Université Mohamed Boudiaf, M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'informatique | Département de Mathématiques
Licence mathématiques LMD | 3^{eme} année S_5 (2020 - 2021)

Examen de rattrapage (Mesure et intégration)

λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 01 (**03 points**) :

1. Donner la définition d'une mesure positive sur une tribu $\mathcal{A}$.
2. Citer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Exercice 02 (**08 points**) : Soit A et B de ensembles non vides, tels que $A \cap B \neq \emptyset$. On pose $X = A \cup B$. Soit $\mathcal{A} = \{\emptyset, A, B, A \setminus B, B \setminus A, A \cap B, A\Delta B, X\}$.
Rappelle : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.
2. Soit μ une mesure définie sur $\mathcal{A}$, vérifie :
$$\mu(A \setminus B) = 3 \qquad \mu(B \setminus A) = 2 \qquad \mu(A \cap B) = 1.$$
Calculer $\mu(A), \mu(B), \mu(A\Delta B), \mu(X)$.
3. Soit les fonctions φ et ψ, définies de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ comme suivant :
$$\forall x \in X : \varphi(x) = 2\chi_{A\setminus B}(x) + 3\chi_{B\setminus A}(x) + \chi_{A\cap B}(x) \qquad \psi(x) = \chi_A(x) + \chi_B(x).$$
   i) Monterer que φ et ψ sont des fonctions mesurables.
   ii) Calculer $\int_X \varphi d\mu$.
   iii) Calculer $\int_X \psi d\mu$.

Exercice 03 (**09 points**) : Soit la suite des fonctions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, définie par : $\forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) = \begin{cases} n & : \quad x \in \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right] \\ 0 & : \quad x \notin \left[-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right] \end{cases}$

1. Tracer la représentation graphique de f_1, f_2, f_3.
2. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est Lebesgue mesurable.
3. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge siplement vers $f \equiv 0$.
4. Cette convergence est elle uniforme ?
5. Comparer entre $\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.
6. Soit θ une fonction continue sur , et soit ρ la primitive de θ. Montrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\theta(x)dx = \rho'(0) = \theta(0)$$
.

Corrigé de l'examen de rattrapage 20-21 (Mesure et intégration)

Exercice 01 (**03 points**) :

1. **(1.5 points)** Soit $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable, et soit la fonction μ une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$. On dit que μ et une mesure positive si et seulement si :
   i) Pour toute $A \in \mathcal{A}$, on a $\mu(A) \geq 0$,
   ii) $\mu(\emptyset) = 0$,
   iii) pour toute suite dénombrable $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ des éléments disjoints deux à deux de $\mathcal{A}$, on a : $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$.
2. **(1.5 points)** Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite des fonctions intégrables définie d'un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$. Supposons que :
   (a) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge $\mu-$ppt vers une fonction f.
   (b) Il existe une fonction intégrable g telle que $|f_n| \leq g\,\mu-$ ppt pour tout n.
   Alors : f est intégrable et $f_n \overset{L^1(X,\mu)}{\longrightarrow} f$ (ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$).

Exercice 02 (**08 points**) : $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset, A \cap B \neq \emptyset, X = A \cup B$.

1. On a :
   i) **(0.5 point)** $\emptyset \in \mathcal{A}$,
   ii) **(0.5 point)** $\emptyset^c = X \in \mathcal{A}$, $A^c = B \setminus A \in \mathcal{A}$, $B^c = A \setminus B \in \mathcal{A}$, $(A \setminus B)^c = B \in \mathcal{A}$, $(B \setminus A)^c = A \in \mathcal{A}$, $(A \cap B)^c = A\Delta B \in \mathcal{A}$, $(A\Delta B)^c = A \cap B \in \mathcal{A}$, $X^c = \emptyset \in \mathcal{A}$,
   iii) **(01 point)** $\forall E \in \mathcal{A} : \emptyset \cup E = E \in \mathcal{A}$, $E \cup E = E \in \{A\}$, $X \cup E = X \in \mathcal{A}$,
   $A \cup B = X \in \mathcal{A}$, $A \cup (A \setminus B) = A \in \mathcal{A}$, $A \cup (B \setminus A) = X \in \mathcal{A}$, $A \cup (A \cap B) = A \in \mathcal{A}$,
   $A \cup (A\Delta B) = X \in \mathcal{A}$, $B \cup (A \setminus B) = X \in \mathcal{A}$, $B \cup (B \setminus A) = B \in \mathcal{A}$,
   $B \cup (A \cap B) = B \in \mathcal{A}$, $B \cup (A\Delta B) = X \in \mathcal{A}$, $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A\Delta B \in \mathcal{A}$,
   $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A \in \mathcal{A}$, $(A \setminus B) \cup (A\Delta B) = A\Delta B \in \mathcal{A}$,
   $(B \setminus A) \cup (A \cap B) = B \in \mathcal{A}$, $(B \setminus A) \cup (A\Delta B) = A\Delta B \in \mathcal{A}$, $(A \cap B) \cup (A\Delta B) = X \in \mathcal{A}$.
   Donc : $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.
2. **(0.5 point)** les ensembles $A \setminus B, B \setminus A, A \cap B$ sont disjoints deux à deux, donc :
   i) **(0.5 point)** $\mu(A) = \mu((A \setminus B) \cup (A \cap B)) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) = 4$,
   ii) **(0.5 point)** $\mu(B) = \mu((B \setminus A) \cup (A \cap B)) = \mu(A \setminus B) + \mu(A \cap B) = 3$,
   iii) **(0.5 point)** $\mu(A\Delta B) = \mu((A \setminus B) \cup (B \setminus A)) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) = 5$,
   vi) **(0.5 point)** $\mu(X) = \mu((A \setminus B) \cup (B \setminus A) \cup (A \cap B)) = \mu(A \setminus B) + \mu(B \setminus A) + \mu(A \cap B) = 6$.
3. $\forall x \in X : \varphi(x) = 2\chi_{\{1\}}(x) + \chi_{\{2\}}(x) + \chi_{\{3,4,5\}}(x) \qquad \psi(x) = x$.
   i) **(1.5 points)**
   1ère réponce :
   φ et ψ sont des fonctions simples, donc mesurables.
   2ème réponce :
   * $A \in \mathcal{A}$, donc χ_A est une fonction mesurable,
   * $B \in \mathcal{A}$, donc χ_B est une fonction mesurable,
   * $A \setminus B \in \mathcal{A}$, donc $\chi_{A\setminus B}$ est une fonction mesurable,
   * $A \setminus B \in \mathcal{A}$, donc $\chi_{B\setminus A}$ est une fonction mesurable,
   * $A \setminus B \in \mathcal{A}$, donc $\chi_{A\cap B}$ est une fonction mesurable.
   Alors :
   * $\varphi = 2\chi_{A\setminus B} + \chi_{B\setminus A} + 3\chi_{A\cap B}$ est une fonction mesurable.
   * $\psi = \chi_A + \chi_B$ est une fonction mesurable.

ii) (01 point) $\displaystyle\int_X \varphi d\mu = 2\mu(A\setminus B)+\mu(B\setminus A)+3\mu(A\cap B)=11.$

iii) (01 point) On a :

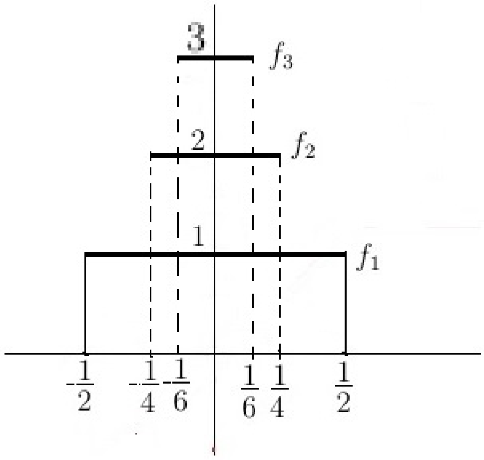
$\psi=\chi_A+\chi_B=\chi_{(A\setminus B)\cup(A\cap b)}+\chi_{(B\setminus A)\cup(A\cap b)}=\chi_{A\setminus B}+\chi_{B\setminus A}+2\chi_{A\cap B}.$

(0.5 points) Alors :

$\displaystyle\int_X \psi d\mu=\mu(A\setminus B)+\mu(B\setminus A)+2\mu(A\cap B)=7.$

Exercice 03 (09 points) : $\forall x\in\mathbb{R} : f_n(x)=\begin{cases} n & : \ x\in\left[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}\right] \\ 0 & : \ x\notin\left[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}\right]\end{cases}$

1. **(1.5 points)** Représentation graphique :



2. **(1.5 point)** $f_n=\chi_{[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]}$, et $[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]$ est une partie mesurable, donc $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est Lebesgue mesurable.
3. **(1.5 point)** Soit $x\in\mathbb{R}$,
   il existe $n_0\in\mathbb{N}^*$ tel que $|x|>\dfrac{1}{n_0}$. Alors : $f_n(x)=0,\forall n\geq n_0$.
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)=0$.
4. **(1.5 points)** On a :
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f_n(x)-f(x)|=\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty.$
   Donc : la convergence n'est pas uniforme.
5. **(1.5 points)** On a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda=\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n dx=1$. Alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda=1.$
   $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f d\lambda=0.\lambda(\mathbb{R})=0\times(+\infty)=0.$
   Donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda\neq\int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$
6. **(1.5 points)**
   On a :
   $$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\theta(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\int_{-\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} n\theta(x)dx=\lim_{n\to+\infty} n\left[\rho\left(\frac{1}{2n}\right)-\rho\left(-\frac{1}{2n}\right)\right].$$
   On pose $h=\dfrac{1}{2n}$, alors :
   $$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\theta(x)dx=\lim_{h\xrightarrow{>}0}\frac{\rho(h)-\rho(-h)}{2h}=\rho'(0)=\theta(0).$$