\\ \dot{\vec{u}}_\theta = \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho\end{cases}$$

Pour retrouver la dérivée d'un vecteur unitaire, on fait une rotation de " $+\frac{\pi}{2}$ "

Remarque : ***la base cylindrique donne des résultats similaires que la base polaire en ajoutant la coordonnée*** "z"



- Base sphérique $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi$

$$\begin{cases}\vec{u}_r = sin\theta\, cos\,\varphi\vec{\imath} + sin\theta\, sin\,\varphi\,\vec{\jmath} + cos\,\theta\,\vec{k}\\ \vec{u}_\theta = cos\theta\, cos\,\varphi\vec{\imath} + cos\theta\, sin\,\varphi\,\vec{\jmath} - sin\theta\vec{k}\\ \vec{u}_\varphi = -\,sin\,\varphi\vec{\imath} + cos\,\varphi\,\vec{\jmath}\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\dot{\vec{u}}_r = \dfrac{d\vec{u}_r}{dt} = \dfrac{\partial\vec{u}_r}{\partial\theta}.\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{\partial\vec{u}_r}{\partial\varphi}.\dfrac{d\varphi}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\, sin\theta\,\vec{u}_\varphi\\ \dot{\vec{u}}_\theta = \dfrac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \dfrac{\partial\vec{u}_\theta}{\partial\theta}.\dfrac{d\theta}{dt} + \dfrac{\partial\vec{u}_\theta}{\partial\varphi}.\dfrac{d\varphi}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r + \dot{\varphi}cos\theta\vec{u}_\varphi\\ \dot{\vec{u}}_\varphi = \dfrac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \dfrac{d\vec{u}_\varphi}{d\varphi}.\dfrac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}(sin\theta\,\vec{u}_r + \, cos\theta\vec{u}_\theta)\end{cases}$$

5.2- Coordonnées polaires

a- vecteur position

Comme on la déjà vu : $\overrightarrow{OM} = \vec{r} = \rho\vec{u}_\rho \quad \Rightarrow |\overrightarrow{OM}| = \rho$

b- vecteur vitesse

D'après la définition :

$$\vec{v}(\mathbf{t}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho)}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} \qquad \text{Or} \quad \frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$$\vec{v}(\mathbf{t}) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\theta \quad \text{ou} \begin{cases}|\vec{v}_\rho| = \dot{\rho}\\ |\vec{v}_\theta| = \rho\dot{\theta}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow |\vec{v}(\mathrm{t})| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2}$$

c- vecteur accélération

D'après la définition :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta)$$

$$\Longrightarrow \quad \vec{a} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{u}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\theta$$

Ou $\begin{cases} |\vec{a}_\rho| = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \\ |\vec{a}_\theta| = (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \end{cases} \quad \Longrightarrow \; |\vec{a}(\mathrm{t})| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2}$

5.3- Coordonnées intrinsèques

La coordonnée"s"est la distance parcourue le long de la trajectoire telle que : $s = \widehat{oM}$ et le vecteur position est :

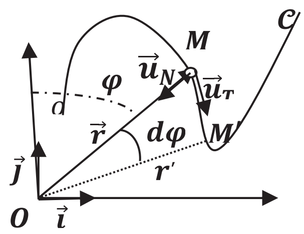
$$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}.$$

Si le mobile se déplace du point"M" vers le point "M' "

$$\vec{r}' = \vec{r} + \overrightarrow{MM}' \qquad \Rightarrow \qquad \vec{r}' - \vec{r} = \overrightarrow{MM}' = \overrightarrow{dr} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}$$

Le segment"ds"de la courbe est lié à la variation des coordonnées cartésiennes tels que :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = |\overrightarrow{dr}|$$



b- vecteur vitesse

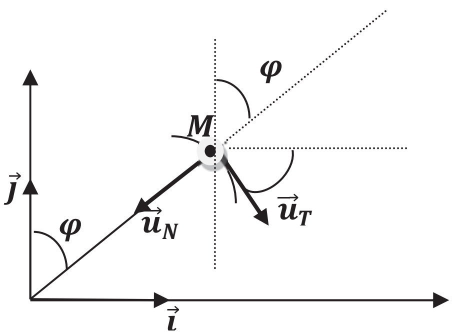
D'après la définition :

$$\vec{v}(\mathrm{t}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\overrightarrow{MM}'}{dt} = \frac{|\overrightarrow{MM}'|}{dt}\vec{u}_T$$

Sachant qu'à la limite $\;ds = |\overrightarrow{MM}'| = |\overrightarrow{dr}|$

$$\vec{v}(\mathrm{t}) = \frac{|\overrightarrow{MM}'|}{dt}\vec{u}_T = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = v.\vec{u}_T$$

le vecteur vitesse est orienté suivant la tangente à la courbe



c- vecteur accélération

D'après la définition :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(v.\vec{u}_T) = \frac{d}{dt}(v).\vec{u}_T + v.\frac{d}{dt}(\vec{u}_T)$$

D'après la figure précédente : $\vec{u}_T$ est tangent à la courbe et $\vec{u}_N$ orienté vers la concavité

$$\begin{cases}\vec{u}_T = cos\varphi\vec{i} - sin\varphi\vec{j}\\ \vec{u}_N = -sin\varphi\vec{i} - cos\varphi\vec{j}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\dot{\vec{u}}_T = \dfrac{d\vec{u}_T}{dt} = -\dfrac{d\varphi}{dt}(sin\varphi\vec{i} + cos\varphi\vec{j}) = \dot{\varphi}\vec{u}_N\\ \dot{\vec{u}}_N = \dfrac{d\vec{u}_N}{dt} = -\dfrac{d\varphi}{dt}(cos\varphi\vec{i} - sin\varphi\vec{j}) = -\dot{\varphi}\vec{u}_T\end{cases}$$

Alors : $$\vec{a} = \frac{d}{dt}(v).\vec{u}_T + v.\dot{\varphi}\vec{u}_N$$

Soit $\widehat{MM'} = ds = \rho d\varphi$
où "ρ" est le rayon de courbure

$$\frac{ds}{dt} = \rho\frac{d\varphi}{dt} = v \Rightarrow \dot{\varphi} = v/\rho$$

Finalement $\vec{a} = \frac{d}{dt}(v).\vec{u}_T + v.\frac{v}{\rho}\vec{u}_N = \frac{d}{dt}(v).\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$$\begin{cases}\vec{a}_T = \ \textit{est la composante tangentielle du à la variation du module de la vitesse}\\ \vec{a}_N = \ \textit{est la composante normale du à la variation de la direction de la vitesse}\end{cases}$$

5.4- Coordonnées cylindriques

a- vecteur position

Le vecteur position est donné par : $\overrightarrow{OM} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \quad \Longrightarrow |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{\rho^2 + z^2}$

b- vecteur vitesse

D'après la définition : $\vec{v}(\mathbf{t}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(\rho\vec{u}_\rho + z\vec{k})}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \dot{z}\vec{k}$ Or $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$$\vec{v}(\mathbf{t}) = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k} = \vec{v}_\rho + \vec{v}_\theta + \vec{v}_z \quad \text{Ou} \quad \begin{cases}|\vec{v}_\rho| = \dot{\rho}\\ |\vec{v}_\theta| = \rho\dot{\theta}\\ |\vec{v}_z| = \dot{z}\end{cases}$$

$$\Longrightarrow |\vec{v}(\mathbf{t})| = \sqrt{v_\rho^2 + v_\theta^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + (\rho\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

c- vecteur accélération

D'après la définition :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k}\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{u}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta + \ddot{z}\vec{k} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_\rho + \vec{a}_\theta + \vec{a}_z \qquad \text{Ou} \quad \begin{cases} |\vec{a}_\rho| = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2) \\ |\vec{a}_\theta| = (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}) \\ |\vec{a}_z| = \ddot{z} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow |\vec{a}(\mathrm{t})| = \sqrt{a_\rho^2 + a_\theta^2 + a_z^2} = \sqrt{(\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)^2 + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})^2 + \ddot{z}^{\,2}}$$

5.5- Coordonnées sphériques

a- vecteur position

Le vecteur position est donné par **:**

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r \quad \Longrightarrow |\overrightarrow{OM}| = r$$

b- vecteur vitesse

D'après la définition :

$$\vec{v}(\mathrm{t}) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\vec{u}}_r \quad \textbf{or} \quad \dot{\vec{u}}_r = \dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{u}_\varphi.$$

$$\vec{v}(\mathrm{t}) = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{u}_\varphi = \vec{v}_r + \vec{v}_\theta + \vec{v}_\varphi$$

$$\text{Ou} \quad \begin{cases} |\vec{v}_r| = \dot{r} \\ |\vec{v}_\theta| = r\dot{\theta} \\ |\vec{v}_\varphi| = r\dot{\varphi}sin\theta \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \qquad |\vec{v}(\mathrm{t})| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_\varphi^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + (r\dot{\varphi}sin\theta)^2}$$

c- vecteur accélération

D'après la définition :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{u}_\varphi\right)$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = \ddot{r}\vec{u}_r + \dot{r}\dot{\vec{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{u}}_\theta + \dot{r}\dot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\ddot{\varphi}\,sin\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\,cos\theta\,\vec{u}_\varphi + r\dot{\varphi}\,sin\theta\,\dot{\vec{u}}_\varphi$$

Sachant aussi que : $$\dot{\vec{u}}_\theta = \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \frac{\partial\vec{u}_\theta}{\partial\theta}.\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\vec{u}_\theta}{\partial\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r + \dot{\varphi}cos\theta\vec{u}_\varphi$$
$$\dot{\vec{u}}_\varphi = \frac{d\vec{u}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{u}_\varphi}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = -\dot{\varphi}(sin\theta\,\vec{u}_r + cos\theta\vec{u}_\theta)$$

$$\Longrightarrow \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2sin^2\theta\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2sin\theta cos\theta\right)\vec{u}_\theta + \left(r\ddot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\right)\vec{u}_\varphi$$

$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_\theta + \vec{a}_\varphi$ Ou $\begin{cases} |\vec{a}_r| = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2sin^2\theta \\ |\vec{a}_\theta| = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2sin\theta cos\theta \\ |\vec{a}_\varphi| = r\ddot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta \end{cases}$

Puisque $|\vec{a}(\mathbf{t})| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_\varphi^2} \Longrightarrow$

$$|\vec{a}| = \sqrt{\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2sin^2\theta\right)^2 + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2sin\theta cos\theta\right)^2 + \left(r\ddot{\varphi}sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}sin\theta\right)^2}$$

6-Mouvements particuliers

En générale on rencontre dans la nature 3 types de mouvements

- Le mouvement de translation.
- Le mouvement de rotation.
- Le mouvement vibratoire

On va se limiter à certain mouvement particulier de chaque type.

6.1- Mouvement rectiligne

Lorsque la trajectoire du mobile"$\boldsymbol{M}$" est une droite, le mouvement est dit rectiligne.

a- Mouvement rectiligne uniforme (à vitesse constante)

Si le mouvement se fait à vitesse constante$\left(\vec{a} = \vec{0}\right)$, le mouvement est dit uniforme

$\Delta v = v - v_0$ Puisque "v" est constante $\Longrightarrow$ $v = v_0$ et $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = 0$

Le parcours : $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $\Longrightarrow$ $\Delta x = x_f - x_i = v(t_f - t_i)$

Si $x_i = 0$ et $t_i = 0$ alors

$x = vt.$ $\quad C'est\ l'equation\ du\ mouvement\ rectiligne\ uniforme$

Le même résultat est donné par la forme intégrale car :

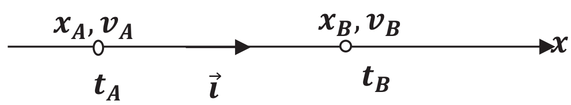
$v = {dx}/{dt} \Longrightarrow dx = vdt$ D'où $\int_{x_i}^{x_f} dx = \int_{t_i}^{t_f} vdt \quad \Longrightarrow \quad x_f - x_i = v(t_f - t_i)$

b- Mouvement rectiligne uniformément varié (à accélération constante)

Si le mouvement possède (se fait avec) une accélération constante, il est dit uniformément varié.

Exemple : chute libre

- Soit un mouvement qui se fait suivant la direction $\overrightarrow{ox}$



$$\vec{a}_{moy} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A}\vec{\imath}$$

Lorsque le mouvement est uniformément varié $a = constante$

$a_{moy} = a \quad \Longrightarrow \quad \Delta v = v_B - v_A = a(t_B - t_A)$

Si $t_B = t$ temps quelconque et $t_A = t_0$ et que $v_B = v\,, v_A = v_0$ ainsi que $x_B = x\,, x_A = x_0$

Alors : $\quad v_B = v = a(t - t_0) + v_0$

De même $\vec{v}_{moy} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}\vec{\imath} = \frac{x_B - x_A}{t_B - t_A}\vec{\imath} \quad \Longrightarrow \quad v_{moy} = \frac{x - x_0}{t - t_0}$

On sait que la valeur moyenne est donnée par :

$X_{moy} = \bar{X} = \frac{\sum_{l=1}^{n} x_l}{n} \quad \Longrightarrow \quad v_{moy} = \frac{v + v_0}{2}$

D'où $v_{moy} = \frac{x - x_0}{\Delta t} = \frac{v + v_0}{2}$ puisque $v = a(t - t_0) + v_0$

$$\Longrightarrow x - x_0 = \frac{a(t - t_0) + v_0}{2}(t - t_0) + \frac{v_0}{2}(t - t_0)$$

$$x = \frac{a}{2}(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0$$
$c'est\ l'equation\ du\ mouvement\ rectiligne\ uniformément\ varié$

Remarque : On peut retrouver le même résultat en utilisant la forme intégrale.
Si l'accélération est constante $\boldsymbol{a} = \frac{dv}{dt} \Rightarrow \boldsymbol{dv = adt} \Rightarrow \int_{v_0}^{v} \boldsymbol{dv} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{adt}$
$\Rightarrow \boldsymbol{v - v_0 = a(t - t_0)}$ ou bien $\boldsymbol{v = v_0 + a(t - t_0)}$

Or $\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} \Rightarrow \boldsymbol{dx = vdt} \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \boldsymbol{dx} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{vdt} = \int_{t_0}^{t} [\boldsymbol{v_0 + a(t - t_0)}]\boldsymbol{dt}$
$\boldsymbol{x - x_0} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0)}$ ou bien $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2}\boldsymbol{a(t - t_0)^2 + v_0(t - t_0) + x_0}$

6.2- Mouvement curviligne

Lorsque la trajectoire du mobile"$\boldsymbol{M}$" est une courbe quelconque, le mouvement est dit curviligne.

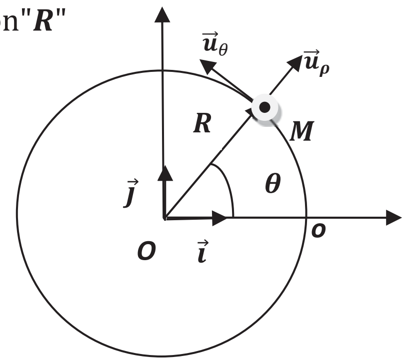
6.2.1- Mouvement circulaire

La trajectoire du mobile"$\boldsymbol{M}$" est un cercle

a-Mouvement circulaire uniforme ($\dot{\theta} = \omega$ est constante)

lorsque le mouvement du mobile"$\boldsymbol{M}$" se fait à vitesse angulaire constante.
La distance parcourue est l'arc $\widehat{\boldsymbol{oM}} = \boldsymbol{s}$, elle s'exprime en fonction du rayon"$\boldsymbol{R}$" et de l'angle "$\boldsymbol{\theta}$" comme suit :$\boldsymbol{s = R\theta}$

Le vecteur position est $\overrightarrow{\boldsymbol{OM}} = \vec{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{R}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}$



- La vitesse angulaire et la vitesse linéaire

- La vitesse angulaire est donnée par la dérivée de l'angle"$\boldsymbol{\theta}$" par rapport au temps. $\frac{\boldsymbol{d\theta}}{\boldsymbol{dt}} = \dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\omega}$

- La vitesse linéaire est donnée par la dérivée du déplacement par rapport au temps. $\frac{\boldsymbol{d\vec{r}}}{\boldsymbol{dt}} = \vec{\boldsymbol{v}} = \frac{\boldsymbol{d(R\vec{u}_\rho)}}{\boldsymbol{dt}} = \dot{\boldsymbol{R}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{R}\dot{\vec{\boldsymbol{u}}}_{\boldsymbol{\rho}}$

puisque "$\boldsymbol{R}$" est constant (mouvement circulaire) $\Rightarrow \dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}$, de plus $\dot{\vec{\boldsymbol{u}}}_{\boldsymbol{\rho}} = \dot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}$

$\Rightarrow \vec{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{R}\dot{\vec{\boldsymbol{u}}}_{\boldsymbol{\rho}} = \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}}$

donc $|\vec{\boldsymbol{v}}| = \boldsymbol{v} = \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{R\omega}$, et $\frac{|\boldsymbol{d\vec{r}}|}{\boldsymbol{dt}} = |\vec{\boldsymbol{v}}| = \frac{\boldsymbol{ds}}{\boldsymbol{dt}}$

La vitesse linéaire est tangentielle à la courbe (à la trajectoire)

- L'accélération angulaire et l'accélération linéaire

- L'accélération angulaire est donnée par la dérivée de la vitesse angulaire"$\dot{\boldsymbol{\theta}}$" par rapport au temps.

$\boldsymbol{\varepsilon} = \ddot{\boldsymbol{\theta}} = \frac{\boldsymbol{d(\dot{\theta})}}{\boldsymbol{dt}}$ Pour un mouvement circulaire uniforme $\boldsymbol{\varepsilon = o}$

- L'accélération linéaire est donnée par la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

$\frac{\boldsymbol{d\vec{v}}}{\boldsymbol{dt}} = \vec{\boldsymbol{a}} = \frac{\boldsymbol{d(R\dot{\theta}\vec{u}_\theta)}}{\boldsymbol{dt}} = \dot{\boldsymbol{R}}\dot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{R}\ddot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\theta}}\dot{\vec{\boldsymbol{u}}}_{\boldsymbol{\theta}}$

puisque "$\boldsymbol{R}$" et "$\dot{\boldsymbol{\theta}}$" sont constants (mouvement circulaire uniforme) $\Rightarrow \dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{0}$ et $\ddot{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{0}$

et $\dot{\vec{\boldsymbol{u}}}_{\boldsymbol{\theta}} = -\dot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{a}} = \boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\theta}}(-\dot{\boldsymbol{\theta}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}) = -\boldsymbol{R}\dot{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{2}}\vec{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{\rho}}$

L'accélération linéaire est radiale et dirigée vers le centre (centripète)

b- Mouvement circulaire uniformément varié ($\varepsilon = \ddot{\theta}$ est constante)

On a : $\boldsymbol{\varepsilon = \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} \Longrightarrow d\dot{\theta} = \varepsilon dt \Longrightarrow \int_{\dot{\theta}_i}^{\dot{\theta}_f} d\dot{\theta} = \int_{t_i}^{t_f} \varepsilon dt \quad \Longrightarrow \dot{\theta}_f - \dot{\theta}_i = \varepsilon(t_f - t_i)}$

Si $\boldsymbol{t_f = t}$ temps quelconque et $\boldsymbol{t_i = t_0}$ et que $\boldsymbol{\dot{\theta}_f = \dot{\theta}}$, $\boldsymbol{\dot{\theta}_i = \dot{\theta}_0}$ alors :

$\boldsymbol{\dot{\theta} = \varepsilon(t - t_0) + \dot{\theta}_0}$

Sachant que : $\boldsymbol{\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} = \omega \Longrightarrow d\theta = \omega dt \Longrightarrow \int_{\theta_i}^{\theta_f} d\theta = \int_{t_i}^{t_f} \omega dt}$

$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{\theta_f - \theta_i = \frac{1}{2}\varepsilon(t_f - t_i)^2 + \dot{\theta}_i(t_f - t_i)}$$

Et si : $\boldsymbol{\theta_f = \theta}$, $\boldsymbol{\theta_i = \theta_0 \Longrightarrow \theta - \theta_0 = \frac{1}{2}\varepsilon(t_f - t_0)^2 + \dot{\theta}_0(t_f - t_0)}$

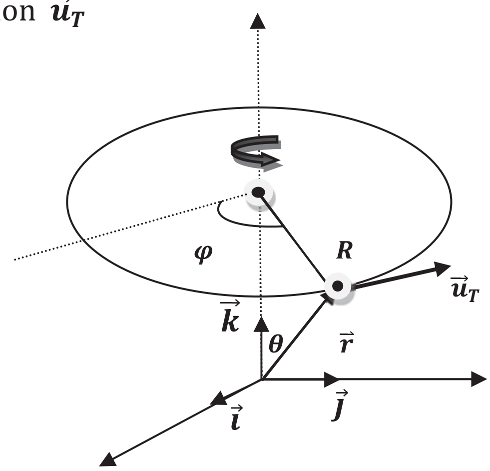
$$\Longrightarrow \quad \boldsymbol{\theta = \frac{1}{2}\varepsilon(t - t_0)^2 + \dot{\theta}_0(t - t_0) + \theta_0}$$

- Expression vectorielle entre la vitesse linéaire et la vitesse angulaire

Puisque la vitesse linéaire a pour module $\boldsymbol{v = R\dot{\varphi}}$ et pour direction $\boldsymbol{\vec{u}_T}$

Donc : $\boldsymbol{\vec{v} = R\dot{\varphi}\vec{u}_T}$

Comme le montre la figure : $\boldsymbol{\vec{\dot{\varphi}} = \omega\vec{k}}$

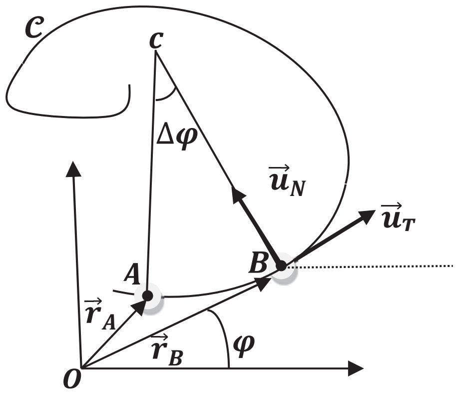


sachant que : $\begin{cases} \boldsymbol{v = R\dot{\varphi} = R\omega} \\ |\vec{\omega}\wedge\vec{r}| = |\vec{\omega}||\vec{r}|\boldsymbol{sin\theta} \\ \boldsymbol{R} = |\vec{r}|\boldsymbol{sin\theta} \quad \boldsymbol{et\ \vec{u}_T} \perp (\vec{\omega}, \vec{r}) \end{cases}$

$$\Longrightarrow \boldsymbol{\vec{v} = R\dot{\varphi}\vec{u}_T = \omega r sin\theta \vec{u}_T = \vec{\omega}\wedge\vec{r}}$$

c - Mouvement quelconque

Lors du déplacement du mobile de "$\boldsymbol{A}$" vers"$\boldsymbol{B}$", il parcours l'arc "$\boldsymbol{s = \widehat{AB}}$".
Le vecteur position est donné par "$\boldsymbol{\vec{r}}$ ", le déplacement est : $\boldsymbol{\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A}$
Pour des variations élémentaires $\boldsymbol{(A \to B)}$, le secteur "$\boldsymbol{ds}$" est confondu au déplacement "$\boldsymbol{dr}$"



$$\boldsymbol{d\vec{r} = |d\vec{r}|\vec{u}_T = ds\vec{u}_T}$$

- **<u>Vitesse du mouvement</u>**

On sait que :

$$\boldsymbol{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\vec{u}_T = |\vec{v}|\vec{u}_T = v\vec{u}_T}$$

La vitesse linéaire est toujours tangentielle à la courbe

- **Accélération du mouvement**

On sait que :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\vec{u}_T)}{dt} = \frac{dv}{dr}\vec{u}_T + \frac{vd\vec{u}_T}{dt}$$

Or $\begin{cases} \vec{u}_T = cos(\varphi)\vec{\imath} + sin(\varphi)\vec{\jmath} \\ \vec{u}_N = -sin(\varphi)\vec{\imath} + cos(\varphi)\vec{\jmath} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{d\vec{u}_T}{dt} = \frac{d\vec{u}_T}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}[-sin(\varphi)\vec{\imath} + cos(\varphi)\vec{\jmath}] \\ \frac{d\vec{u}_N}{dt} = \frac{d\vec{u}_N}{d\varphi}.\frac{d\varphi}{dt} = -\dot{\varphi}[cos(\varphi)\vec{\imath} + sin(\varphi)\vec{\jmath}] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\vec{u}}_T = \dot{\varphi}\,\vec{u}_N \\ \dot{\vec{u}}_N = -\dot{\varphi}\vec{u}_T \end{cases}$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dr}\vec{u}_T + v(\dot{\varphi}\,\vec{u}_N)$$

Sachant que : $v = \rho\frac{d\varphi}{dt} = \rho\dot{\varphi}$ où "ρ" est le rayon de courbure de "C" $\Rightarrow$ $\dot{\varphi} = \frac{v}{\rho}$

Finalement : $\vec{a} = \frac{dv}{dr}\vec{u}_T + \frac{v^2}{\rho}\,\vec{u}_N = \vec{a}_T + \vec{a}_N$

$$\begin{cases} a_T = \frac{dv}{dr} \quad \textit{due a la variation du module du vecteur vitesse: accélération tangentielle} \\ a_N = \frac{v^2}{\rho} \quad \textit{due a la variation de la direction du vecteur vitesse: accélération normale} \end{cases}$$

6.3- Mouvement harmonique

Si le mouvement du mobile se fait le long d'une droite avec des va et viens le mouvement est dit harmonique rectiligne.

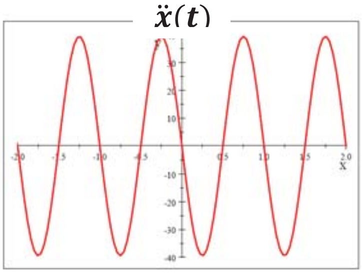
- **Equation horaire**

L'équations horaire du mouvement est une fonction circulaire de forme :

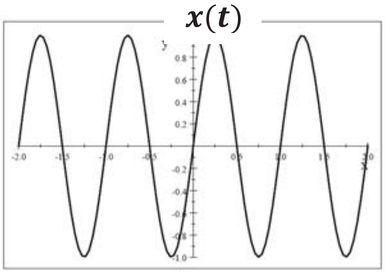
$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

où $\begin{cases} x_0 \; \textit{est l'amplitudedu mouvement} \\ \omega = \frac{2\pi}{T} \textit{est la pulsation du mouvement où } T \textit{ est la periode} \\ \omega t + \varphi \textit{ est la phase du mouvement} \\ \varphi \textit{ est la phase initiale} \end{cases}$

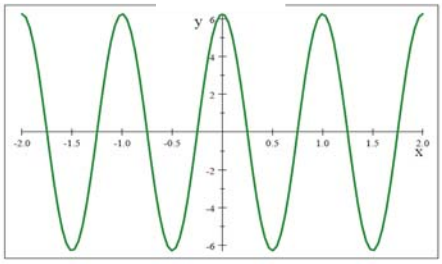
$\ddot{x}(t)$



$x(t)$



$\dot{x}(t)$



➢ Vitesse du mouvement

On sait que la vitesse est donnée par la dérivée du vecteur position par rapport au temps.

$$\boldsymbol{v = \frac{dx}{dt} = \omega x_0 \cos(\omega t + \varphi) = \omega x_0 \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

La différence de phase entre la vitesse et l'abscisse est "$\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$". Elles sont dites en quadrature

➢ Accélération du mouvement

On sait que l'accélération est donnée par la dérivée de la vitesse par rapport au temps.

$$\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi) = \omega^2 x_0 \sin(\omega t + \varphi + \pi) = -\omega^2 x}$$

La différence de phase entre la vitesse et l'accélération est "$\boldsymbol{\pi}$". Elles sont dites en opposition de phase.

Remarque :

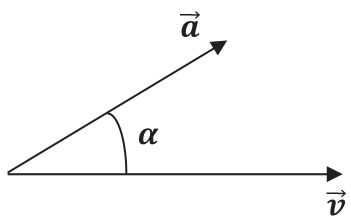
à partir de l'expression de l'accélération on peut déduire l'équation du mouvement harmonique.

$$\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad \Longrightarrow \quad \ddot{x} + \omega^2 x = o}$$

c'est une équation différentielle du second ordre

En cas générale

$$\boldsymbol{\frac{dv^2}{dt} = 2\vec{v} \circ \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \circ \vec{a} = 2|\vec{v}||\vec{a}|cos\alpha}$$



- S'il y a mouvement, la vitesse $\boldsymbol{v \neq 0}$

* Mouvement uniforme : $\boldsymbol{\frac{dv^2}{dt} = 0} \quad \Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \\ \boldsymbol{\alpha = \pm\frac{\pi}{2}} \end{cases}$

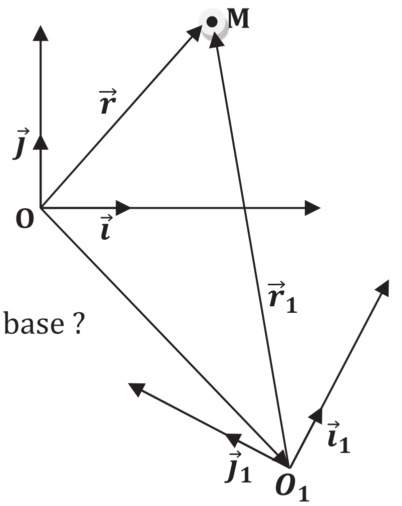
$$\Longrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{a = 0} \quad \textit{mouvement réctiligne uniforme} \\ \boldsymbol{\alpha = \pm\frac{\pi}{2}} \quad \textit{mouvement circulaire uniforme } \boldsymbol{\vec{v} \perp \vec{a}} \end{cases}$$

* Mouvement uniformément varié

- Le mouvement est accéléré si la norme de la vitesse est une fonction croissante du temps
  $\boldsymbol{\frac{dv^2}{dt}} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{2|\vec{v}||\vec{a}|cos\alpha} > 0 \quad \Longrightarrow \boldsymbol{cos\alpha} > 0 \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{0} < \alpha < \frac{\pi}{2}$
- Le mouvement est retardé si : $\boldsymbol{2|\vec{v}||\vec{a}|cos\alpha} < 0 \;\Longrightarrow \boldsymbol{cos\alpha} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

7 Mouvement relatif

7.1- Changement de base



* Dans une base orthonormée$(\boldsymbol{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ s'écrit :

$\overrightarrow{OM} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$

* Dans une autre base orthonormée$(\boldsymbol{O_1}, \vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1)$, le vecteur $\overrightarrow{O_1M}$ s'écrit :

$\overrightarrow{O_1M} = \vec{r}_1 = x_1\vec{\imath}_1 + y_1\vec{\jmath}_1$

Question : comment écrire les coordonnées d'une base en fonction de l'autre base ?
Le lien qui existe entre les deux vecteurs positions est

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

$$\Rightarrow \quad x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = (x_{O1}\vec{\imath} + y_{O1}\vec{\jmath}) + (x_1\vec{\imath}_1 + y_1\vec{\jmath}_1)$$

Le passage de $\overrightarrow{OM}$ vers $\overrightarrow{O_1M}$ est dit changement de base

7.2- Mouvement d'un référentiel *R₁* par rapport à *R*

Soient deux bases orthonormées $(\boldsymbol{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ et $(\boldsymbol{O_1}, \vec{\imath}_1, \vec{\jmath}_1, \vec{k}_1)$ affectées aux deux référentiels "$\mathcal{R}$" fixe et "$\mathcal{R}_1$" mobile.

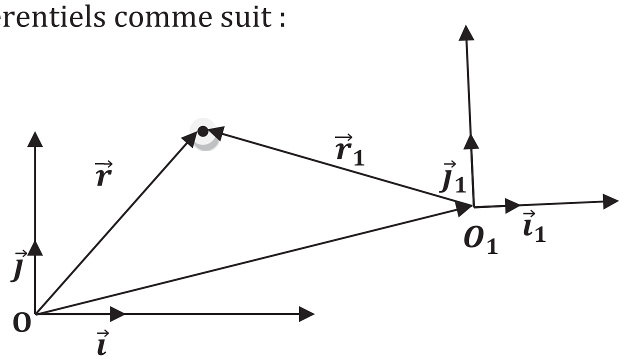
7.2.1- Vecteur position

Les vecteurs positions s'écrivent dans les deux référentiels comme suit :
dans le référentiel fixe

$\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

dans le référentiel mobile

$\overrightarrow{O_1M}_{/\mathcal{R}_1} = \vec{r}_1 = x_1\vec{\imath}_1 + y_1\vec{\jmath}_1 + z_1\vec{k}$



Le lien entre les deux vecteurs position est :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OO_1}_{/\mathcal{R}} + \overrightarrow{O_1M}_{/\mathcal{R}_1} = \overrightarrow{OO_1}_{/\mathcal{R}} + \vec{r}_{1/\mathcal{R}_1}$$

$$\Rightarrow \quad x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = \left(x_{O1}\vec{\imath} + y_{O1}\vec{\jmath} + z_{O1}\vec{k}\right) + \left(x_1\vec{\imath}_1 + y_1\vec{\jmath}_1 + z_1\vec{k}_1\right)$$

7.2.2- Vecteur vitesse

D'après la définition :

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}_{/\mathcal{R}}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}_{/\mathcal{R}_1}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{OO_1}_{/\mathcal{R}}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}_{/\mathcal{R}_1}}{dt_1} \cdot \frac{dt_1}{dt}$$

Dans le cas des faibles vitesses, on considère que le temps est absolu c.à.d.

$t = t_1 \quad \Rightarrow \quad dt = dt_1$

$$\vec{v}_M = \frac{d\overrightarrow{OO_1}_{/\mathcal{R}}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{O_1M}_{/\mathcal{R}_1}}{dt_1}$$

$$\vec{v}_M=\frac{d\left(x_{O1}\vec{\imath}+y_{O1}\vec{\jmath}+z_{O1}\vec{k}\right)}{dt}+\frac{d\left(x_1\vec{\imath}_1+y_1\vec{\jmath}_1+z_1\vec{k}_1\right)}{dt}$$

$$\vec{v}_M=\frac{dx_{O1}}{dt}\vec{\imath}+\frac{dy_{O1}}{dt}\vec{\jmath}+\frac{dz_{O1}}{dt}\vec{k}+\frac{dx_1}{dt}\vec{\imath}_1+\frac{dy_1}{dt}\vec{\jmath}_1+\frac{dz_1}{dt}\vec{k}_1+x_1\frac{d\vec{\imath}_1}{dt}+y_1\frac{d\vec{\jmath}_1}{dt}+z_1\frac{d\vec{k}_1}{dt}$$

La base mobile est en translation et en rotation avec une vitesse angulaire "$\vec{\omega}$" par rapport à la base fixe

Sachant que la dérivée d'un vecteur par rapport au temps est :

$$\frac{d\vec{u}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{u}\quad\Rightarrow\quad\frac{d\vec{\imath}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{\imath},\ \frac{d\vec{\jmath}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath}\ \text{ et }\frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{\omega}\wedge\vec{k}$$

La vitesse du point "M" s'écrit comme suit :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}=\dot{x}_{O1}\vec{\imath}+\dot{y}_{O1}\vec{\jmath}+\dot{z}_{O1}\vec{k}+\dot{x}_1\vec{\imath}_1+\dot{y}_1\vec{\jmath}_1+\dot{z}_1\vec{k}_1+x_1(\vec{\omega}\wedge\vec{\imath}_1)+y_1(\vec{\omega}\wedge\vec{\jmath}_1)+z_1(\vec{\omega}\wedge\vec{k}_1)$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}=\dot{x}_{O1}\vec{\imath}+\dot{y}_{O1}\vec{\jmath}+\dot{z}_{O1}\vec{k}+\dot{x}_1\vec{\imath}_1+\dot{y}_1\vec{\jmath}_1+\dot{z}_1\vec{k}_1+(\vec{\omega}\wedge x_1\vec{\imath}_1)+(\vec{\omega}\wedge y_1\vec{\jmath}_1)+(\vec{\omega}\wedge z_1\vec{k}_1)$$

Puisque le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition, on aura :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}=\left(\dot{x}_{O1}\vec{\imath}+\dot{y}_{O1}\vec{\jmath}+\dot{z}_{O1}\vec{k}\right)+\left(\dot{x}_1\vec{\imath}_1+\dot{y}_1\vec{\jmath}_1+\dot{z}_1\vec{k}_1\right)+\vec{\omega}\wedge\left(x_1\vec{\imath}_1+y_1\vec{\jmath}_1+z_1\vec{k}_1\right)$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}=\vec{v}_{M/\mathcal{R}_1}+\vec{v}_{O1/\mathcal{R}}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}=\vec{v}_{M/\mathcal{R}_1}+\vec{v}_{O1/\mathcal{R}}+\vec{\omega}\wedge\vec{r}_1$$

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}=\vec{v}_a=\vec{v}_r+\vec{v}_e$$

$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}=\vec{v}_a$: <u>C'est la **vitesse absolue**</u>, c.à.d. la vitesse du point "M" par rapport au référentiel fixe $\mathcal{R}(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$.

$\vec{v}_{M/\mathcal{R}_1}=\vec{v}_r$: <u>C'est la **vitesse relative**</u>, c.à.d. la vitesse du point "M" par rapport au référentiel mobile $\mathcal{R}_1(O_1,\vec{\imath}_1,\vec{\jmath}_1,\vec{k}_1)$.

$\vec{v}_{O1/\mathcal{R}}+\vec{\omega}\wedge\vec{r}_1=\vec{v}_e$: <u>C'est la **vitesse d'entraînement**</u>, c.à.d. la vitesse du point "M" par rapport au référentiel fixe, en admettant que ce point est fixe dans le référentiel mobile

7.2.3- Vecteur accélération

D'après la définition :

$$\vec{a}_M=\frac{d\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{dt}=\frac{d^2\left(\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}}\right)}{dt^2}$$

$$\vec{a}_M=\frac{d\left(\vec{v}_{M/\mathcal{R}_1}+\vec{v}_{O1/\mathcal{R}}+\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)}{dt}=\frac{d\left(\vec{v}_{M/\mathcal{R}_1}\right)}{dt}+\frac{d\left(\vec{v}_{O1/\mathcal{R}}\right)}{dt}+\frac{d\left(\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O_1M}\right)}{dt}$$

Or

$$\begin{cases} \dfrac{d(\vec{v}_{M/\mathcal{R}_1})}{dt} = \dfrac{d(\dot{x}_1\vec{i}_1+\dot{y}_1\vec{j}_1+\dot{z}_1\vec{k}_1)}{dt} = (\ddot{x}_1\vec{i}_1+\ddot{y}_1\vec{j}_1+\ddot{z}_1\vec{k}_1)+\vec{\omega}\wedge(\dot{x}_1\vec{i}_1+\dot{y}_1\vec{j}_1+\dot{z}_1\vec{k}_1) \\ \dfrac{d(\vec{v}_{O1/\mathcal{R}})}{dt} = \dfrac{d(\dot{x}_{O1}\vec{i}+\dot{y}_{O1}\vec{j}+\dot{z}_{O1}\vec{k})}{dt} = \ddot{x}_{O1}\vec{i}+\ddot{y}_{O1}\vec{j}+\ddot{z}_{O1}\vec{k} \\ \dfrac{d(\vec{\omega}\wedge\vec{r}_1)}{dt} = \dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}_1+\vec{\omega}\wedge[(\dot{x}_1\vec{i}_1+\dot{y}_1\vec{j}_1+\dot{z}_1\vec{k}_1)+\vec{\omega}\wedge(x_1\vec{i}_1+y_1\vec{j}_1+z_1\vec{k}_1)] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d(\vec{v}_{M/\mathcal{R}_1})}{dt} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}_1}+\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r \\ \dfrac{d(\vec{v}_{O1/\mathcal{R}})}{dt} = \vec{a}_{O1/\mathcal{R}} \\ \dfrac{d(\vec{\omega}\wedge\vec{r}_1)}{dt} = \dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}_1+\vec{\omega}\wedge[\vec{v}_r+\vec{\omega}\wedge\vec{r}_1] \end{cases}$$

Finalement :

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{M/\mathcal{R}_1}+\vec{a}_{O1/\mathcal{R}}+\dot{\vec{\omega}}\wedge\vec{r}_1+\vec{\omega}\wedge(\vec{\omega}\wedge\vec{r}_1)+2\vec{\omega}\wedge\vec{v}_r$$

$$\vec{a} = \vec{a}_r+\vec{a}_e+\vec{a}_c$$

$\vec{a}$: C'est **l'accélération absolue**, c.à.d. l'accélération du point "M" par rapport au référentiel fixe $\mathcal{R}(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

$\vec{a}_r$: C'est **l'accélération relative**, c.à.d. l'accélération du point "M" par rapport au référentiel mobile $\mathcal{R}_1(O_1,\vec{i}_1,\vec{j}_1,\vec{k}_1)$

$\vec{a}_e$: C'est **l'accélération d'entraînement**,

$\vec{a}_c$: C'est **l'accélération de Coriolis.** Cette accélération s'annule si :

- $\vec{\omega} = \vec{0}$ le mouvement est une translation pure repère
- $\vec{v}_r = \vec{0}$ le point "M" est fixe dans le repère mobile
- $\vec{\omega} \parallel \vec{v}_r$ la rotation se fait dans un plan perpendiculaire au déplacement de "M" dans le repère mobile

7.3- Cas particulier

7.3.1 - "$\mathcal{R}_1$" en translation par rapport à "$\mathcal{R}$"

a- Translation a vitesse constante :

Dans ce cas : $\vec{\omega} = \vec{0}$ et l'accélération du point "O_1" est nulle $\dfrac{d(\vec{v}_{O1/\mathcal{R}})}{dt} = \vec{0}$, alors :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r+\vec{v}_e = \vec{v}_r+\vec{v}_{O1/\mathcal{R}}$$

La vitesse d'entrainement est celle du repère mobile.

$$\vec{a} = \vec{a}_r$$

Remarque : *Dans ce cas les lois de Newton sont les mêmes dans les deux référentielles* "$\mathcal{R}$" *et* "$\mathcal{R}_1$", *ils sont dit référentiels Galiléens*

b - Translation a vitesse variable

Dans ce cas : $\vec{\omega} = \vec{0}$ et l'accélération du point "O_1"n' est pas nulle $\frac{d\left(\vec{v}_{O1/\mathcal{R}}\right)}{dt} \neq \vec{0}$

$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_r + \vec{v}_{O1/\mathcal{R}}$ et $\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_{O1/\mathcal{R}}$

Remarque : *On voit que l'accélération absolue est augmentée de l'accélération de l'origine du repère mobile. Le référentiel n'est pas Galiléen, les lois de Newton restent valables mais avec des rectifications.*

7.3.2- "$\mathcal{R}_1$" en rotation par rapport à "$\mathcal{R}$"

a- Rotation a vitesse angulaire constante : : $\vec{\omega} = Constante$

Dans ce cas : $\vec{\omega} = Cste \Longrightarrow \frac{d\,\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}} = \vec{0}$ et $\vec{a}_{O1/\mathcal{R}} = \frac{d\left(\vec{v}_{O1/\mathcal{R}}\right)}{dt} = \vec{0}\,;\ \vec{v}_{O1/\mathcal{R}} = \vec{0}$

D'où :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_1$$

Et

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{a}_r + \vec{\omega} \wedge \ (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_1) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

b- Rotation a vitesse angulaire variable

Dans ce cas : $\vec{v}_{O1/\mathcal{R}} = \vec{0}$ et $\vec{a}_{O1/\mathcal{R}} = \frac{d\left(\vec{v}_{O1/\mathcal{R}}\right)}{dt} = \vec{0}$

Alors :

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e = \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_1$$

Et

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \vec{a}_r + [\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{r}_1 + \vec{\omega} \wedge \ (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_1)] + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$