Université Mohamed Boudiaf, M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'informatique | Département de Mathématiques
Licence mathématiques LMD | 3^{eme} année S_5 (2019 - 2020)

Examen de rattrapage (Meure et intégration)

Exercice 01 (07 points) : Soit $A = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R}_+^* : A = A^{-1}\}$, ou $A^{-1} = \left\{\frac{1}{x}, x \in A\right\}$.

1. Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Donner un exemple de $A \in \mathcal{A}$, différent de $\emptyset$ et différent de $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit la fonction f de $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ définie par : $f(x) = |\ln x|$.
   Montrer que f est une fonction mesurable.
4. Soit la fonction g de $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ définie par : $g(x) = \ln x$.
   Montrer que g n' est pas une fonction mesurable.
5. Montrer qu'une fonction h de $(\mathbb{R}^*, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$ est mesurable si et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : h\left(\frac{1}{x}\right) = h(x)$$

.

Exercice 02 (08 points) : λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.
Soit la suite des fonctions $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$, définit de $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{L}(\mathbb{R}_+^*))$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^+ : f_n(x) = (x^{2n} + x^n + 1)^{-\frac{1}{n}}.$$

1. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ est Lebesgue mésurable.
2. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ est Lebesgue intégrable.
3. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ converge siplement vers la fonction f, définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & : \ 0 \leq x < 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & : \ x \geq 1 \end{cases}$$

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0 : f_n(x) \leq f(x)$.
5. Montrer que fonction f est Lebesgue intégrable.
6. Endéduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$.

Exercice 03 (05 points) : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^2$ par : $f(x, y) = \dfrac{1}{(1 + x^2 y)(1 + y)}$.

1. Rappeler lethéorème de Fubini-Tonelli.
2. Justifier la mesurabilité de la fonction f.
3. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x, y)dy$.
4. Endéduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(x, y)dxdy$.

Corrigé de l'examen de rattrapage (Mesure et intégration)

Exercice 01 (07 points) :

$A = \{\emptyset\} \cup \{A \subset \mathbb{R}_+^* : A = A^{-1}\}$, ou $A^{-1} = \left\{\dfrac{1}{x}, x \in A\right\}$.

1. On a :
   i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,
   ii) Soit $A \in \mathcal{A}$, on montre que $A^c \in \mathcal{A}$.
   Soit $x \in A^c$, alors $\dfrac{1}{x} \notin A$. Alors $\dfrac{1}{x} \in A^c$, i.e $A^c \subset (A^c)^{-1}$,
   et de même $(A^c)^{-1} \subset A^c$, donc $A^c = (A^c)^{-1}$, alors $A^c \in \mathcal{A}$.
   iii) Soit $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}\mathcal{A}$, on montre que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
   Soit $x \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, il existe n_0 tel que $x \in A_{n_0}$. Donc : $\dfrac{1}{x} \in A_{n_0}$, ie. $\dfrac{1}{x} \in \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
   Alors $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1}$, et de même $\left(\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1} \subset \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$,
   donc $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)^{-1}$, alors $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.
   Donc : $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.
2. Example : $\{-1, 1\} \in \mathcal{A}$
3. Montrons que la fonction f définie par $f(x) = |\ln x|$ est mesurable. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   * Si $a \leq 0$ alors $f^{-1}(]-\infty, a[) = \emptyset \in \mathcal{A}$.
   * Si $a > 0$ alors $f^{-1}(]-\infty, a[) =]e^{-a}, e^{a}[\in \mathcal{A}$.
   Donc : f est mesurable.
4. Montrons que la fonction g définie par $g(x) = \ln x$ n'est pas mesurable.
   On a $g^{-1}(]-\infty, 1[) =]0, e[\notin \mathcal{A}$.
   Donc : g n'est pas mesurable.
5. Soit h une fonction de $(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.
   $\Rightarrow$ Supposons que h est mesurable.
   S'il existe $x_0 > 0$ tel que $h\left(\dfrac{1}{x_0}\right) \neq h(x_0)$ alors $h\left(\dfrac{1}{x_0}\right) < h(x_0)$ ou $h\left(\dfrac{1}{x_0}\right) > h(x_0)$.
   Supposons par example que $h\left(\dfrac{1}{x_0}\right) < h(x_0)$, alors $x_0 \notin h^{-1}\left(\left]-\infty, \dfrac{1}{x_0}\right]\right)$.
   Mais $h^{-1}\left(\left]-\infty, \dfrac{1}{x_0}\right]\right) \in \mathcal{A}$ et $\dfrac{1}{x_0} \in h^{-1}\left(\left]-\infty, \dfrac{1}{x_0}\right]\right)$, ce qui donne une contradiction.
   $\Leftarrow$ Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :
   $x \in h^{-1}(]-\infty, a]) \Leftrightarrow h(x) \leq a \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \leq a \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} \in h^{-1}(]-\infty, a])$.
   Donc : h est mesurable.

Exercice 02 (08 points) : $\forall x \in \mathbb{R}^+ : f_n(x) = (x^{2n} + x^n + 1)^{-\frac{1}{n}}$.

1. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est continue, donc $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est Lebesgue mesurable.
2. La fonction f est localement intégrable, équivaent à $\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de l'infini. Donc, f_n est intégrable.
3. * Pour $0 \leq x < 1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} (x^{2n} + x^n + 1)^{-\frac{1}{n}} = 1$.
   * Pour $x > 1$, on a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{x^2}(1 + x^{-n} + x^{-2n})^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{x^2}$.

4. * Pour $0 \leq x < 1$, on a : $(x^{2n}+x^n+1)^{-\frac{1}{n}} \leq 1$.
   * Pour $x > 1$, on a : $(x^{2n}+x^n+1)^{-\frac{1}{n}} \leq \dfrac{1}{x^2}$.
   Donc $f_n(x) \leq f(x)$.
5. On a : $\displaystyle\int_0^{+\infty} |g(x)|dx = 2 < +\infty$. Donc : g est Lebesgue intégrable.
6. $0 < f_n \leq g$, et g est Lebesgue intégrable. Donc $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est Lebesgue intégrable.
7. On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} f(x)dx = 2$.

Exercice 03 (05 points) : $f(x,y) = \dfrac{1}{(1+x^2y)(1+y)}$, $x > 0, y > 0$.

1. **Théorème de Fubini-Tonelli :** Soient f une fonction mesurable de $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. Supposons que μ_1, μ_2 sont $\sigma-$ finies. Alors :
   (a) Les fonctions $x_1 \longmapsto \displaystyle\int_{X_2} f(x_1,x_2)d\mu_2, x_2 \longmapsto \int_{X_1} f(x_1,x_2)d\mu_1$ sont respectivement $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ mesurables.
   (b) $\displaystyle\int_{X_1\times X_2} f(x_1,x_2)d\mu_1\otimes\mu_2 = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)d\mu_2\right)d\mu_1 = \int_{X_2}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)d\mu_1\right)d\mu_2.$
2. f est continue, donc mesurable.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x,y)dy = \int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2-1}\left[\frac{x^2}{1+x^2y} - \frac{1}{1+y}\right]dy = \frac{2\ln x}{x^2-1}.$
4. Puisque f est positive, mesurable, on peut appliquer théorème de Fubini-Tonelli. Alors :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x,y)dxdy &= \int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(x,y)dydx \\
&= \int_0^{+\infty}\frac{2\ln x}{x^2-1}dx \\
&= \int_0^{+\infty}\left(\frac{\ln x}{x-1} - \frac{\ln x}{x+1}\right)dx \\
&= [\ln x.\ln|x-1| - \ln x.\ln(x+1)]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x+1)}\right)dx \\
&= -\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} - \frac{2}{x}\right)dx \\
&= [\ln|x-1| + \ln(x+1) - 2\ln x]_{+\infty}^{0} \\
&= +\infty.
\end{aligned}$$