Université Mohamed Boudiaf, M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'informatique | Département de Mathématiques
Licence mathématiques LMD | 3^{eme} année S_5 (2019 - 2020)

Examen final (Mesure et intégration)

Exercice 01 (**07 points**) : Soit $X = \{a, b, c\}$, et soit $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, X\}$.
On définit l'application μ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ par :

$$\mu(\emptyset) = 0 \quad \mu(\{a\}) = 1 \quad \mu(\{b, c\}) = 0 \quad \mu(X) = 1.$$

1. Donner une définition d'une algèbre sur X.
2. Montrer que $\mathcal{A}$ est une algèbre sur X. Conclure
3. Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{A}$.
4. Monterer que l'espace $(X, \mathcal{A}, \mu)$ n'est pas complet.
5. Donner la complétude de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 02 (**09 points**) : Soit la suite des fonctions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, de $(\mathbb{R}^+, \mathcal{L}(\mathbb{R}^+))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : f_n(x) = \frac{1}{(1 + x^2)(1 + x^n)^{\frac{1}{n}}}.$$

1. Enoncer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.
2. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est Lebesgue mesurable.
3. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge siplement vers la fonction f, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1 + x^2} & : \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{x(1 + x^2)} & : \quad x > 1 \end{cases}$$

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0 : f_n(x) \leq g(x) = \dfrac{1}{1 + x^2}$.
5. Montrer que la fonction g est Lebesgue intégrable.
6. Montrer que $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est Lebesgue intégrable.
7. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

Exercice 03 (**04 points**) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$.

1. Montrer que f est Lebesgue mesurable.
2. Montrer que : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt\right)^2$.
3. En utilisant les coordonnées polaires, calculer $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y)dxdy$.
4. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

Corrigé de l'examen final (Mesure et intégration)

Exercice 01 (07 points) :
$X=\{a,b,c\}$, $\mathcal{A}=\{\emptyset,\{a\},\{b,c\},X\}$, $\mu(\emptyset)=0 \quad \mu(\{a\})=1 \quad \mu(\{b,c\})=0 \quad \mu(X)=1$.

1. **(1.5 points)** Soit $\mathcal{A}\subset\mathcal{P}(X)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une algèbre sur X si et seulement si :

Première réponce	**Deuxième réponce**
i) $X\in\mathcal{A}$, ii) $\forall A,B\in\mathcal{A} : A\cup B\in\mathcal{A}$, iii) $\forall A,B\in\mathcal{A} : A\setminus B\in\mathcal{A}$.	i) $\forall A,B\in\mathcal{A} : A\cup B\in\mathcal{A}$, ii) $\forall A\in\mathcal{A} : A^c\in\mathcal{A}$.

2. **(1.5 points)** On a :
   i) $X\in\mathcal{A}$,
   ii) $\forall A\in\mathcal{A} : \emptyset\cup A=A\in\mathcal{A}, X\cup A=X\in\mathcal{A}, \{a\}\cup\{b,c\}=\{b,c\}\in\mathcal{A}$,
   iii) $\forall A\in\mathcal{A} : \emptyset\setminus A=\emptyset\in\mathcal{A}, A\setminus\emptyset=A\in\mathcal{A}$,
   $\{a\}\setminus\{b,c\}=\{a\}\in\mathcal{A}, \{b,c\}\setminus\{a\}=\{b,c\}\in\mathcal{A}$,
   $\forall A\in\mathcal{A} : A\setminus X=\emptyset\in\mathcal{A}, \{a\}\in\mathcal{A}, X\setminus A=A^c\in\mathcal{A}$.
   Donc : $\mathcal{A}$ est une algèbre sur X.
   Conclusion (0.5 points) : $\mathcal{A}$ est une algèbre sur X, alors $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.
3. **(01 point)** On a :
   i) $\mu(\emptyset)=0$,
   ii) $\{a\}\cup\{b,c\}=X$ et $\mu(\{a\}\cup\{b,c\})=\mu(X)=1=\mu(\{a\})+\mu(\{b,c\})$.
   Donc : μ est une mesure sur $\mathcal{A}$.
4. **(01 point)** $\{b\}\subset\{b,c\}$, et $\mu(\{b,c\})=0$, donc : $\{b\}$ est un ensemble négligeable n'appartient pas à $\mathcal{A}$. Alors, l'espace $(X,\mathcal{A},\mu)$ n'est pas complet.
5. **(01.5 points)** La complétude de $\mathcal{A}$ et $\widehat{\mathcal{A}}=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{a,c\},X\}=\mathcal{P}(X)$.

Exercice 02 (09 points) : $f_n(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}$.

1. **(1.5 points)** **Théorème de convergence dominé de Lebesgue :** Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite des fonctions intégrables sur un espace mesuré $(X,\mathcal{A},\mu)$. Supposons que :
   i) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge $\mu-$ ppt vers une fonction f.
   ii) Il existe une fonction intégrable g telle que $|f_n|\le g\,\mu$ ppt pour tout n.
   Alors : f est intégrable et $f_n \overset{L^1(X,\mu)}{\longrightarrow} f$ (ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty}\displaystyle\int_X f_n d\mu=\int_X f d\mu$).
2. **(0.5 points)** $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est continue, donc $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est Lebesgue mesurable.
3. * **(01 point)** Pour $0\le x\le 1$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^n)=0$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.
   * **(01 point)** Pour $x>1$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^n)^{\frac{1}{n}}=1$. Donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{x(1+x^2)}$.
4. **(01 point)** On a : $\forall x\ge 0 : \dfrac{1}{(1+x^n)^{\frac{1}{n}}}<1$. Donc $f_n(x)\le g(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.
5. **(01 point)** On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty}|g(x)|dx=\frac{\pi}{2}<+\infty$. Donc : g est Lebesgue intégrable.
6. **(01 point)** $0<f_n\le g$, et g est Lebesgue intégrable. Donc $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est Lebesgue intégrable.

7. **(02 points)** On a :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx &= \int_0^{+\infty} f(x)dx \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + \int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx \\
&= [\arctan x]_0^1 + \left[\ln\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]_1^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{4}+\ln 2
\end{aligned}$$

Exercice 03 (**04 points**) : $f(x,y)=e^{-(x^2+y^2)}$.

1. **(0.5 points)** f est continue, donc f est mesurable.
2. **(01 point)** Puisque f est positive, mesurable, on peut appliquer théorème de Fubini-Tonelli. Alors :

(01 point)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}dxdy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}dy \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt\right) \\
&= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt\right)^2
\end{aligned}$$

3. **(01 point)** En utilisant les coordonnées polaires, on trouve :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)dxdy &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{+\infty} re^{-r^2}drd\theta \\
&= 2\pi\int_0^{+\infty} re^{-r^2}dr \\
&= \pi\left[-e^{-r^2}\right]_0^{+\infty} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

4. **(0.5 points)** De précédant : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}$.