Université Mohamed Boudiaf, M'sila

Faculté des Mathématiques et de l'informatique — Département de Mathématiques
Licence mathématiques LMD — 3^{eme} année S_5 (2020 - 2021)

Examen de remplacement (Mesure et intégration)

λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 01 (**03 points**) :

1. Donner la définition d'une tribu sur un ensemble non vide X.
2. Citer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue.

Exercice 02 (**08 points**) : Soit $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. Soit $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, X\}$.
   Montrer que $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.
2. On définit l'application μ de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ par :
$$\mu(\emptyset) = \mu(\{3\}) = 0 \qquad \mu(\{4\}) = \mu(\{1, 2, 3\}) = 1$$
$$\mu(\{1, 2\}) = \mu(\{3, 4\}) = 1 \qquad \mu(\{1, 2, 4\}) = \mu(X) = 2.$$
   Montrer que μ est une mesure sur $\mathcal{A}$.
3. Soit la fonctions φ, définies de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(X, \mathcal{A}, \mu)$ comme suivant :
$$\varphi(1) = 1 \qquad \varphi(2) = \varphi(3) = 3 \qquad \varphi(4) = 4.$$
   Monterer que φ n'est pas une fonction mesurable.
4. Soit la fonction ψ, définie de $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ comme suivant :
$$\forall x \in X : \psi(x) = \chi_{\{3\}}(x) + 2\chi_{\{4\}}(x) + 3\chi_{\{1,2\}}(x).$$
   i) Monterer que ψ est une fonction mesurable.

   iii) Calculer $\displaystyle\int_X \psi d\mu$.

Exercice 03 (**09 points**) : Soit la suite des fonctions $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, de $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$, définie par : $\forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) = n\chi_{[n,n+\frac{1}{n}]} \begin{cases} n & : \ x \in [n, n + \frac{1}{n}] \\ 0 & : \ x \notin [n, n + \frac{1}{n}] \end{cases}$

1. Tracer dans un repère orthonormé les représentations graphiques de f_1, f_2, f_3.
2. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est Lebesgue mesurable.
3. Montrer que la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge siplement vers $f \equiv 0$.
4. Cette convergence est elle uniforme ?
5. Comparer entre $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.
6. Est -ce - qu'on peut appliquer le théorème de convergence monotone de Beppo Levi à la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$?

Corrigé de l'examen final 2020-2021 (Mesure et intégration)

Exercice 01 (**03 points**) :

1. **(1.5 points)** Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{A}$ est une partie de $\mathcal{P}(X)$. On dit que $\mathcal{A}$ est une tribu sur X si et seulement si :

   i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

   ii) pour toute $A \in \mathcal{A}$, on a $A^c \in \mathcal{A}$.

   iii) pour toute famille dénombrable $\{A_i\}_{i\in I}$ de $\mathcal{A}$, on a : $\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \mathcal{A}$.

2. **(1.5 points)** Soit $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ une suite des fonctions intégrables définie d'un espace mesuré $(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$. Supposons que :

   (a) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge $\mu-$ppt vers une fonction f.

   (b) Il existe une fonction intégrable g telle que $|f_n| \leq g\, \mu-$ ppt pour tout n.

   Alors : f est intégrable et $f_n \overset{L^1(X,\mu)}{\longrightarrow} f$ (ce qui donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X f d\mu$).

Exercice 02 (**08 points**) : $X = \{1, 2, 3, 4\}$.

1. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, X\}$. On a :

   i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

   ii) $\emptyset^c = X \in \mathcal{A}$, $\{3\}^c = \{1, 2, 4\} \in \mathcal{A}$, $\{4\}^c = \{1, 2, 3\} \in \mathcal{A}$,
   $\{1, 2\}^c = \{3, 4\} \in \mathcal{A}$, $\{3, 4\}^c = \{1, 2\} \in \mathcal{A}$, $\{1, 2, 3\}^c = \{4\} \in \mathcal{A}$,
   $\{1, 2, 4\}^c = \{3\} \in \mathcal{A}$, $X^c = \emptyset \in \mathcal{A}$,

   iii) $\forall A \in \mathcal{A} : \emptyset \cup A = A \in \mathcal{A}$, $X \cup A = X \in \mathcal{A}$, $\{3\} \cup \{4\} = \{3, 4\} \in \mathcal{A}$,
   $\{3\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3\} \in \mathcal{A}$, $\{3\} \cup \{3, 4\} = \{3, 4\} \in \mathcal{A}$,
   $\{3\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} \in \mathcal{A}$, $\{3\} \cup \{1, 2, 4\} = X \in \mathcal{A}$,
   $\{4\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 4\} \in \mathcal{A}$, $\{4\} \cup \{3, 4\} = \{3, 4\} \in \mathcal{A}$,
   $\{4\} \cup \{1, 2, 3\} = X \in \mathcal{A}$, $\{4\} \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 4\} \in \mathcal{A}$,
   $\{1, 2\} \cup \{3, 4\} = X \in \mathcal{A}$, $\{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} \in \mathcal{A}$,
   $\{1, 2\} \cup \{1, 2, 4\} = \{1, 2, 4\} \in \mathcal{A}, \{3, 4\} \cup \{1, 2, 3\} = X \in \mathcal{A}$,
   $\{3, 4\} \cup \{1, 2, 4\} = X \in \mathcal{A}, \{1, 2, 3\} \cup \{1, 2, 4\} = X \in \mathcal{A}$.

   Donc : $\mathcal{A}$ est une tribu sur X.

2. On a :

   i) $\mu(\emptyset) = 0$,

   ii) pour les ensembles disjoints :
   $\forall A \in \mathcal{A} : \mu(\emptyset \cup A) = \mu(A) = \mu(A)$,
   $\mu(\{3\} \cup \{4\}) = \mu(\{3, 4\}) = 1 = \mu(\{1\}) + \mu(\{2\})$,
   $\mu(\{3\} \cup \{1, 2\}) = \mu(\{1, 2, 3\}) = 1 = \mu(\{3\}) + \mu(\{1, 2\})$,
   $\mu(\{3\} \cup \{1, 2, 4\}) = \mu(X) = 2 = \mu(\{3\}) + \mu(\{1, 2, 4\})$,
   $\mu(\{4\} \cup \{1, 2\}) = \mu(\{1, 2, 4\}) = 2 = \mu(\{4\}) + \mu(\{1, 2\})$,
   $\mu(\{4\} \cup \{1, 2, 3\}) = \mu(X) = 2 = \mu(\{4\}) + \mu(\{1, 2, 3\})$,
   $\mu(\{1, 2\} \cup \{3, 4\}) = \mu(X) = 2 = \mu(\{1, 2\}) + \mu(\{3, 4\})$.

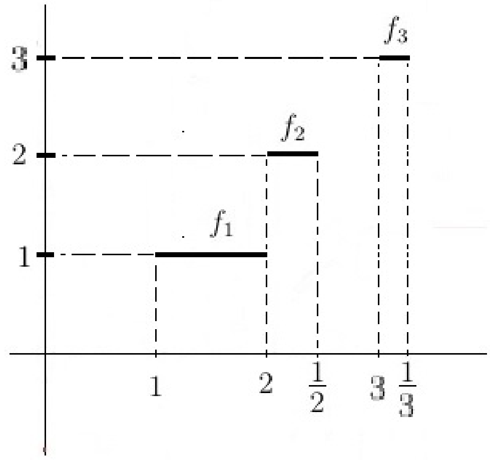
   Donc : μ est une mesure sur $\mathcal{A}$.

3. $\varphi(1) = 1 \qquad \varphi(2) = \varphi(3) = 3 \qquad \varphi(4) = 4$.
   On a $\{3\} \in \mathcal{A}$, mais $\varphi^{-1}(\{3\}) = \{2, 3\} \notin \mathcal{A}$.
   Donc : φ n'est pas une fonction mesurable.

4. $\forall x \in X : \psi(x) = \chi_{\{3\}}(x) + 2\chi_{\{4\}}(x) + 3\chi_{\{1,2\}}(x)$.
   1ère réponce :
   ψ est une fonction simple, donc meurable.
   2ème réponce :
   * $\{3\} \in \mathcal{A}$, donc $\chi_{\{3\}}$ est une fonction mesurable.
   * $\{4\} \in \mathcal{A}$, donc $\chi_{\{4\}}$ est une fonction mesurable.
   * $\{1,2\} \in \mathcal{A}$, donc $\chi_{\{1,2\}}$ est une fonction mesurable.
   Alors : $\psi = 2\chi_{\{3\}} + \chi_{\{4\}} + \chi_{\{1,2\}}$ est une fonction mesurable.
5. $\displaystyle\int_X \psi d\mu = \mu(\{3\}) + 2\mu(\{4\}) + 3\mu(\{1,2\}) = 5.$

Exercice 03 (**09 points**) : $\forall x \in \mathbb{R} : f_n(x) = n\chi_{[n,n+\frac{1}{n}]} = \begin{cases} n & : \quad x \in [n, n+\frac{1}{n}] \\ 0 & : \quad x \notin [n, n+\frac{1}{n}] \end{cases}$

1. Représentation graphique :



2. $f_n = n\chi_{[0,\frac{1}{n}]}$ produit d'une constante avec une fonction indicatrice d'une partie Lebesgue mesurable, donc $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ est Lebesgue mesurrable.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$. il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $x < n$. Alors : $f_n(x) = 0, \forall n \geq n_0$.
   Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
4. On a :
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{n\leq x\leq n+\frac{1}{n}} (n) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty.$
   Donc : la convergence n'est pas uniforme.
5. On a : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = \int_n^{n+\frac{1}{n}} n dx = 1$. Alors : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 1.$
   $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 0.\lambda(\mathbb{R}) = 0 \times (+\infty) = 0.$
   Donc : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.$
6. **1ère réponce :** On ne peut pas appliquer théorème de convergence dominée de Lebesgue car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda \neq \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$ (par contraposition).
   2ème réponce : On ne peut pas appliquer théorème de convergence dominée de Lebesgue car on ne peut pas trouver une fonction intégrable g telle que $|f_n| \leq g\, \mu-$ ppt pour tout n.