Travail et Energie

1- Introduction

- **C**ertains problèmes sont résolus difficilement par la loi de Newton, mais peuvent-êtres plus simples en utilisant d'autres approches (énergie).
- La notion d'énergie est l'une des plus importantes en science et technologie, mais elle est plus abstraite que la force, la vitesse, …
- En utilisant l'énergie on comprend les phénomènes thermiques, électrique où la loi de Newton n'a aucun apport.
- Un système est une portion de l'univers que ce soit
    - Une simple particule.
    - Collection (ensemble) de particules.
    - Région de l'espace.
    - Variations d'espace et de forme.
- Une surface imaginaire (pas obligatoirement physique) qui sépare l'univers en deux parties : système et environnement (qui l'entour).

Exemple : Objet dans un espace vide sur lequel est appliquée une force.

- Objet : système
- Surface : limite (contour) du système.
- Force appliquée : influence de l'environnement sur le système à travers la limite

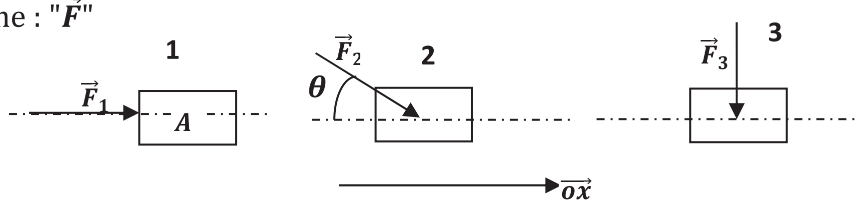
2- Travail

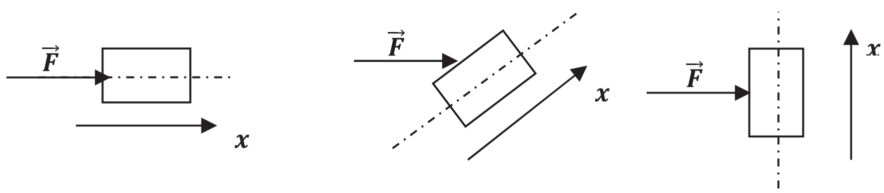
2.1- Définition :

Le travail est le produit de la force "$\vec{F}$" appliquée sur le système (objet), par le déplacement.

2.2- Travail d'une force constante suivant un parcourt rectiligne

- Système : corps "A"
- Force agissante sur le système : "$\vec{F}$"





- Si $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$, l'effort appliquée sur le système qui produit un déplacement suivant $\overrightarrow{ox}$.
  Pour un même déplacement
- 1 : le système se déplace sous l'action d'un effort maximal $\Longrightarrow$ le travail est le plus élevé.
- 2 : le système se déplace sous l'action d'un effort de moins $\Longrightarrow$ le travail est moins que précédemment.

- 3 : le système ne se déplace pas malgré l'existence d'un effort. $\Longrightarrow$ le travail est nul.

- Si on maintient le même sens de la force $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}_3$, mais on change l'orientation du déplacement, on obtient un travail plus élevé si ce déplacement est de même sens que la force, et sera nul s'il est perpendiculaire.

Résultat : le travail est maximal si la force et le déplacement sont de même sens.

De ce fait on peut déduire l'expression du travail comme suit :

- Le déplacement est : $\vec{dr} = dx\vec{\imath}$ **ou** $\vec{dr} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}$ (cas d'un déplacement dans le plan xoy)
- La force est quelconque : $\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_y\vec{\jmath}$ (cas d'une force dans le plan xoy) ou $\vec{F} = F\vec{\imath}$

Le travail élémentaire est :

$$dW = (F\cos\theta)dx = F(dx.\cos\theta) = F dx\cos\theta = \vec{F} \circ \vec{dr}$$

- $dW > 0$ **:** La force agit dans le même sens que le déplacement $\Longrightarrow$ travail moteur.

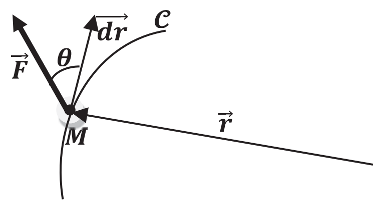
- $dW < 0$ **:** La force agit dans le sens contraire au déplacement $\Longrightarrow$ travail résistant.

- $dW = 0$ **:** La force agit dans le sens perpendiculaire au déplacement.

Remarque :

Le travail cause le changement de l'état du système (déplacement, accélération, changement de forme, changement de température,… etc.)

2.3- Travail d'une force constante suivant un parcourt curviligne



Si la particule se déplace le long de "C"sous l'action de la force "$\vec{F}$,

elle produit un travail tel que : $dW = \vec{F} \circ \vec{dr}$.

Dans le repère intrinsèque : $\vec{F} = F_T\vec{u}_T + F_N\vec{u}_N$; $\vec{dr} = dr\vec{u}_T = ds\vec{u}_T$

$$\Longrightarrow \boxed{dW = \vec{F} \circ \vec{dr} = F_T dr = F dr\cos\theta}$$

2.4- Travail de plusieurs forces constantes (cas général : force quelconque et parcours quelconque)

Si plusieurs forces agissent sur le système $(\vec{F}_1; \vec{F}_2; \ldots; \vec{F}_n)$ en produisant un déplacement $\vec{dr}$

$$\Longrightarrow dW = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n) \circ \vec{dr} = \vec{F}_1 \circ \vec{dr} + \vec{F}_2 \circ \vec{dr} + \cdots + \vec{F}_n \circ \vec{dr}$$

$$\Longrightarrow dW = \sum_i dW_i$$

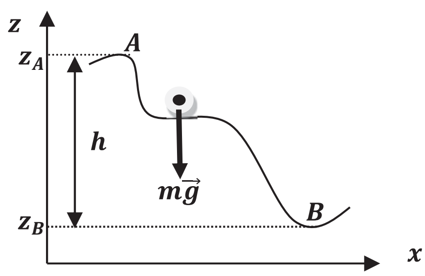
Le travail effectué par un système de force est égal à la somme de tous les travaux qu'effectue chacune des forces séparément.

Dans le cas général : $dW = \sum_i dW_i$ $\Longrightarrow$ le travail total est :

$$\boxed{W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \circ \vec{dr}}$$

2.5- Travail des forces élastiques et gravitationnelles

a – Travail des forces gravitationnelles



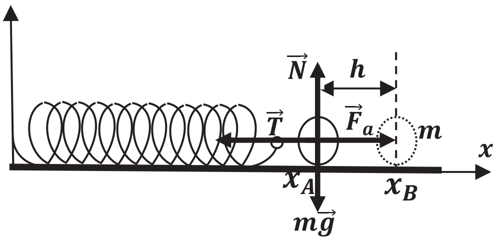
Un corps de masse "m" suit un trajet pour aller de "A" vers "B" sous l'action du poids "$m\vec{g}$".

$$W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \circ \vec{dr}$$

or $\vec{F} = -m\vec{g} = -mg\vec{k}$ et $\vec{F} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$

$$\Rightarrow \quad W = \int_{z_A}^{z_B} -mg\vec{k} \circ \left(dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}\right) = -\int_{z_A}^{z_B} mg\, dz$$

$$W = -mg\, z\Big|_{z_A}^{z_B} = mg(z_A - z_B) = mgh$$



b-Travail des forces élastiques

Un corps de masse "m" est soumis à l'action d'un ressort, si on fait déplacer la masse de "$x = x_B - x_A$" telle que son accélération est nulle, alors : $F_a = kx$

$$W = \int_A^B \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_A^B kx\vec{\imath} \circ dx\vec{\imath} = \frac{1}{2}kx^2\Big|_{x_A=0}^{x=x_B} \quad \Rightarrow \quad W = \frac{1}{2}kx^2$$

Le travail est l'influence de l'environnement sur le système.

Remarque :

Le travail des forces gravitationnelles et élastiques est indépendant du chemin suivit, ce sont des forces conservatives.

3- Puissance et rendement

Un même travail peut être effectué pour des déplacements différents et des forces différentes

3.1- Définition

La puissance est le travail effectué par unité de temps

$$Q = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad \text{à la limite} \quad Q = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \circ \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \circ \vec{v}$$

Remarque :

- La puissance est généralement utilisée pour caractériser les engins et les machines.
- En général la puissance est définie pour n'importe quel type de transformation d'énergie : $Q = \frac{dE}{dt}$

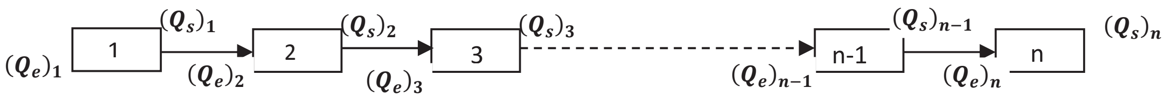
3.2- Rendement (efficacité)

Le rendement est exprimé par le rapport entre le travail fournit au travail reçu.

$$\eta = \frac{travail\ fournit}{travail\ reçu} = \frac{W_f}{W_r} \quad \Rightarrow \quad \eta = \frac{\left(\vec{F} \circ \frac{d\vec{r}}{dt}\right)_f}{\left(\vec{F} \circ \frac{d\vec{r}}{dt}\right)_r} = \frac{Q_s}{Q_e} = \frac{Puissance\ de\ sortie}{Puissance\ d'entrée}$$

$$\eta = \frac{Puissance\ d'entrée - Puissance\ perdue}{Puissance\ d'entrée} = 1 - \frac{Puissance\ perdue}{Puissance\ d'entrée} \qquad \eta < 1$$

- Si plusieurs machines sont connectées en série le rendement total est :



$$\eta = \frac{(Q_s)_n}{(Q_e)_1} = \frac{(Q_s)_n}{(Q_e)_n} \cdot \frac{(Q_e)_n}{(Q_e)_{n-1}} \cdot \frac{(Q_e)_{n-1}}{(Q_e)_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{(Q_e)_3}{(Q_e)_2} \cdot \frac{(Q_e)_2}{(Q_e)_1} \qquad \text{Sachant que : } (Q_e)_n = (Q_s)_{n-1}$$

$$\Rightarrow \quad \eta = \frac{(Q_s)_n}{(Q_e)_n} \cdot \frac{(Q_s)_{n-1}}{(Q_e)_{n-1}} \cdot \frac{(Q_s)_{n-2}}{(Q_e)_{n-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{(Q_s)_2}{(Q_e)_2} \cdot \frac{(Q_s)_1}{(Q_e)_1} = \eta_n \cdot \eta_{n-1} \cdot \eta_{n-2} \cdot \ldots \cdot \eta_2 \cdot \eta_1$$

4- Energie

4.1- Introduction

- L'énergie est une quantité associée (caractérise) à l'état du système (position ; état de mouvement ; température ; déformation ; …etc.), elle exprime la capacité du système à effectuer un travail.
- L'énergie ne peut être détruite dans les processus physique, mais seulement transformée.
- Dans un système fermé, l'énergie totale est constante, mais peut-être convertie en différentes formes ou échangée entre les sous-systèmes.
- L'énergie « zéro » peut-être fixé arbitrairement, car seulement la différence qui affecte le processus physique (on peut ajouter une énergie constante arbitraire, sans affecter le contenu physique)

4.2- Energie cinétique

4.2.1- Description et définition

La variation d'énergie cinétique à l'effet de l'influence de l'environnement sur le système qui produit le changement de vitesse.

Lors du déplacement d'un point matériel, le travail est celui effectué par la composante suivante ce déplacement tel que :

$$dW = \vec{F} \circ d\vec{r} \quad \Longrightarrow \quad dW = m\frac{d\vec{v}}{dt} \circ d\vec{r} = m\vec{v} \circ \overrightarrow{dv} \qquad \Longrightarrow \quad dW = \frac{1}{2}d(mv^2)$$

Le déplacement de "A" vers "B" donne : $W_{A\to B} = W = \int_A^B dW = \int_{v_A}^{v_B} \frac{1}{2} d(mv^2)$

$$W_{A\to B} = W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Remarque :

Quelque soit le trajet, la variation de l'énergie est indépendante du chemin suivit.

- Si la vitesse de départ "v_A" est nulle, le système part du repos, le travail nécessaire effectué pour le ramener à la vitesse "v_B" est : $W_{A\to B} = W = \frac{1}{2}mv_B^2$
- La quantité " $\frac{1}{2}mv^2$ " est appelée *énergie cinétique,* notée " T ".
- L'énergie cinétique : est la quantité associée à l'état de mouvement de vitesse"v" effectué par un travail sur le système partant du repos.

Remarque :

- L'énergie du système dépend de l'état du mouvement du système et par conséquent par rapport à un référentiel. Ceci exprime le choix arbitraire de l'énergie « zéro ».
- Un point matériel de vitesse "v", à l'énergie cinétique " $T = \frac{1}{2}mv^2$ " dans un référentiel, alors qu'il à la vitesse " v' " dans un autre référentiel. Relativement au premier référentiel telle que " $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'$, l'énergie cinétique est :

$$T' = \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}m\vec{v}' \circ \vec{v}' = \frac{1}{2}m[(\vec{v}-\vec{v}_0)\circ(\vec{v}-\vec{v}_0)] \implies T' = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - \vec{v}\circ\vec{v}_0$$

4.2.2- Energie cinétique de translation et de rotation

- Translation: $T = \frac{1}{2}mv^2$
- Rotation : $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2 = \frac{1}{2}(mr^2)\omega^2$ or $I = mr^2 \implies T = \frac{1}{2}I\omega^2$
- Mouvement quelconque : $T = \frac{1}{2}mv_c^2 + \frac{1}{2}I_c\omega^2$

  v_c: vitesse du centre de masse du système ;

  I_c: Le moment d'inertie par rapport à un axe passant par le centre de masse.

c- Théorème de l'énergie cinétique

Lorsqu'un corps se déplace de "A" vers "B", il effectue le travail :

$$W_{A\to B} = W = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = T_B - T_A = \Delta T$$

Théorème de l'énergie cinétique

´´Dans un référentiel inertiel, le travail effectué, par l'ensemble des forces extérieures, pour déplacer un système d'un point à un autre est égal à la variation de son énergie cinétique. On l'appelle parfois théorème du travail-énergie.´´

4.2.3- Comparaison entre impulsion et travail

Pour un système soumis à une force résultante " $\vec{F}$ " alors :

- $\vec{F} = m\vec{a} = m.\frac{d\vec{v}}{dt} \implies \vec{F}dt = md\vec{v} \implies \int_{t_A}^{t_B}\vec{F}dt = \int_{v_A}^{v_B} m.d\vec{v}$

  $\implies m\vec{v}_B - m\vec{v}_B = \Delta\vec{P} = \int_{t_A}^{t_B}\vec{F}dt$ $\int_{t_A}^{t_B}\vec{F}dt = \mathcal{I}$: est l'impulsion.

- $\vec{F} = m\vec{a} \implies \vec{F}\circ d\vec{r} = m\vec{a}\circ d\vec{r}$ or $\vec{a}\circ d\vec{r} = \vec{v}\circ d\vec{v}$

  $\implies \int_{r_A}^{r_B}\vec{F}\circ d\vec{r} = \int_{v_A}^{v_B} m\vec{v}\circ d\vec{v} \implies \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = W = \int_{r_A}^{r_B}\vec{F}\circ d\vec{r}$

  $\implies \int_{r_A}^{r_B}\vec{F}\circ d\vec{r}$: est le travail

  - La variation de la quantité de mouvement →→→ l'impulsion
  - La variation de l'énergie cinétique →→→ travail

4.3- Energie potentiel

4.3.1- Description et définition

- Si on a un système de deux particules qui interagissent, l'énergie cinétique est l'ensemble des énergies cinétique des différents éléments : $T = \sum_i T_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2$. Si l'un des éléments est très massif, il est considéré comme stationnaire (T=0) ; exemple système : terre - balle de tennis ($m_T \gg m_B$), alors : $T = \sum_i T_i = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}(m_T v_T^2 + m_B v_B^2) \approx \frac{1}{2}m_B v_B^2$
- Le soulèvement du livre du système « terre – livre » lentement, à une hauteur " h ", produit un travail qui se traduit par une augmentation de l'énergie du système. Déposer sur l'étagère, le livre est au repos initialement et à la fin. Il n'y a pas de changement de l'énergie cinétique ($v_{Ai} = v_{Bi} = 0$). Puisque l'énergie n'est pas de forme cinétique, elle à une autre forme

- Si ce livre est lâché de la hauteur " h " jusqu'à sa position initiale alors il possèdera une énergie cinétique du au travail effectué. Le livre à la hauteur " h " à la possibilité de produire une énergie cinétique.

4.3.2- Définition :

L'énergie potentielle est une forme d'énergie stockée par le système qui à l'aptitude à donner une énergie cinétique. Cette énergie est associée à un certain type de forces qui agissent entre les éléments du système.

4.3.3- Expression de l'énergie potentielle

L'énergie potentielle est associée aux forces conservatives où le travail est indépendant du chemin suivit. La fonction scalaire qui est opposée au travail est dite énergie potentielle.

$\boldsymbol{W = \int_A^B \vec{F}^c \circ d\vec{r} = -\Delta U = U_A - U_B}$ $\quad$ $\vec{F}^c$: Forces conservatives

$\Longrightarrow \; dU = -\vec{F}^c \circ d\vec{r}$

Sachant que le gradient d'une fonction scalaire $U(\vec{r})$ est : $\overrightarrow{grad}(U) = \vec{\nabla}\mathrm{U} = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$

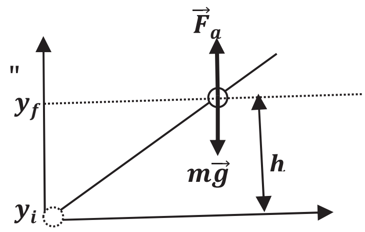
Le déplacement " $\overrightarrow{dr}$ " est donné par : $\overrightarrow{dr} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$

La différentielle de la fonction scalaire $U(\vec{r})$ est : $\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz$

$\Longrightarrow$: $\overrightarrow{grad}(U) \circ d\vec{r} = \vec{\nabla}\mathrm{U} \circ d\vec{r} = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \mathrm{d}U$

Puisque : $dU = -\vec{F}^c \circ d\vec{r} = \overrightarrow{grad}(U) \circ d\vec{r} \quad \Longrightarrow \quad \vec{F}^c = -\overrightarrow{grad}(U)$

a- Energie potentielle de pesanteur gravitationnelle



Si on prend un système constitué de deux éléments (terre - masse), En soulevant lentement ($\vec{a} \approx 0$) la masse à une altitude" $h = y_f - y$ " avec un agent extérieur. Le travail effectué est :

$W_{ex} = \int_A^B \vec{F}_a \circ d\vec{r}$ Sachant que : $\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_a + m\vec{g} = 0$

$\Longrightarrow F_a = mg \;\; \Longrightarrow W_{ex} = mg(y_f - y_i) = mgh$

Le travail de l'agent extérieur est le même que l'énergie reçu par le système qui est l'énergie potentielle gravitationnelle. $W_{ex} = mgh = U$.

Autrement : $U = -\int_A^B m\vec{g} \circ d\vec{r}$ or $m\vec{g} = -mg\vec{k}$ et $d\vec{r} = dy\vec{k}$

$\Longrightarrow U = \int_A^B mg \circ dy = mg(y_f - y_i) = mgh$

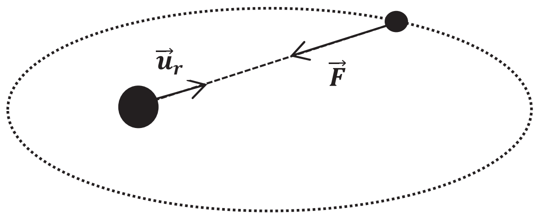
Remarque :

- l'énergie potentielle est définit toujours par rapport à une constante et elle est indépendante du chemin suivit.
- l'énergie potentielle dépend de la configuration du système c.à.d. une translation ou une rotation d'un élément provoque le changement de la configuration du système, par conséquent son énergie potentielle.
- Le décroissement de l'énergie potentielle est égal au travail effectué à l'intérieure du système (lors de la chute d'un corps, il perd de l'énergie potentielle et le travail effectué est celui de la force gravitationnelle)

- l'énergie potentielle est l'énergie d'interaction des éléments du système.

b- Energie potentielle gravitationnelle

Si on prend un système constitué de deux éléments en interaction gravitationnelle (soleil-terre), la force exercée sur la terre dans le champ gravitationnel du soleil est :



$\vec{F} = -G\frac{m_S m_T}{r^2}\vec{u}_r$

$$W = \int_A^B \vec{F} \circ d\vec{r} = -\int_A^B G\frac{m_S m_T}{r^2}\vec{u}_r \circ d\vec{r}$$

$$W = G\frac{m_S m_T}{r}\Big|_{r_A}^{r_B}$$

en prenant $r_A \to \infty$ et $r_B = r$ alors $W = G\frac{m_S m_T}{r} = U$

U C'est l'énergie potentielle gravitationnelle

Remarque :

On se pose la question :

L'énergie potentielle gravitationnelle diminue en s'éloignant c.-à-d. augmentation de r, alors que l'énergie potentielle de pesanteur augmente avec $r = h$

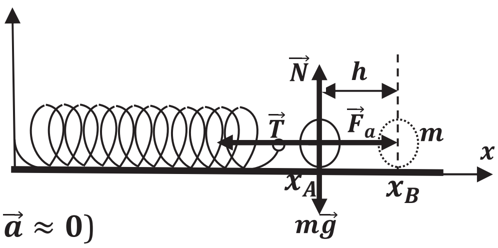
$$G\frac{Mm}{r}\Big|_{r_A}^{r_B} = U = GMm\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right) = GMm\left(\frac{r_A - r_B}{r_A r_B}\right)$$

Pour la pesanteur (terre-masse) : la hauteur h est très petite devant le rayon de la terre R

$r_A = R + h \approx R$ et $r_B = R$ $r_A - r_B = h$ et sachant que : $G\frac{M}{R^2} = g$

$$U = \left(\frac{GMmh}{R^2}\right) = mgh$$

c- Energie potentielle élastique



- De la même manière, on peut calculer l'énergie potentielle du à L'interaction entre la masse et le ressort (système)

$\vec{T} = -kx\vec{\imath} \Rightarrow W_{ex} = \int_A^B \vec{F}_a \circ d\vec{r}$

Sachant que : $\sum_i \vec{F}_i = \vec{F}_a + m\vec{g} = 0$ (on tire le ressort lentement $\vec{a} \approx 0$)

$\Rightarrow F_a = kx \Rightarrow W_{ex} = \frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$ si on prend $x_A = 0$

$W_{ex} = U = \frac{1}{2}kx^2$ qui est l'énergie stockée par le ressort

c- Energie potentielle et forces conservatives

- Le travail effectué par les forces conservatives est indépendant du chemin suivit.

- l'énergie potentielle est associée au système aux forces agissantes entres les éléments du système (mais seulement les forces conservatives)

- En générale, le travail effectué par les forces intérieures conservatives est "W_{in} ". Le changement de la configuration du système produit le changement de l'énergie potentielle $W_{in} = -\Delta U$

-Si sous l'action des forces, le système change de configuration suivant "$\vec{ox}$" le travail est **:**

$$W_{in} = -\int_{x_i}^{x_f} \vec{F} \circ dx\vec{\imath} = -\int_{x_i}^{x_f} F dx = -\Delta U = -(U_f - U_i)$$

Ou bien : suite à la variation suivant "$\vec{ox}$" **:** $U(x) \to U(x + \Delta x) \Longrightarrow U(x + \Delta x) - U(x) = \Delta U$

Si sur l'intervalle "$\Delta \boldsymbol{x}$" la force reste constante : $\Delta \boldsymbol{U} = -\int_x^{x+\Delta x} \boldsymbol{F_x dx} = -\boldsymbol{F_x}\Delta\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{F_x} = -\frac{\Delta U}{\Delta x}$

A la limite : $\boldsymbol{F_x} = -\frac{dU}{dx}$, de même pour $\boldsymbol{F_y} = -\frac{dU}{dy}$ et $\boldsymbol{F_z} = -\frac{dU}{dz}$

Dans le cas général : $\vec{F} = F_x\vec{\imath} + F_x\vec{\jmath} + F_x\vec{k} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial x}\vec{k}\right) = -\overrightarrow{grad}(U)$

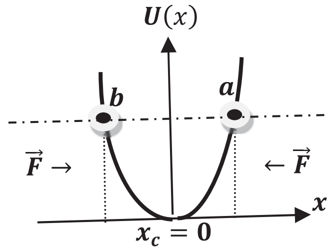
4.4- Equilibre et stabilité

4.4.1- Equilibre

- Pour que le système soit en équilibre, il faut que la somme des forces agissantes soit nulle.

$\sum_i \vec{F}_i^{ex} = \vec{F} = -\frac{dU}{dx}\vec{\imath} = \boldsymbol{0}$ (On a pris une seule dimension mais sans perdre de généralité).

$\Longrightarrow$ L'énergie potentielle doit-être extrémale (min ou max)



4.4.2- Stabilité

- 1^er cas : Masse-ressort

L'énergie potentielle est : $\boldsymbol{U} = \frac{1}{2}\boldsymbol{kx^2} = \boldsymbol{U}(x)$ **.**

En équilibre $\Longrightarrow$ $\boldsymbol{F} = -\frac{dU}{dx} = \boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{F}$: est la pente de la courbe $\boldsymbol{U}(x)$

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$ **:** L'équilibre est au point $\boldsymbol{c}$: $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_c} = \boldsymbol{0}$

- Si $\boldsymbol{x} > 0$, (branche droite de la courbe), la pente est positive

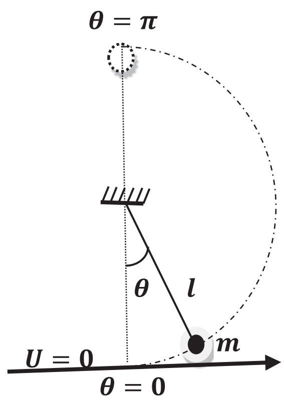
  $\Longrightarrow$ la force est orientée suivant $\overrightarrow{ox}$ dans le sens négatif : $\vec{F} = -F\vec{\imath}$

  La force à tendance à ramener la particule (système) vers la position d'équilibre ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_c} = \boldsymbol{0}$).
- Si $\boldsymbol{x} < 0$, (branche gauche de la courbe), la pente est négative

  $\Longrightarrow$ la force est orientée suivant $\overrightarrow{ox}$ dans le sens positif : $\vec{F} = F\vec{\imath}$

  La force à tendance à ramener la particule (système) vers la position d'équilibre ($\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_c} = \boldsymbol{0}$).
- La particule est plongée dans un potentiel produisant une force de tendance à la ramener à la position d'équilibre. L'énergie potentielle est minimale. La position est dite ***<u>d'équilibre stable</u>***

- 2^ème cas : Pendule simple.



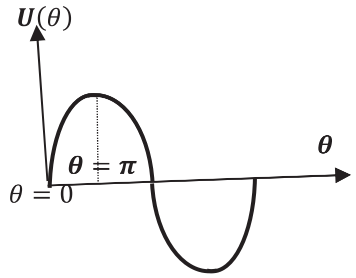
- Les positions d'équilibre sont celles où l'énergie potentielle est extrémale.

  $\boldsymbol{U}(x) = \boldsymbol{mgl(1-cos\theta)} \leftrightharpoons \frac{dU}{dx} = \boldsymbol{mglsin\theta} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \begin{cases}\boldsymbol{\theta = 0}\\ \boldsymbol{\theta = \pi}\end{cases}$
- $\boldsymbol{F} = -\frac{dU}{dx} = \boldsymbol{0} \Longrightarrow \boldsymbol{\theta = 0 + 2k\pi}$. L'énergie potentielle est minimale

- $\boldsymbol{\theta^-}$ **:** La pente est négative $\Longrightarrow$ $F > 0 \Longrightarrow$ La particule $\rightarrow \theta = 0$
- $\boldsymbol{\theta^+}$ **:** La pente est positive $\Longrightarrow$ $F < 0 \Longrightarrow$ La particule $\rightarrow \theta = 0$

$\Longrightarrow$ La position pour laquelle "$\theta = 0$" est une position ***<u>d'équilibre stable</u>***

- $F = -\frac{dU}{dx} = 0 \implies \theta = (2k+1)\pi$. L'énergie potentielle est maximale



- θ^+ : La pente est négative $\implies F > 0 \implies$ La force à tendance a éloignée la particule de $\theta = \pi$
- θ^- : La pente est positive $\implies F < 0 \implies$ La force à tendance a éloignée la particule de $\theta = \pi$

$\implies$ La position pour laquelle "$\theta = \pi$" est une position ***d'équilibre instable***

- Finalement : $\frac{dU}{dx} = 0 \implies$ on a un équilibre $\implies \begin{cases} \frac{d^2U}{dx^2} > 0 & \textit{équilire stable} \\ \frac{d^2U}{dx^2} < 0 & \textit{équilire instable} \\ \frac{d^2U}{dx^2} = 0 & \textit{neutre (Mvt sur plan horizontal)} \end{cases}$

4.5- Energie totale et sa conservation

Partant du fait que le système est soumis aux forces conservatives.

$W = \int_A^B \vec{F}_a \circ d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$: Théorème de l'énergie cinétique.

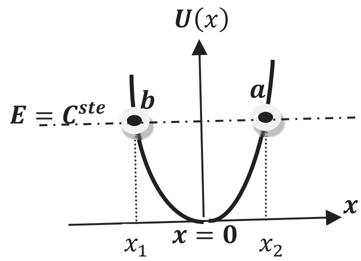
$W = \int_A^B \vec{F}^c \circ d\vec{r} = -\Delta U = U_i - U_f$: Forces conservatives.

$\implies \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = U_i - U_f \implies T_i + U_i = T_f + U_f = Constante = E$

La somme de l'énergie cinétique et potentielle, est la même qu'au départ qu'à l'arrivée
$\implies \Delta E = E_f - E_i$ est la variation de l'énergie totale ou énergie mécanique.
$\implies$ l'énergie totale est conservée.

4.6- Diagramme d'énergie

En partant du diagramme d'énergie, on peut trouver des caractéristiques importantes du mouvement.
Sachant que l'énergie totale est conservée : $E = T + U = Constante$

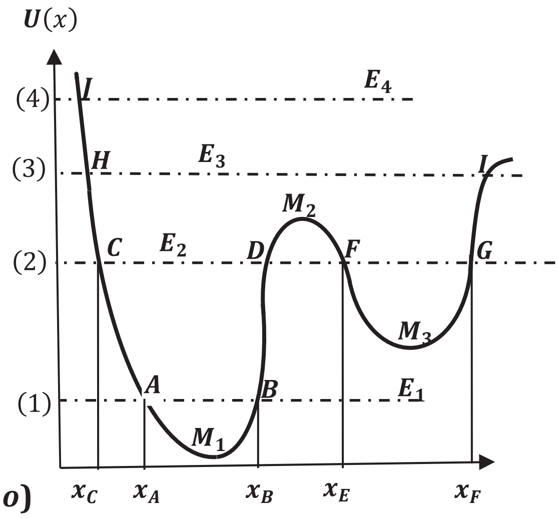


$\implies T = \frac{1}{2}mv^2 = E - U \geq 0 \quad \forall x$

$\implies$ Le mouvement se fait dans la région $U \leq E$ ou $x_1 \leq x \leq x_2$
Soit un oscillateur harmonique (masse-ressort) : $U = \frac{1}{2}kx^2$ et $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$

- Aux points "a" et "b" extrêmes où la vitesse de la masse est nulle $E = U$, la masse est au repos (momentanément). "$x_1 et x_2$" sont dit : points de rebroussement.
- Dans la zone "$x_1 \leq x \leq x_2$", $\forall x,\ E \geq U \implies T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \geq 0. \implies$ Le mouvement est possible
- Dans la zone "$x_2 \leq x \leq x_1$", $\forall x,\ E \leq U \implies T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 < 0. \implies$ "$\dot{x}$" est imaginaire. Le mouvement est impossible du point de vue de mécanique classique.

- **Etude de l'état de mouvement :**
  Etant donnée la courbe de l'énergie potentielle, on va étudier le mouvement l'équilibre et la stabilité de la particule plongée dans ce potentiel.
  L'énergie est partagée en quatre niveaux.



- **Niveau (1)** : L'énergie totale est : $E_1 = U_1 + T_1$

I. Si $x_A \leq x \leq x_B, \forall x,\ E_1 \geq U_1 \ \Rightarrow T_1 = \frac{1}{2}mv_1{}^2 \geq 0$
$\Rightarrow$ Le mouvement est possible

II. Si $x_B < x < x_A, \forall x,\ E_1 < U_1 \ \Rightarrow T_1 < 0$
$\Rightarrow$ Le mouvement est impossible

III. Si $x = x_A$ ou $x = x_B \ \Rightarrow \ E_1 = U_1 \Rightarrow T_1 = 0 \ (v = o)$
$\Rightarrow$ La particule s'arrête et rebrousse chemin, ce sont Les points de rebroussement.

IV. Au point "M_1" l'énergie potentielle est minimale "$\frac{dU}{dx} = 0$" et la courbe est concave $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$, c'est un point d'équilibre stable.
$\Rightarrow$ la particule exécute des va et viens entre $x = x_A$ et $x = x_B$. C'est un puits de potentiel

- **Niveau (2)** : L'énergie totale est : $E_2 = U_2 + T_2$

V. Si $x_C \leq x \leq x_D$ et $x_F \leq x \leq x_G\ \forall x,\ E_2 \geq U_2 \ \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}mv_2{}^2 \geq 0$
$\Rightarrow$ Le mouvement est possible

VI. Si $x_D < x < x_C$, et $x_G < x < x_F\ \forall x,\ E_2 < U_2 \ \Rightarrow T < 0$
$\Rightarrow$ Le mouvement est impossible

VII. Si $x = x_C;\ x = x_D;\ x = x_F\ ;\ x = x_G \ \Rightarrow \ E_2 = U_2 \ \Rightarrow \ T = 0 \ (v = o)$

$\Rightarrow$ La particule s'arrête et rebrousse chemin, ce sont Les points de rebroussement.

VIII. Aux points "M_2" et "M_3" l'énergie potentielle est extrémale "$\frac{dU}{dx} = 0$".

En "M_3" la courbe est concave $\frac{d^2U}{dx^2} > 0$, c'est un point d'équilibre stable.

En "M_2" la courbe est convexe $\frac{d^2U}{dx^2} < 0$, c'est un point d'équilibre instable.

$\Rightarrow$ La particule oscille seulement dans les intervalles $[x_C; x_D]$ et $[x_F; x_G]$, mais ne peut pas passer d'une zone à l'autre. On dit qu'il y a une barrière de potentiel.

- **Niveau (3)** : L'énergie totale est : $E_3 = U_3 + T_3$

IX. Si $x_H \leq x \leq x_I, \forall x,\ E_3 \geq U_3 \ \Rightarrow T_3 = \frac{1}{2}mv_3{}^2 \geq 0$
$\Rightarrow$ Le mouvement est possible

X. Si $x_I < x < x_H, \forall x,\ E_3 < U_3 \ \Rightarrow T_3 < 0$
$\Rightarrow$ Le mouvement est impossible

XI. Si $x = x_I$ ou $x = x_H \ \Rightarrow \ E_3 = U_3 \ \Rightarrow \ T_3 = 0 \ (v = o)$
$\Rightarrow$ La particule s'arrête et rebrousse chemin, ce sont

Les points tournants.

XII. Finalement la particule oscille dans l'intervalle $[x_H; x_I]$. C'est un puits de potentiel.

- **Niveau (4)** : L'énergie totale est : $E_4 = U_4 + T_4$

XIII. Si $x \leq x_J, \forall x, E_4 \geq U_4 \Longrightarrow T_4 = \frac{1}{2}mv_3{}^2 \geq 0$

$\Longrightarrow$ Le mouvement est possible

XIV. Si $x_I < x, \forall x, E_3 < U_3 \Longrightarrow T_3 < 0$

$\Longrightarrow$ Le mouvement est impossible

XV. Si $x = x_J \Longrightarrow E_3 = U_3 \Longrightarrow T_3 = 0 \; (v = o)$

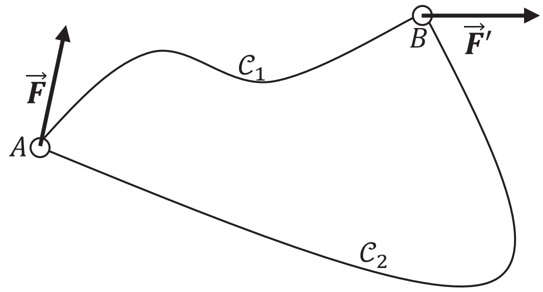
$\Longrightarrow$ La particule s'arrête et rebrousse chemin, ce sont. C'est le point de rebroussement.

XVI. La particule n'oscille pas. Elle rebrousse chemin au point "x_I" et continue son mouvement vers la droite $\rightarrow \infty$

4.7- Travail des forces non conservatives

- Lorsque les expressions du travail, d'une force appliquée au système pour le ramener d'un point "A" à un autre point "B", suivant deux chemins différent ne sont pas égales. Les forces sont non Conservatives.

$$\int_{A\to\mathcal{C}_1}^{B} \vec{F} \circ d\vec{r} \neq \int_{A\to\mathcal{C}_2}^{B} \vec{F} \circ d\vec{r}$$



- Dans le cas général, une particule est soumise à des forces de résultante "$\vec{R}$". Elles sont classées en forces conservatives "$\vec{F}^C$" et non conservatives. "$\vec{F}^{NC}$". $\vec{R} = \vec{F}^C + \vec{F}^{NC}$

- D'après le théorème de l'énergie cinétique, sa variation est égale au travail des différentes forces.

$\Delta T = W = W^C + W^{NC} \quad \Longrightarrow$ pour des variations élémentaires : $dT = dW = dW^C + dW^{NC}$

W^C : Travail des forces conservatives. $\quad W^C$: Travail des forces non conservatives

-L'énergie potentielle liée au forces conservatives est

$\Delta U = -\vec{F}^C \circ \Delta\vec{r} \quad \Longrightarrow$ pour des variations élémentaires : $dU = -\vec{F}^C \circ d\vec{r} = -dW^C$

- L'énergie totale (mécanique)est :

$E = T + U \quad \Longrightarrow \quad \Delta E = \Delta T + \Delta U$

Sachant que : $\Delta T = W^C + W^{NC} = W^{NC} - \Delta U \quad \Longrightarrow T_f - T_i = W^{NC} - (U_f - U_i)$

$\Longrightarrow (T_f + U_f) - (T_i + U_i) = E_f - E_i = W^{NC} \quad \Longrightarrow \quad \Delta E = W^{NC}$.

Théorème :

La variation de l'énergie mécanique est égale au travail effectué par les forces non conservatives

- **Mouvement sur un plan horizontal rugueux**

  Si on donne impulsion à une masse "$\boldsymbol{m}$" pour la déplacer sur un plan horizontal rugueux $\overrightarrow{\boldsymbol{ox}}$.

  $\sum_i \vec{F}_i^{ex} = \vec{R} = \vec{F}^C + \vec{F}^{NC} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f = m\vec{a}$

  $\Longrightarrow \left(\sum_i \vec{F}_i^{ex}\right) \circ \Delta\vec{r} = \left(\sum_i \vec{F}_i^{ex}\right) \circ dx\vec{i} = \left(m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f\right) \circ \Delta x\vec{i} = -F_f \Delta x$

  Or : $\Delta T = \frac{1}{2}\left(mv_f^2 - mv_i^2\right) = W = -F_f dx$

  Sachant que la force de frottement est : $F_f = \mu mg$ et le mouvement se fait sur un plan horizontal

  $U_f = U_i \quad \Longrightarrow \quad E_i = T_i + U_i$ et $E_f = T_f + U_f \quad \Longrightarrow \quad \Delta E = \Delta T$

  $\Longrightarrow W = W^{NC} = -\mu mgdx = \Delta T = \Delta E$