Université Mohamed Boudiaf, M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'informatique
Licence mathématiques LMD

Département de Mathématiques
3^{eme} année S_5 (2020 - 2021)

Examen final (Mesure et intégration)

λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 01 (**03 points**) :

1. Donner la définition d'une tribu sur un ensemble non vide X.
2. Citer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Exercice 02 (**08 points**) : Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. Soit $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 3, 4, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, X\}$.
   Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.
2. On définit l'application μ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ par :
$$\mu(\emptyset) = \mu(\{3, 4, 5\}) = 0 \qquad \mu(\{1\}) = \mu(\{1, 3, 4, 5\}) = 1$$
$$\mu(\{2\}) = \mu(\{2, 3, 4, 5\}) = 2 \qquad \mu(\{1, 2\}) = \mu(X) = 3.$$
   Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{A}$.
3. Soit les fonctions φ et ψ, définies de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ comme suivant :
$$\forall x \in X : \varphi(x) = 2\chi_{\{1\}}(x) + \chi_{\{2\}}(x) + \chi_{\{3,4,5\}}(x) \qquad \psi(x) = x.$$
   i) Monterer que φ est une fonction mesurable.
   ii) Monterer que ψ n'est pas une fonction mesurable.
   iii) Calculer $\int_X \varphi d\mu$.

Exercice 03 (**09 points**) : Soit la suite des fonctions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, définie par : $\forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) = \begin{cases} -2n^2x + 2n & : \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & : \quad x < 0 \vee x > \dfrac{1}{n} \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de f_1, f_2, f_3.
2. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est Lebesgue mesurable.
3. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge siplement vers $f \equiv 0$.
4. Cette convergence est elle uniforme ?
5. Comparer entre $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.
6. Est -ce - qu'on peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue à la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$?

Corrigé de l'examen final 2020-2021 (Mesure et intégration)

Exercice 01 (03 points) :

1. **(1.5 points)** Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{P}(X)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu sur X si et seulement si :
   i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
   ii) pour toute $A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$.
   iii) pour toute famille dénombrable $\{A_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$, on a : $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.
2. **(1.5 points)** Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite des fonctions intégrables définie d'un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$. Supposons que :
   (a) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge $\mu-$ppt vers une fonction f.
   (b) Il existe une fonction intégrable g telle que $|f_n| \leq g\,\mu-$ ppt pour tout n.
   Alors : f est intégrable et $f_n \xrightarrow{L^1(X,\mu)} f$ (ce qui donne $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$).

Exercice 02 (08 points) : $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1. **(2.5 points)** On a :
   i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
   ii) $\emptyset^c = X \in \mathcal{A}$, $\{1\}^c = \{2, 3, 4, 5\} \in \mathcal{A}$, $\{2\}^c = \{1, 3, 4, 5\} \in \mathcal{A}$,
   $\{1, 2\}^c = \{3, 4, 5\} \in \mathcal{A}$, $\{3, 4, 5\}^c = \{1, 2\} \in \mathcal{A}$, $\{1, 3, 4, 5\}^c = \{2\} \in \mathcal{A}$,
   $\{2, 3, 4, 5\}^c = \{1\} \in \mathcal{A}$, $X^c = \emptyset \in \mathcal{A}$,
   iii) $\forall A \in \mathcal{A} : \emptyset \cup A = A \in \mathcal{A}$, $X \cup A = X \in \mathcal{A}$, $\{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\} \in \mathcal{A}$,
   $\{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} \in \mathcal{A}$, $\{1\} \cup \{3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5\} \in \mathcal{A}$,
   $\{1\} \cup \{1, 3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5\} \in \mathcal{A}$, $\{1\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = X \in \mathcal{A}$,
   $\{2\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} \in \mathcal{A}$, $\{2\} \cup \{3, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\} \in \mathcal{A}$,
   $\{2\} \cup \{1, 3, 4, 5\} = X \in \mathcal{A}$, $\{2\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\} \in \mathcal{A}$,
   $\{3, 4, 5\} \cup \{1, 3, 4, 5\} = \{1, 3, 4, 5\} \in \mathcal{A}$, $\{3, 4, 5\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3, 4, 5\} \in \mathcal{A}$,
   $\{1, 3, 4, 5\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = X \in \mathcal{A}$.
   Donc : $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.
2. **(2.5 point)** On a :
   i) $\mu(\emptyset) = 0$,
   ii) pour les ensembles disjoints :
   $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(\emptyset \cup A) = \mu(A) = \mu(A)$,
   $\mu(\{1\} \cup \{2\}) = \mu(\{1, 2\}) = 3 = \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$,
   $\mu(\{1\} \cup \{3, 4, 5\}) = \mu(\{1, 3, 4, 5\}) = 1 = \mu(\{1\}) + \mu(\{3, 4, 5\})$,
   $\mu(\{1\} \cup \{2, 3, 4, 5\}) = \mu(X) = 3 = \mu(\{1\}) + \mu(\{2, 3, 4, 5\})$,
   $\mu(\{2\} \cup \{3, 4, 5\}) = \mu(\{2, 3, 4, 5\}) = 2 = \mu(\{2\}) + \mu(\{3, 4, 5\})$,
   $\mu(\{2\} \cup \{1, 3, 4, 5\}) = \mu(X) = 3 = \mu(\{2\}) + \mu(\{1, 3, 4, 5\})$,
   $\mu(\{1, 2\} \cup \{3, 4, 5\}) = \mu(X) = 3 = \mu(\{1, 2\}) + \mu(\{3, 4, 5\})$.
   Donc : μ est une mesure sur $\mathcal{A}$.
3. $\forall x \in X : \varphi(x) = 2\chi_{\{1\}}(x) + \chi_{\{2\}}(x) + \chi_{\{3,4,5\}}(x) \qquad \psi(x) = x$.
   i) (01 point)
   1ère réponce :
   φ est une fonction simple, donc meurable.

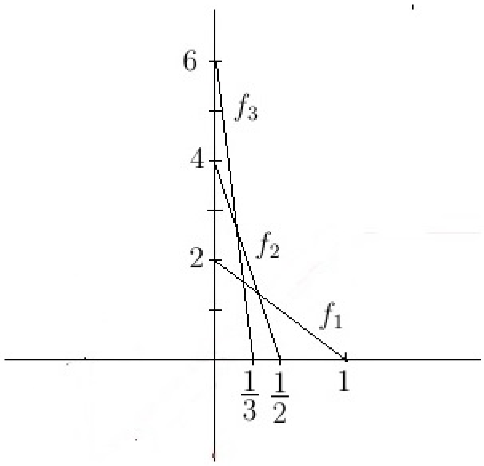
2ème réponce :
* $\{1\} \in \mathcal{A}$, donc $\chi_{\{1\}}$ est une fonction mesurable.
* $\{2\} \in \mathcal{A}$, donc $\chi_{\{2\}}$ est une fonction mesurable.
* $\{3,4,5\} \in \mathcal{A}$, donc $\chi_{\{3,4,5\}}$ est une fonction mesurable.
Alors : $\varphi = 2\chi_{\{1\}} + \chi_{\{2\}} + \chi_{\{3,4,5\}}$ est une fonction mesurable.

ii) (01 point) On a $\{4\} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, mais $\psi^{-1}(\{4\}) = \{4\} \notin \mathcal{A}$.
Donc : ψ n'est pas une fonction mesurable.

iii) (01 point) $\displaystyle\int_X \varphi d\mu = 2\mu(\{1\}) + \mu(\{2\}) + \mu(\{3,4,5\}) = 4.$

Exercice 03 (09 points) : $\forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) = \begin{cases} -2n^2x + 2n & : \quad 0 \leq x \leq \dfrac{1}{n} \\ 0 & : \quad x < 0 \vee x > \dfrac{1}{n} \end{cases}$

1. **(1.5 points)** Représentation graphique :



2. **(01 point)** $f_n = (-2n^2x + 2n)\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ produit d'une fonction continue de $(\mathbb{R}, |.|)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$ et la fonction indicatrice d'une partie Lebesgue mesurable, donc $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est Lebesgue mesurrable.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   * **(01 point)** Pour $x < 0$, on a : $f_n(x) = 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
   * **(1.5 points)** Pour $x > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x > \dfrac{1}{n_0}$. Alors : $f_n(x) = 0, \forall n \geq n_0$.
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
4. **(1.5 points)** On a :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{0\leq x\leq \frac{1}{n}} (-2n^2x + 2n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2n = +\infty.$
   Donc : la convergence n'est pas uniforme.
5. **(1.5 point)** On a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_0^{\frac{1}{n}} (-2n^2x + 2n)dx = 1$. Alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1.$
   $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 0.\lambda(\mathbb{R}) = 0 \times (+\infty) = 0.$
   Donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$
6. **(01 point)**
   1ère réponce : On ne peut pas appliquer théorème de convergence dominée de Lebesgue car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ (par contraposition).
   2ème réponce : On ne peut pas appliquer théorème de convergence dominée de Lebesgue car on ne peut pas trouver une fonction intégrable g telle que $|f_n| \leq g\, \mu-$ ppt pour tout n.