Chapitre 4 Equation de Bernoulli d'un courant d'un fluide réel

4/1 En passant des fluides parfait à un courant réel (fluide réel) ou un courant de fluide visqueux il est indispensable de tenir compte de l'irrégularité de la répartition des vitesses dans les sections considérées, et des pertes d'énergie ou de perte de charge entre ces sections.

Pour établir l'équation de Bernoulli pour les liquides réels, il faut connaître la notion de puissance de courant.

- la puissance d'un filet élémentaire est égale au produit de l'énergie spécifique total du fluide au point considéré par le débit massique élémentaire en poids.

$$dN = H\rho g dQ$$

$$avec......H = Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g}$$

$$dN = \left(Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right)\rho g dQ = \left(Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v^2}{2g} \right)\rho g v ds.........(1)$$

La puissance du courant total est l'intégrale de l'équation (1) prise dans toute la surface.

On tenant compte que pour le mouvement d'un fluide parfait dans tout point de section transversale du courant, la hauteur hydrostatique (H_p) est constante, donc pour un fluide réel on à :

$$H_p = Z + \frac{p}{\rho g} = c^{te}$$ (Ce qui varie c'est la vitesse)

$$N = \rho g \left(Z + \frac{p}{\rho g} \right) \int_s v ds + \frac{\rho g}{2g} \int_s v^3 ds$$

$$on..à.....Q_v = \int_s v ds$$

$$N = \rho g \left(Z + \frac{p}{\rho g} \right) Q_v + \frac{\rho}{2} \int_s v^3 ds$$

Pour déterminer la valeur de l'énergie totale dans une section donnée, on divise la puissance totale par son débit massique :

$$H = \frac{N}{\rho g Q_v} = \left[\left(Z + \frac{p}{\rho g} \right) + \frac{1}{2gQ_v} \int_s v^3 ds \right) \cdot \frac{v_m^2}{v_m^2}$$

Avec :

$N = H\rho g Q_v$

$Q_v = v_m s$

v_m= vitesse moyenne ; S = section d'écoulement

$$alors....H = Z + \frac{p}{\rho g} + \frac{v_m^2}{2g}\frac{\int_s v^3 ds}{v_m^3 s}$$

Avec : $Qv = v_m.S$

$$H = Z + \frac{p}{\rho g} + \alpha\frac{v_m^2}{2g}$$

$$avec \div ....\alpha = \frac{\int_s v^3 ds}{v_m^3 s}.$$

α : coefficient sans dimension qui tient compte de l'irrégularité de la répartition des vitesse, il dépend du régime d'écoulement.

En pratique pour les régimes turbulent : $\alpha t = 1$

Pour les régimes laminaire : $\alpha_l = 2$

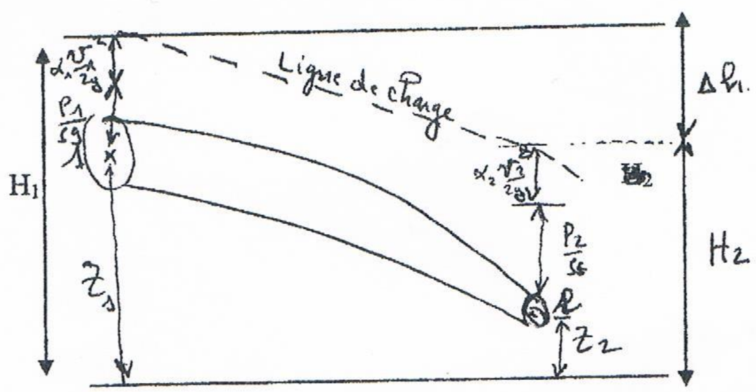
4/2 Equation de Bernoulli :

En tenant compte de la perte de charge entre les deux sections pour un fluide réel, et la loi de répartition des vitesses, l'équation de Bernoulli s'écrit :

$$Z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1\frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2\frac{v_2^2}{2g} + \Delta h_{1-2}$$

Avec : Δh_{1-2} : perte de charge entre les sections (1) et (2)

$$\mathbf{H_1 = H_2 + \Delta h_{1-2}}$$



4/3 Expérience de Reynolds (régime d'écoulement)

On observe l'allure de l'écoulement
En faisant varier la vitesse d'écoulement
(Débit) à l'aide de la vanne

A/ aux faible vitesse : le filet coloré conserve son individualité j'usquà l'éxtrémitée du tube
Le régime d'écoulement est dit **« laminaire »**

b/ à partir d'une certaine vitesse d'écoulement
Le filet fluide du colorant commence à onduler un certain Temps (court) avant de se mélanger au reste du fluide.
Le régime est dit « **transitoire** »

c/ si on augmente encore la vitesse (le débit), le tourbillon Augmente d'amplitude et le filet coloré se mélange au reste Du fluide.
Le régime est dit **turbulent.**

4/3/1 Nombre de Reynolds

Le changement du régime dans une conduite se produit à une vitesse bien déterminée du courant qui est appelée vitesse critique (V_{cr})

La vitesse critique est proportionnelle à la viscosité cinématique (υ) et inversement proportionnelle au diamètre de la conduite

$$V_{cr} = k\frac{\upsilon}{d}$$

on...peut...écrire..cette..relation..sous..la..forme :

$$k = V_{cr}\frac{d}{\upsilon}$$

Avec k : coefficient sans dimension appelé nombre critique de Rénolds (Re critique)

On écrit alors :

$$R_{e_{critique}} = V_{cr}\frac{d}{\upsilon} \quad \text{..........coefficient sans dimension}$$

L'expérience montre que le nombre critique de Reynolds est égale à :

$$R_{e_{critique}} = 2000 \text{......................} pour..les..sections..circulaire$$

$$R_{e_{critique}} = 580 \text{......................} pour..les..sections..demi..circulaire$$

En générale on a le nombre de Reynolds : $\Re_e = \frac{vd}{\upsilon}$

Coefficient sans dimension

Avec : v : vitesse moyenne de l'écoulement (m/s)
d : diamètre de la conduite (m)
υ : viscosité cinématique (m^2/s)

Remarque :

On a $\upsilon = \mu / \rho$

μ = viscosité dynamique
P = masse volumique du liquide

Alors si $\Re_e < 2000$ le régime est laminaire
$\Re_e = 2000$ « « critique
$\Re_e > 2000$ « « turbulent

4/4 Perte de charge (Notion général)

les pertes de charge ou bien les pertes d'énergie spécifique dépendent de la forme,des dimensions,de la rugosité de la conduite,de la vitesse d(écoulement et de la viscosité du fluide.

L'éxpérience à montré que les pertes de charge sont proportionnelle au carré de la vitesse et à la langueur dde la conduite.

En general il existe deux types de perte de charge :

- **perte de charge linéaire**
- **perte de charge singuliaire**

4/4/1 les pertes de charge linéaire (pertes de charge réparties)

La perte de charge linéaire est donnée par la formule empérique :

$$\Delta h_l = \frac{\lambda l}{d}\frac{v^2}{2g}$$ **Formule de Darcy**

avec : λ : coeficient de perte de charge lineaire
l : longeur de la conduite (m)
d : diamètre de la conduite (m)
v : vitesse d'écoulement dans la conduite (m/s)

λ est dite aussi coéficient de frottement dans la conduite

Détermination de la valeur de (λ)

- Régime laminaire : $\lambda = \dfrac{64}{R_e}$ pour $\Re_e < 2000$

-Régime turbulant : pour $\Re_e > 2000$ on a deux cas :

1/ $\Re_e < 10^5$ la conduite est dite **conduite lisse**

$$\lambda = \frac{0.316}{R_e^{\frac{1}{4}}} \qquad \textbf{Formule de Blasius}$$

2/ $\Re_e > 10^5$ la conduite est dite **conduite rugueuse**

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2\ln(R_e\sqrt{\lambda} - 0.8) \qquad \textbf{Formule de Karman}$$

Remarque :

Des Abaques et des tableaux ont étaient élaborés afin de determiner la valeur de **(λ)** géneralement on utilise les tables ou Abaques de Colebook pour determiner la valeur de **(λ)** .

4/4/2 Les pertes de charge singulieres (perte de charge locale) :

La perte de charge singuliere est donnée par la formule empérique :

$$h_s = \xi \frac{v^2}{2g} \qquad \text{(Formule de Weisbach)}$$

les pertes de charge singulières sont due à une modification du contour du courant de fluide.

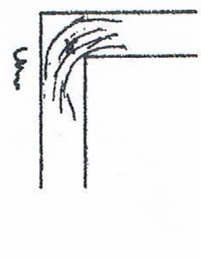
ξ : est appelé coeficient de perte de charge singuliaire, c'est un coeficient sans dimension,ne dépendant que de la forme de l'obstacle comme les coudes,l'élargissement brusque,le rétrécissement brusque,les vannes,etc…

La valeur de « ξ » pour les divers organes sont données par des formulaires et des catalogues de constructeurs ,ces valeurs sont approximatives .

Exemple

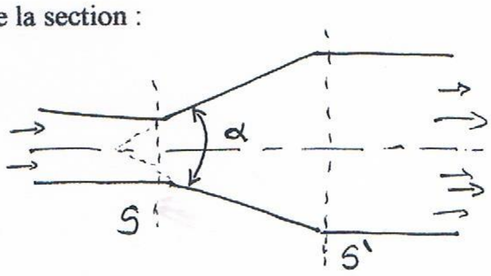
1/ coude brusque à angle droit :

$$\xi = 1$$



2/ Elargissement progréssive de la section :

$$\xi = \left(1 - \frac{s}{s'}\right)^2 \sin\alpha$$

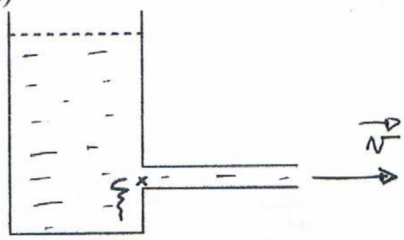


3/ Entrée ou sortie des tuyauteries (élargissement brusque- rétricissement brusque) :

a/ Entrée des tuyauteries (rétrécissement brusque)

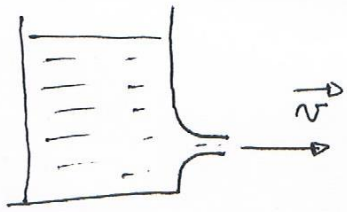
$\xi = 1/2$

$$\Delta h_S = \xi \cdot \frac{V^2}{2g}.$$



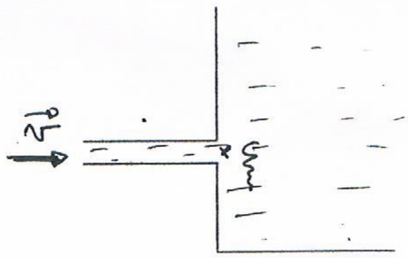
Si l'orifice est à bords arondis et poli, la perte de charge est considéré comme nule

$\xi = 0$ donc



$(\xi = 0)$
$\Delta h_S = 0.$ pas de perte de charge.

b/ sortie des tuyauteries (élargissement)



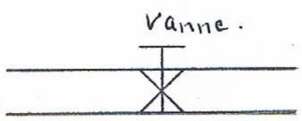
$\xi = 1$

$\Delta h_S = V^2/ 2g$

C.a.d : pour une sortie brutale l'énergie
Cinétique est totalement perdu

4/ les vannes :

Vanne ouverte : **$\xi = 0.05$ à 0.4 selon le type de vanne**



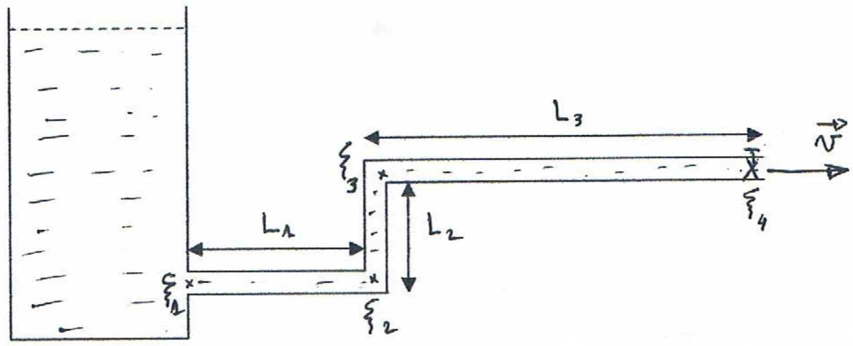
Quand on ferme la vanne progréssivement ξ varie progréssivement de 0.4 à ∞

Vanne fermée $\xi = \infty$. pas d'écoulement.

Exemple :

Soit l'écoulement d'huile de viscosité cinématique υ =0.1 stoks et de vitesse v = 0.05 m/s
Soit les pertes de charge singulieres **ξ_1= 0.5 , $\xi_2 = \xi_3$ =0.8 , ξ_4 = 10 ,** déterminer la perte de charge totale du circuit si le diamètre de la conduite d = 20 cm ; L_1 = 30 m, L_2 = 12 m

L_3 = 70 m .



Δ h$_{totale}$ = Δ h$_S$ + Δ h$_L$

$$\Delta h_l = \frac{\lambda l}{d}\frac{v^2}{2g} \qquad \text{on a} \qquad \Re_e = \frac{vd}{\upsilon} = \frac{0.5\times 0.2}{0.1\times 10^{-4}} = 1000$$

avec : 1 stoks = 1 cm^2/ s = 10^{-4} m^2 / s
donc : υ =0.1 stoks = 0.1 10^{-4} m^2 / s en unité (SI)

$\Re_e$ = 1000 $<$2000 donc l'écoulement et laminaire

$$\Rightarrow \lambda = \frac{64}{\Re_e} = 0.064$$

$$\Delta h_l = 0.064\frac{112}{0.2}\frac{(\ 0.05\ )^2}{2\times 9.81} = ...m$$

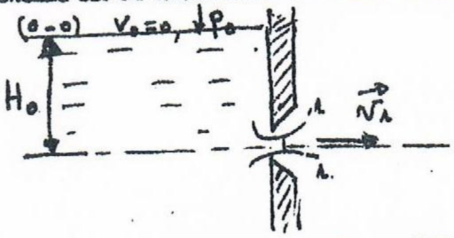
$$\Delta h_s = (\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3\ )\frac{v^2}{2g} = 12.3\times\frac{0.05^2}{2\times 9.81} = ...m$$

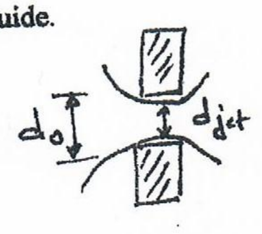
$$\Delta h_{totale} = \Delta h_l + \Delta h_s = ...m$$

4/5 Ecoulement à travers les orifices :

les orifices peuvent etre exécuté dans une paroie mince ou épaisse

si l'épaisseur de la paroie est $<(2$ à $3)\,d_0$, avec d_0 = diametre de l'orifice, dans ce cas on l'appelle paroi mince,
le probleme est de déterminer la vitesse d'écoulement et le débit du fluide.





Soit un réservoir contenant un fluide ,le fluide s'écoule à travers l'orifice (1-1) dans un éspace avec la préssion P_1,l'orifice se trouve à la profondeur H_0 ,le jet du fluide prend une forme cylindrique avec une section (S_j)
Pour déterminer la vitesse d'écoulement du jet on écrit l'équation de Bernoulli pour les sections (0-0) et (1-1)

$$H_0+\frac{p_0}{\rho g}+\alpha_0\frac{v_0^2}{2g}=\frac{p_1}{\rho g}+\alpha_1\frac{v_1^2}{2g}+\Delta h_s$$

Microsoft Equation 3.0

$$v_0=0, \Delta h_s=\xi\frac{v_1^2}{2g}$$

$$\alpha_0=\alpha_1=1, régime.turbulent$$

$$H_0+\frac{p_0-p_1}{\rho g}=\frac{v^2}{2g}+\xi\frac{v^2}{2g}=\frac{v^2}{2g}(1+\xi\ )$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\sqrt{2g\left(H_0+\frac{p_0-p_1}{\rho g}\right)}$$

$$on..pose...:\varphi_1=\frac{1}{\sqrt{1+\xi}}....coeficient..de..vitesse$$

$$v=\varphi_1\sqrt{2g(H_0+\frac{p_0-p_1}{\rho g})}$$

$$v_{réelle}=\varphi_1\sqrt{2gH_1}.......(v: vitesse..d'écoulement..pour.les..orifices$$

$$le..débit.réel..sera:$$

$$q_v=S_{jet}.v=\varphi_2 S_0 v=\varphi_1\varphi_2 S_0\sqrt{2gH_1}$$

$$\alpha'=\varphi_1\varphi_2 : coeficient.de.débit$$

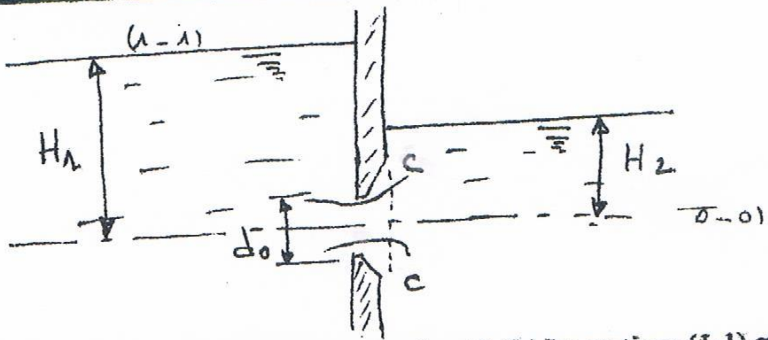
$$\alpha'=\frac{q_{réel}}{q_{théorique}}=\frac{q_v}{S_0\sqrt{2gH_1}}$$

$$q_{réel}: calculé..en..mesurant..une..certaine..quantité..du..fluide$$

$$\longrightarrow pendant..un..certain..temps$$

$$q_{th}: calculé..par..Bernoulli$$

4/6 Ecoulement à travers un orifice noyé(écoulement sous niveau)



Pour déterminer la vitesse et le débit pour l'orifice noyé on choisi les sections (1-1) et (2-2)

L'équation de Bernoulli s'écrit :

$$H_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_c}{\rho g} + \alpha_c \frac{v_c^2}{2g} + \Delta h_{1-2}$$

$$p_1 = p_{atm}$$

$$p_c = p_{atm} + \rho g H_2$$

$$v_1 = 0 : ...\text{dim}\, ension..trés..grande..du..réservoir$$

$$\Delta h_{1-c} = \xi \frac{v^2}{2g}$$

$$H_1 - H_2 = (1+\xi)\frac{v^2}{2g}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}\sqrt{2g(H_1 - H_2)}$$

$$v_{réel} = \varphi_1 \sqrt{2g(H_1 - H_2)}$$

$$q_{réel} = \alpha' S_0 \sqrt{2g(H_1 - H_2)}$$

$$avec : \alpha' = \varphi_1 \varphi_2$$

4/6 écoulement à travers les ajutages :

par définition on appelle ajutage cylindrique exterieur un tube court dont la longeure l = (2-6) d

fixé sur l'orifice afin de modifier le coéficient de débit α

1/ Ajutage cylindrique extérieur :

$$3d \langle l \langle 4d$$

$$\alpha = \varphi_1 \varphi_2$$

$$\varphi_1 = 0.82 ....coef..de..vitesse$$

$$\varphi_2 = 1 ....coef..de..contraction..à..la..sortie$$

2/ ajutage cylindrique intérieur

$$1.5d \langle l \langle 2.5d$$

$$\alpha = 0.5$$

3/ ajutage conique

avec : $\psi = 12^{\circ}$

$\alpha = 0.95$

4/ ajutage de Weisbach

$\alpha = 1$

4/8 Influence de la rugosité des parois sur les pertes de charge (courbe de NUKURADSE)

l'expérience de Reynolds ne permet pas de faire apparaître l'influence de la rugosité des parois sur les pertes de charge ,la figure ci-dessous montre les résultats d'essais effectués par NUKURADSE sur des conduites rendues rugueuses artificiellement par des grains de sable collés .

Le premier et le second terme à l'intérieur de la parenthèse tendent respectivement vers zéro si le nombre de Reynolds devient très grand ou si la rugosité des parois devient négligeable. Cette expression tend donc asymptotiquement vers la loi de PRANDTL en régime turbulent lisse et vers la loi de KARMAN en régime turbulent rugueux.

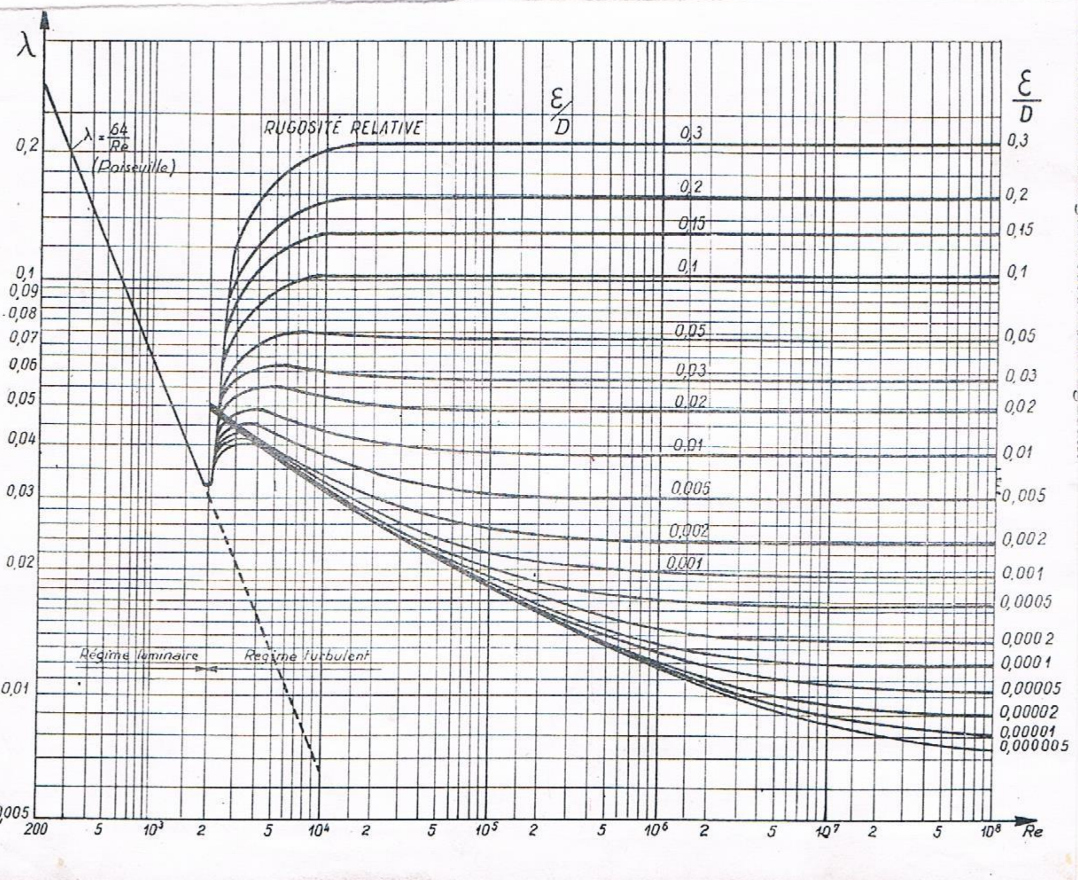


FIG. 4.31.5. – Coefficient de perte de charge λ en régime turbulent rugueux (formule de COLEBROOK).

Ces courbes representent en coordonnées logaritmiques le coeficient de perte de charge (λ) en fonction du nombre de Reynolds ,elle sont tracées pour diverses valeurs de la rugosité relative ϵ / D

Є : diametre des grains de sable collés

D : diamètre de la conduite

L'examen de se réseau de courbe montre que :

a/ la rugosité n'a aucune influence pour le régime laminaire,la valeur de (λ) est trouvée seulement en fonction de R_e

$$\lambda = \frac{64}{\Re_e}$$

b/ la forme des courbes pour $R_e > R_{e\ critique}$ est donc l'importance des pertes de charge dépend beaucoup de la rugosité et aussi du nombre R_e .

c'est un régime transitoire qu'on appelle aussi régime turbulent lisse : l'écoulement est turbulant à l'interieure du tuyau mais il existe le long de la paroi une couche laminaire.

Dans cette région on peut vérifier la loi empirique de BLASIUS :

$$\lambda = 0.316 \Re_e^{-\frac{1}{4}}$$

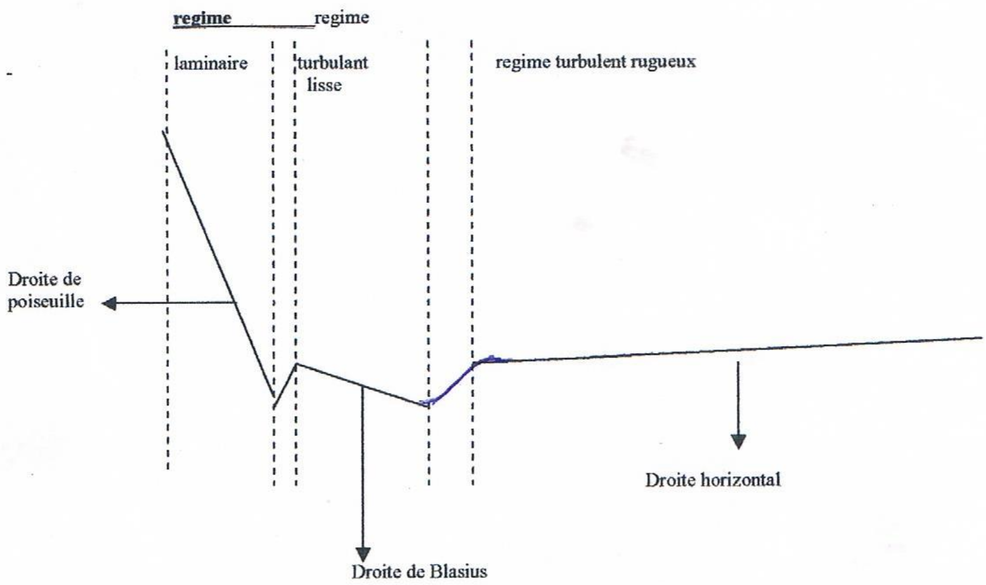
representé par une droite inclinée de pente – ¼ dite droite de BLASIUS

c/ pour $R_e >> R_{e\ critique}$ le regime est dit turbulent rugueux, la valeur du coeficient de perte de charge lineaire (λ) est indépendante du nombre de Reynolds, elle est uniquement fonction de la rugosité relative des parois ϵ / D

on utilise generalement les formules :

de Blunche pour une conduite industrielle : $\lambda = 0.790\sqrt{\frac{\varepsilon}{D}}$

de Prandt et Karman pour conduite experimentale : $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} - 2\ln\frac{D}{2\varepsilon} = 1.74$



L'utilisation directe de ces formules demande un calcul par approximation successive assez compliqué , l'utilisation de représentation graphique telle que l'abaque de Colebrook suffit pour la plupart des applications.

4/9 Calcul d'une conduite simple

dans le calcul d'une conduite simple on a besoin des formules suivantes :

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \alpha_1 \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \alpha_2 \frac{v_2^2}{2g} + \Delta h_{1-2}$$

$$q_v = v.s$$

$$\Delta h_p = \Delta h_s + \Delta h_l = \Sigma\left(\lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} + \xi \frac{v^2}{2g} \right)$$

$$\lambda = f\left(\Re_e, \frac{\varepsilon}{d} \right)$$

$$\Re_e = \frac{vd}{\upsilon}$$

dans la pratique pour les conduites industrielles on rencontre (3) types de problemes :

$1/ q_v, l, \upsilon, \varepsilon, d : connus \rightarrow \Delta h : inconu$

$2/ \Delta h, l, d, \upsilon, \varepsilon : connus \rightarrow q_v : inconu$

$3/ \Delta h, q_v, l, \upsilon, \varepsilon : connus \rightarrow d : inconu$

1/ type n1 :

$$q_v, l, \upsilon, \varepsilon, d : connus \rightarrow \Delta h : inconu$$

1/ on calcul le nombre de Reynolds $\Re_e = \frac{vd}{\upsilon}$ (nature de l'écoulement)

2/ on calcul la rugosité relative $\frac{\varepsilon}{d}$

3/ de l'abaque de Colebrook on trouve la valeur de λ en fonction de $\left(\Re_e, \frac{\varepsilon}{d} \right)$

finalement en trouve : $\Delta h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g}$

2/ type n2

$$\Delta h, l, d, \upsilon, \varepsilon : connus \rightarrow q_v : inconu$$

on se reporte a l'abaque de Colebrook et on procède par ittération

Exemple

Ecoulement d'eau à 15c° conduite de diamètre D = 30 cm,fabriqué en acier rivé (ε = 3 mm)
Langueur de la conduite L = 400 m ,la perte de charge Δh = 7 m ;trouver q_v

Solution :

A 15 c° la viscosité cinématique $\upsilon = 0.012$ stoks (1 stoks = 1 cm^2/s)

$\frac{\varepsilon}{d} = \frac{3}{300} = 0.01 \Rightarrow 0.03 \langle \lambda \langle 0.05$ (limite supérieure et inférieure de la courbe)

Prenant $\lambda = 0.04$

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d} \frac{v^2}{2g} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2gd\Delta h}{\lambda l}} = 1.6 m/s$$

$$\Re_{e1} = \frac{vd}{\upsilon} = \frac{1.6 \times 0.3}{0.012 \times 10^{-4}} = 4 \cdot 10^5$$

$$\left(\Re_{e1} = 4 \cdot 10^5 ; \frac{\varepsilon}{d} = 0.01 \right) \rightarrow \lambda_2 = 0.038 \rightarrow v_2 = 1.64 m/s$$

$$\left(\Re_{e2} = \frac{v_2 d}{\upsilon} = 4.1 \cdot 10^5 ; \frac{\varepsilon}{d} = 0.01 \right) \rightarrow \lambda_3 = 0.038$$

$$\Rightarrow v_3 = \sqrt{\frac{2gd\Delta h}{\lambda_3 l}} = 1.64 m/s = v_2$$

$$\Rightarrow q_v = v_3 s = 1.64 \frac{\pi}{4} 0.3^2 \left(m^3/s \right)$$

3/Type n°3 : $\Delta h, q_v, l, \upsilon, \varepsilon : connus \rightarrow d : inconu$

dans le 3^{eme} cas ,on trouve que dans l'équation de Darcy-Weisbach nous avons 3 inconnus (λ ,l,d) et il y à deux inconnus dans l'équation de continuité (v , d) et également trois inconnus dans le nombre de Reynolds (v,d , R_e) en plus la rugosité relative est inconue.

On utilisant l'équation de continuité on peut éliminer la vitesse dans l'équation de D-W et dans l'équation du Reynolds et ainsi en peut écrire :

$$q_v = vs \rightarrow v = \frac{q_v}{s}$$

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d} \frac{q_v^2}{2g(\frac{\pi d^2}{4})} = \lambda \frac{l}{d} \frac{16 q_v^2}{2gd^4\pi^2}$$

$$d^5 = \frac{8 l q_v^2}{\Delta h g \pi^2} \lambda = c_1 \lambda ....(3-1)$$

$$avec :.........c_1 = \frac{8 l q_v^2}{\Delta h g \pi^2} = constante..connue$$

$$\Rightarrow \Re_e = \frac{vd}{\upsilon} = \frac{4 q_v d}{\pi \upsilon d^2} = \frac{c_2}{d} ....(3-2)$$

$$avec :.........c_2 = \frac{4 q_v}{\pi \upsilon} = c^{te}$$

la méthode de solution est la suivante :

1/ on suppose une valeur de λ

2/ on remplace dans 3-1 et on trouve le diamètre correspondant

3/ on remplace dans 3-2 et on détermine la valeur du nombre de Reynolds R_e

4/ on determine la rugosité relative $\frac{\varepsilon}{d}$.............(3-3)

5/ avec (R_e et $\frac{\varepsilon}{d}$) on détermine dans le diagramme de Moody une nouvelle valeur pour $\lambda = \lambda_2$

6/ avec la nouvelle valeur de $\lambda = \lambda_2$ en répète l'operation présedante

7/ on continue la procedure j'usquà ce que la valeur de λ ne varie plus/

8/ avec la valeur de λ trouvé on calcul (d) par la relation (3-1)