Chapitre1: Séries

1 Séries numériques

Definition 1 *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres réels. On appelle une séries numériques de terme général u_n, l'expression $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.*

1.1 Convergence des séries

On dit que la série de terme général u_n est convergente ssi la suite $(S_n)_n$ définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est convergente. Notée S, la limite de la suite $(S_n)_n$ quand n tend vers l'infini. On écrit alors: $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exemple: Etudier la séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$ pour $|q| < 1$.

On a $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc la séries géométrique $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n$ est converge vers 0.

1.2 Condition nécessaire de convergence

Theorem 2 *Pour que la série de terme général un soit convergente, il est nécessaire que $u_n = 0$. Mais cette condition n'est pas suffisante.*

Proof. On a, pour tout entier $n \geq 1, u_n = S_n - S_{n-1}$. La convergence de la suite $(S_n)_n$ entraîne l'égalité $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. ■

Remark 3 *La réciproque n'est pas vraie, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge mais $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.*

1.3 Reste d'un séries

Soit $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ une séries numériques. On appelle reste d'order n de la séries $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la quantité $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Exemple: $\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ... + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + R_n$.

1.4 Operation sur les séries

- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n$ converge.
- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda u_n$ diverge.
- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ converge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)$ converge.
- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)$ diverge.
- Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ diverge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ diverge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + v_n)$ cas non réglé.

1.5 Séries à termes positifs

Theorem 4 (Critère de comparaison) *Soient* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ *deux séries à termes positifs. Supposons que* $u_n \leq v_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *donc*

1. *Si* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est divergente, alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ *est divergente.*
2. *Si* $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ *est convergente, alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *est convergente.*

Exemple: Etudier la séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+3)}$.

En effet, la suit $\frac{1}{n(n+3)} \leq \frac{1}{n(n+1)}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$. D'ou, d'aprés le **critère de comparaison**, on déduir que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n(n+3)}$ convergente.

Theorem 5 (Theorem d'équivalent) *Soient* $(u_n)_n$ *et* $(v_n)_n$ *deux suites à termes positifs. Supposons que*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1,$$

alors les deux séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ *sont de même nature.*

Exemple: Etudier la séries $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Soit $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$, on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, entraîne $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est de même nature que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Theorem 6 (Critère de D'Alembert) *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *une séries à termes strictement positifs et soit* $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$, *alors:*

1. *Si* $l < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *converge,*
2. *Si* $l > 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *diverge,*
3. *Si* $l = 1$, *on ne peut pas conclure.*

Exemple: Etudier la séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$.

En appliquant le **critère de D'Alembert**, on obtient: $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1$ et la séries est convergente.

Theorem 7 (Critère de Cauchy) *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *une séries à termes strictement positifs et soit* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$, *alors:*

1. *Si* $l < 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *converge,*
2. *Si* $l > 1$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ *diverge,*
3. *Si* $l = 1$, *on ne peut pas conclure.*

Exemple: Etudier la séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

En appliquant le **critère de Cauchy**, on obtient: $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{n}\ln n}}{\ln n} = 0 < 1$ et la séries est convergente.

Theorem 8 (Critère de comparaison avec une intégrale) *Soit f une fonction positifs définie sur $[1, +\infty[$ et décroissente, tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, et soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une séries à termes positifs. Supposons que $u_n = f(n)$, $\forall n \geq 1$, donc $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ sont de même nature.*

Exemple: Etudier la séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

La fonction $x \to \frac{1}{x}$ est positive, décroissente et tend vers 0. Par suit, on peut appliquer le **critère de comparaison avec une intégrale**. On a $\lim_{t\to+\infty} \int_1^t \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$, donc la séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ est divergente.

1.6 Séries à termes de signe quelconque

Definition 9 (Séries absolument convergentes) *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une séries numérique réelle. On dit qu'elle est absolument convergente si la séries $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ converge.*

L'étude de la convergence absolue d'un séries est la même que celle de la convergence d'un séries de termes positive.

Theorem 10 *Toute séries absolument convergente est convergente.*

Exemple: Etudier la séries $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ et $|x| < 1$.

En appliquant le **critère de D'Alembert**, on obtient: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}|x| = |x| < 1$, donc la séries $\sum_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ est absolument convergente. D'ou, d'aprer le théorème présédente elle est convergent.

Definition 11 (Séries semi-convergentes) *Une séries est dit semi-convergente si elle convergente sans être absolument convergente.*

Exemple: La séries alternée $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente, mais elle n'est pas absolument convergente, c.à.d $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente.

Definition 12 (Séries alternés) *Soit $(u_n)_n$ une suite de signe constant. On appelle séries alternée une séries numérique dont le terme géneral v_n est de la forme $v_n = (-1)^n u_n$.*

Exemple:

1. La séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ est une séries alternée; on l'appelle séries harmonique alternée.
2. La séries $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ est une séries alternée; on l'appelle séries Riemann alternée.

Theorem 13 *Si la suite $(u_n)_n$ est positive, décroissente et converge vers 0. Alors la séries $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n u_n$ est convergente.*

Theorem 14 (Critère D'Abel) *Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une séries numérique réelle tel que $u_n = a_n b_n$, où $a_n, b_n\ (n \in \mathbb{N})$ sont des nombres réels, avec*

1. *La suite $(b_n)_n$ est converge vers 0 et monotone $(b_n \geq b_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N})$,*
2. *La suite des somme partielles $\sum_{k=0}^{n} a_k$ de la séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ soit bornée$\left(\exists M > 0, \forall n \in \mathbb{N} : \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq M\right)$.*

Alors la séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ converge.

Exemple: Les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos nx}{n}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ sont convergente.

Theorem 15 (Critère Dirichlet) *Si la suite $(a_n)_n$ est monotone et bornée, et la séries $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ converge, alors la séries $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$ est aussi convergente.*

Exemple: Etudier la séries $\sum\limits_{n\geq 1}^{+\infty} \frac{\sin \alpha n}{n}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

a) Si $\alpha = k\pi$, $\frac{\sin \alpha n}{n}$ est identiquement null $\forall n \in \mathbb{N}$, la séries converge.

b) Supposons $\alpha \neq k\pi$, $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sin(\alpha k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(\sin(\alpha k))\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\left(\alpha\frac{2k-1}{2}\right)-\cos\left(\alpha\frac{2k+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ = \frac{1}{2}\frac{\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{3\alpha}{2}\right)\right)+\ldots+\cos\left(\alpha\frac{2n-1}{2}\right)-\cos\left(\alpha\frac{2n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ = \frac{1}{2}\frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}.\end{aligned}$$

En passant aux valeurs absolues, on peut écrire:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \sin(\alpha k)\right| \leq \frac{1}{2}\frac{\left|\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right| + \left|\cos\left(\frac{(2n+1)\alpha}{2}\right)\right|}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|} \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right|}.$$

Donc la suite des sommes partielle de la séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin \alpha n$ est bornée. D'autre part la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_n$ est monotone et bornée. D'où, d'aprés le **critère de Drichlet**, la séries $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \alpha n}{n}$ est convergent.

2 Séries de fonctions

2.1 Suites de fonctions

Definition 16 *Soit $(f_n(x))_n$ une suite de fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f converge simplement sur D si $\forall x_0 \in D$, la suit $f_n(x_0)$ converge sur $\mathbb{R}$.*

Example 17 *Etudier la suite $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ et $|x| \leq 1$.*

- Si $x = 1$ on a $f_n(1) = 1$.
- Si $0 \leq x < 1$ on a $0 \leq x^n < 1$ cela implique $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$

D'où, la suite $f_n(x)$ est convergent vere $f(x) = \begin{cases} 1, & x=1 \\ 0, & 0\leq x<1 \end{cases}$.

2.2 Convergence simple et uniforme d'une suite de fonction

Definition 18 (Convergence simple) *Soit $(f_n(x))_n$ une suite de fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f converge simplement sur D si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in D, \exists n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0(\varepsilon, x) \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

On écrit: $f_n \to f$.

Example 19 *Etudier la suite $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ et $|x| \leq 1$.*

On a $f_n \to f$ et $f(x) = \left\{ \begin{smallmatrix} 1, & x=1 \\ 0, & 0\leq x<1 \end{smallmatrix} \right.$, alors $|f_n(x) - f(x)| = \left\{ \begin{smallmatrix} 0, & x=1 \\ x^n, & 0\leq x<1 \end{smallmatrix} \right.$.
Soit $\varepsilon > 0$. On a

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= x^n < \varepsilon \\ &\Longrightarrow n \ln x < \ln \varepsilon \\ &\Longrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \\ &\Longrightarrow n_0(\varepsilon, x) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln x}\right] + 1. \end{aligned}$$

Definition 20 (Convergence uniforme) *Soit $(f_n(x))_n$ une suite de fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On dit que f_n converge uniformement vers f sur D si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0(\varepsilon, x), \forall x \in D \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

On écrit: $f_n \rightrightarrows f$.

Proposition 21 *Si $f_n \rightrightarrows f$ sur D, alors $f_n \to f$ sur D.*

Theorem 22 *Soit $(f_n(x))_n$ une suite de fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. Alors*

$$f_n \rightrightarrows f \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

Example 23 *Etudier la convergence uniforme de la suite $f_n(x) = x^n$, $x \in \mathbb{R}$ et $|x| \leq 1$.*

On a $f_n \to f$ et $f(x) = \left\{ \begin{smallmatrix} 1, & x=1 \\ 0, & 0\leq x<1 \end{smallmatrix} \right.$, pour $0 \leq x < 1$, $|f_n(x) - f(x)| = x^n$, alors $\sup_{x\in[0,1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,1[} x^n = 1$, Donc $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} 1 = 0$. D'où, la convergent de la suite $f_n(x)$ n'est pas uniforme.

Theorem 24 *Soit $(f_n(x))_n$ une suite de fonction continue sur $[a, b]$. Alors*

$$f_n \rightrightarrows f \Longrightarrow f \text{ est continue sur } [a, b].$$

2.3 Séries de fonctions

Definition 25 *Soit $(f_n(x))_n$ une suite de fonction définie sur $D \subset \mathbb{R}$. On appelle série de la suite $(S_n)_n$ tel que $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ la série de fonction $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$. Si $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x)$, $\forall x \in D$ existe on dit que la série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge et $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) = S(x)$. Si non diverge.*

Example 26 *Etudier la séries* $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ *pour* $x \in [0,1[$.

On a $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, $x \in [0,1[$ et $\lim_{n\to 0} S_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = S(x)$, $x \in [0,1[$. D'où, la série converge et $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, $x \in [0,1[$.

Definition 27 (Convergence uniforme) *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *une série de fonction définie sur* $D \subset \mathbb{R}$. *On dit que* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge uniformement sur* D *si la suite* $(S_n(x))_n$ $\left(S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\right)$ *converge uniforemement sur* D.

Theorem 28 *Soit* $(f_n(x))_n$ *une suite de fonction définie sur* $D \subset \mathbb{R}$. *Si*

1. f_n *est continue* $\forall n \in \mathbb{N}$ *sur* D.
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \rightrightarrows f$ *sur* D.

Alors f *est continue sur* D.

Corollary 29 *Si* f_n *est continue* $\forall n \in \mathbb{N}$ *sur* $[a,b]$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \rightrightarrows f$ *alors* f *est continue sur* $[a,b]$.

Example 30 *Etudier la convergence uniforme de la séries* $\sum_{n=0}^{+\infty} x(1-x)^n$ *sur* $[0,1]$.

On a $f_n(0) = f_n(1) = 0$ et si $0 < x < 1$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x(1-x)^k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x(1-x)^k = \lim_{n\to\infty} x \sum_{k=0}^{n} (1-x)^k = x \lim_{n\to\infty} \frac{1-(1-x)^{n+1}}{1-(1-x)} = x\frac{1}{x} =$$

Alors

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x(1-x)^n = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}.$$

Comme $f(x)$ n'est pas continue, donc d'aprés la corollaire 29 la converge n'est pas uniforme.

Definition 31 (Convergence normale) *Soit* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *une série de fonction définie sur* $D \subset \mathbb{R}$*. On dit que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge normalement sur* D *si existe une suite* $(a_n)_n$ *tel que* $|f_n(x)| \leq a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in D$ *et* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$ *est une série numérique convergente.*

Example 32 *Est-ce-que la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{n^3}$ *est converge normalement sur* $D = [1, 2]$*?*

On a $\forall n \in \mathbb{N}$: $\left|\frac{x^2}{n^3}\right| \leq \frac{4}{n^3} = a_n$ $\forall x \in [1, 2]$ et la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{4}{n^3}$ est convergente. Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{x^2}{n^3}$ converge normalement.

Theorem 33 *Si* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ *converge normalement sur* D *alors* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n \rightrightarrows f$ *sur* D*.*

Résumé:

$$\begin{tikzcd} & \text{C.A} & \\ \text{C.N} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \text{C.S} \arrow[ul] \\ & \text{C.U} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Example 34 *Est-ce-que la série* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ *est converge normalement sur* $D = [1, 3]$*?*

On a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+x^2}\right| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2}$, x fixe in $[1, 3]$. Alors $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+x^2}$ diverge cela implique la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ est n'est pas absolument convergente. En déduire $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+x^2}$ n'est pas converge normalement.

3 Séries entières

Definition 35 *On appelle série entière toute série de la forme* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *tel que* $a \in \mathbb{C}$ *et* $z \in \mathbb{C}$.

Example 36

1. $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$. $\{z \in \mathbb{C},\ |z| < 1\} = D(0,1)$

2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n} = \frac{1}{1-z}$, $|z| < 1$. *On pose* $u_n = \frac{z^n}{n} \Longrightarrow \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{z^{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n}{z^n}\right| = \frac{n}{n+1}|z|$. *Alors*

$$\lim \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = |z| \text{ si } |z| < 1 \Longrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n} \text{ converge absolument.}$$

Lemma 37 (ABEL) *Si il existe* $z_0 \in \mathbb{C}$ *tel que* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ *converge absolument. Alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *converge absolument pour tout* z *tel que* $|z| < |z_0|$.

3.1 Rayon de convergence

Theorem 38 *Soit* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *une série entière. Alors il existe un nombre réel* $R \geq 0$ *(éventuellement=*∞*). Si* $|z| < R$ *alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *converge absolument et si* $|z| > R$*, alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *diverge.* R *appellé le rayon de convergence.*

Remark 39

- *Si* $R = 0$*, alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *converge uniquement pour* $z = 0$.
- *Si* $R = +\infty$*, alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *converge por tout* $z \in \mathbb{C}$.
- *Si* R *est fini, alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *converge dans le disque* $D(0,R)$.

3.2 Calcule du rayon de convergence

Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une série entière. Le rayon de convergence est donnée par les de relation suivantes

1. $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.
2. $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|}}$.

Example 40 (2) *Trouver le rayon de convergence de la série suivante*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

On a

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n},$$

donc $R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} e^{-\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e}$.

Example 41 (1) *Etudions la série suivante*

$$1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{2^2} + \frac{z^3}{3^3} + ... + \frac{z^{2n-1}}{3^{2n-1}} + \frac{z^{2n}}{2^{2n}} + ...$$

On a

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2}, & si\ n\ est\ pair \\ \frac{1}{3}, & si\ n\ est\ impair \end{cases},$$

donc $R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sup \sqrt[n]{|a_n|}} = 2$. *D'où, si* $|z| < 2$ *la série converge absolument et si* $|z| > 2$, *la série diverge.*

3.3 Opérations sur les séries entières

Theorem 42 *Soient* $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ *et* $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ *deux séries entières de rayons de convergences* R_a *et* R_b *respectivement.*

- *La série somme* $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n$ *est une série entière de rayon de convergence* $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.
- *La série produit* $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$ *est une série entière de rayon de convergence* $R_c \geq \min(R_a, R_b)$.

3.4 Fonctions développables en séries entières

Definition 43 *Une fonction f, définie sur un intervalle contenant 0, est dite* ***développable en série entière*** *autour de 0 s'il existe un intervalle $]-r, r[$, $r > 0$ et une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ définie sur $]-r, r[$ telle que $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$.*

Proposition 44 *Si est développable en série entière autour de 0, alors $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. Ce développement est dit de* ***Taylor****.*

Theorem 45 *Soit une fonction $C^\infty(]-r, r[)$ vérifiant la condition suivante:*

$$\exists M > 0, \forall n \geq 1, \forall x \in]-r, r[\,; \left| f^{(n)}(x) \right| \leq M.$$

Alors, pour tout $x \in]-r, r[$, la fonction est somme de la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Qui est de rayon de convergence supérieur ou égale à r. S'il existe, un développement en série entière autour de 0, est ***unique****.*

Proposition 46 *Soient deux fonctions développables en séries entière autour de 0; $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$. Alors*

1. *$(f+g)$ est développable en série entière autour de 0, et $(f+g)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$.*
2. *(fg) est développable en série entière autour de 0, et $(fg)(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n\right)$.*
3. *f' est développable en série entière autour de 0, et $f'(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\right)$.*
4. *F, la primitive de f, est développable en série entière autour de 0, et $F(x) = F(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$.*
5. *Si la fonction est paire, alors $a_{2n+1} = 0$, $\forall n \geq 0$.*
6. *Si la fonction est impaire, alors $a_{2n} = 0$, $\forall n \geq 0$.*

Example 47 *$f(x) = e^x$ est $C^{\infty}(\mathbb{R})$, et $\forall n \geq 1$, $(e^x)^{(n)} = e^x$ est majoré sur tout intervalle* $]-r, r[$

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}, \ R = +\infty.$$

chapitre 2:Integrales simples et multipls

1 Rappels sur l'intégral de Riemann:

Soit f une fonction definie et bornée sur intrevalle $[a, b]$.

Subdivise cet intervalle en intervalles égaux de longeur R, soit $i = 1...n$, on appell integral de Riemann $\int\limits_a^b f(x)dx$ la limites de la somme $\sum\limits_{i=1}^{n} Rf(x_i)$ si n tend vers l'infinie i.e,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} Rf(x_i) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Theorem 1 *Si f est continues sur $[a, b]$ alors f est Riemann integrable ($\int\limits_a^b f(x)dx$ existe).*

1) $\int\limits_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx.$

2) $\int\limits_a^b (f_1(x) + f_2(x))\, dx = \int\limits_a^b f_1(x)dx + \int\limits_a^b f_2(x)dx.$

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.\ c \in [a, b]$

4) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$

Primitives:

soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, une application. On dire que l'application $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est la primitive de f si

$$\forall x \in [a, b]\,,\ F^{'}(x) = f(x).$$

On note $F(x)$ par $\int f(x)dx$.

Remarques:

1) la primitive de f n'est pas unique. Pour tout $c \in \mathbb{R}$, $F(x) + c$ est une primitive.

2) Tout fonction continue admet une primitive.

Exemples:
calcules $\int x^\alpha dx$, $(\alpha \neq 1, x > 0)$, $\int \sin x \ dx$, $\int \frac{1}{1-x^2} dx$.
solution:
$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + c.$
$\int \sin x \ dx = \cos x + c.$
$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \arctan x + c.$

2 Calcul les primitives

1) Intégral par partie :

calcules $\int\limits_0^1 x \exp x \ dx$, $\int\limits_0^1 \arctan x \ dx$

2) Chongment de variable: Soit $\varphi \in C^1([a,b])$, $f \in C^1([a,b])$. Alors

$$\int (f \circ \varphi)(u) \varphi^{'}(u) du = \int\limits_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx.$$

Exemple:
calcules $\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$.
Solution:$\varphi = \sqrt{x+1}$ alors $\varphi^2 = x + 1 \Rightarrow x = \varphi^2 - 1$, $dx = 2\varphi d\varphi$,
et on a$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \varphi = 1 \\ x = 3 \Rightarrow \varphi = 2 \end{cases}$
$\int\limits_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int\limits_0^3 \frac{\varphi^2-1}{\varphi} 2\varphi d\varphi = 2 \int\limits_0^3 (\varphi^2 - 1) d\varphi = 2 \left[\frac{1}{3}\varphi^3 - \varphi\right]_0^3 = 15.$

3 Integrales doubles

Definition 2 *Soit D une région borné de $\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)$ une fonction définie et continue sur D on définie l'integrale double de f sur D comme suite:*

$$\iint\limits_{(x,y)\in D} f(x,y) dx dy.$$

Cas particuliére: Si $f(x,y)=1$ alors $\iint\limits_{D} 1dxdy = 1$. $ds = dxdy$ est l'élement de surface en cordonnees cartisiennes de D.

Theorem 3 (Fubini) *Si $f(x,y)$ est une fonction continue sur une région D tell que:*

$$D = \{(x,y) : a \leq x \leq b \text{ et } c \leq y \leq d\}.$$

Alors

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{c}^{d}\int\limits_{a}^{b} f(x,y)dxdy = \int\limits_{a}^{b}\int\limits_{c}^{d} f(x,y)dydx.$$

Corollary 4 *Soit $x \to \varphi$ et $y \to \psi$ deux fonctions continues sur $[a,b]$ avec $\varphi \leq \psi$, notons D l'ensemble des parties $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tell que $0 < a \leq b$ et $\varphi(x) \leq y \leq \psi(x)$. Alors*

$$\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy = \int\limits_{x=a}^{b}\left(\int\limits_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)dy\right)dx$$

Exemple: calculer

1) $\int\limits_{[0,1]^2} \exp(x+y)dxdy$, $D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

2) soit $D = \left\{(x,y) : 0 \leq x \leq y, 1 \leq y \leq x^2\right\}$

i) Répresenter D.

ii) calculer $\iint\limits_{D} (x+y)\text{dxdy}$.

1) On a d'aprés le théorém de Fubini

$$\begin{aligned}
\int\limits_{[0,1]^2} \exp(x+y)dxdy &= \int\limits_0^1\int\limits_0^1 \exp(x+y)dxdy \\
&= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \exp(x)\exp(y)dxdy \\
&= \int\limits_0^1 \exp(x)dx \int\limits_0^1 \exp(y)dy \\
&= \left(\int\limits_0^1 \exp(x)dx\right)^2 \\
&= (e-1)^2
\end{aligned}$$

2) En appliquant le corollaire précedent a f sur D, on aura :

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D f(x,y)dxdy &= \int\limits_1^2 \left(\int\limits_1^{x^2} x+y\ dy\right) dx \\
&= \int\limits_1^2 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_1^{x^2} dx \\
&= \int\limits_1^2 \left(x^3+\frac{x^4}{2}-x-\frac{1}{2}\right) dx \\
&= \left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{10}-\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right]_1^2 \\
&= \frac{97}{20}
\end{aligned}$$

Theorem 5 (chongment de variable) *:Cas des coordonnées cartésienne.*

Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur le domaine D fermé et bornée et φ est une fonction bijection, alors $f\circ\varphi$ est intégrable sur $\varphi^{-1}(D)$, de plus

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\varphi^{-1}(D)=D'} f\circ\varphi(u,v)\,|J_\varphi|\,dudv$$

$$D^{'} = \varphi^{-1}(D) \subset \begin{array}{cccccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \mapsto & \varphi(u,v)=(x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

$f \circ \varphi(u,v) = f(\varphi(u,v)) = f(x,y).$

ou J_φ appelé le Jacobien, $|J_\varphi|$ est le déterminant de la matrice J_φ

$$|J_\varphi| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \times \frac{\partial y}{\partial u}.$$

Exemple:

calculer $\displaystyle\iint_D \left(x^2 - y^2\right) \cos xydxdy$ avec $D = \{(x,y)\ \ 0 \leq x + y \leq 4, xy \geq 1 \text{ et } x \leq y\}$

et

$$\begin{array}{cccccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f'} & & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u - v \\ u + v \end{pmatrix} & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$$

$$\iint_D f(x,y)\, dxdy = \int \int_{\varphi^{-1}(D) = D'} f \circ \varphi\, |J_\varphi|\, dudv$$

1) calculer $\varphi^{-1}(D) = D'$

- $0 \leq x + y \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq u - v + u + v \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq 2u \leq 4 \Longleftrightarrow 0 \leq u \leq 2$
- $xy \geq 1 \Longleftrightarrow (u - v)(u + v) \geq 1 \Longleftrightarrow u^2 - v^2 \geq 1 \Longleftrightarrow v^2 \leq u^2 - 1$ et $u \geq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{u^2 - 1} \leq v \leq \sqrt{u^2 - 1}$ et $u \geq 1$
- $x \leq y \Longleftrightarrow u + v \geq u - v \Longleftrightarrow 2v \geq 0 \Longleftrightarrow v \geq 0.$

ceci implique que $1 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq \sqrt{u^2 - 1} = \varphi^{-1}(D)$
$\varphi^{-1}(D) = D' = \left\{(u,v) : 1 \leq u \leq 2 \text{ et } 0 \leq v \leq \sqrt{u^2 - 1}\right\}.$

2) calculer $\displaystyle\iint_D \left(x^2 - y^2\right) \cos xydxdy.$

$J_\varphi = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, et $|J_\varphi| = 2.$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy &= \int\limits_{\varphi^{-1}(D)=D'}\int f\circ\varphi\,|J_\varphi|\,dudv \\
&= \int\limits_{\varphi^{-1}(D)=D'}\int -4uv\left[\cos\left(u^2-v^2\right)\right]2dudv \\
&= 4\int_0^{\sqrt{u^2-1}}\int_1^2 -2uv\cos\left(u^2-v^2\right)dudv \\
&= 4\int_1^2 u\left[\int_0^{\sqrt{u^2-1}}(-2v)\cos\left(u^2-v^2\right)dv\right]du \\
&= 4\int_1^2 u\left[\sin\left(u^2-v^2\right)\right]_0^{\sqrt{u^2-1}}du = 4\int_1^2\left(u\sin 1-u\sin u^2\right)du \\
&= 4\left[\frac{\sin 1}{2}u^2+\frac{1}{2}\cos u^2\right]_1^2 \\
&= 4\left[\frac{4}{2}\sin 1+\frac{1}{2}\cos 4-\frac{\sin 1}{2}-\frac{1}{2}\cos 1\right] \\
&= 6\sin 1+2\cos 4-2\cos 1.
\end{aligned}$$

Cas des coordonnèes polaires

le changment de variables en coordonnés polaires est donné par (r,θ)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{R}^2\times[0,2\pi] & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
(r,\theta) & \longmapsto & \varphi(r,\theta)=\begin{pmatrix} x \\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta\end{pmatrix} & \longmapsto & f(x,y)
\end{array}$$

et $|J_\varphi| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix} = r$

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy &= \int\limits_{\varphi^{-1}(D)=D'}\int f\circ\varphi(r,\theta)\,|J_\varphi|\,drd\theta \\
&= \int\limits_{\varphi^{-1}(D)=D'}\int f\circ\varphi(r,\theta)\,rdrd\theta.
\end{aligned}$$

calculer $\iint\limits_{D}\exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy$ ou $D=\left\{(x,y): x>0, y>0 \text{ et } x^2+y^2<1\right\}$

- $x^2+y^2<1 \Longleftrightarrow 0<r<1$

- $x > 0 \Longleftrightarrow r\cos\theta > 0 \Longleftrightarrow \cos\theta > 0$
- $y > 0 \Longleftrightarrow r\sin\theta > 0 \Longleftrightarrow \sin\theta > 0$

ceci implique que $0 < r < 1$ et $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ et $|J_\varphi| = r$

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \exp\left(-\left(x^2+y^2\right)\right)dxdy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 r\exp\left(-r^2\right)dr\right)d\theta\int_0^1 r\exp\left(-r^2\right)dr\\ &= \int_0^1 \frac{\exp(-u)}{2}du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{1}{2}\left(\exp(-1)-1\right)d\theta\\ &= -\frac{\pi}{4}\left(\exp(-1)-1\right).\end{aligned}$$

on pose

$$\begin{array}{lcl} r^2 = u & \Longrightarrow 2rdr = du & \Longrightarrow rdr = \frac{1}{2}du \\ r = 0 & \Longrightarrow & u = 0 \\ r = 1 & \Longrightarrow & u = 1 \end{array}$$

on a

$$\begin{aligned}\int_0^1 r\exp\left(-r^2\right)dr &= \int_0^1 \frac{\exp -u}{2}du = -\frac{1}{2}\int_0^1 -\exp(-u)\,du\\ &= -\frac{1}{2}\left[\exp(-u)\right]_0^1 du = -\frac{1}{2}\left(\exp(-1)-1\right).\end{aligned}$$

4 Intégrale Triples

f étant continier par un domaine fermé et borné D de $\mathbb{R}^3$, on definit l'integralle triples de f par D comme suite:

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz.$$

Cas particulières:

si $f(x,y,z) = 1$ alors $\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz$ =volume de D, $dv = dxdydz$ et l'élément de volume de D en coordnnés cartisiennes de D

calcule effectif:

soit f une fonction définie et continue par D, on note Δ la projection orthogonal de D par le plan (oxy)

$$\iiint\limits_D f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_\Delta\left[\int_{z(x,y)}^{z(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dxdy.$$

calculer $\iiint\limits_{D} dxdydz$ avec $D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; x+y+z \leq 1\right\}$
on a comme $x+y+z \leq 1 \Longleftrightarrow 0 \leq z \leq 1-x-y$, $0 \leq y \leq 1-x$ et $0 \leq x \leq x$
$\Delta = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x \geq 0, x+y \leq 1\right\}$. Donc:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\left(\int_{z=0}^{1-x-y} 1dz\right)dydz \\ &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}(1-x-y)\,dydx \\ &= \int_{x=0}^{1}\left[(1-x)\,y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}dx = \int_{x=0}^{1}\frac{1}{2}\left(1-x^2\right)dx = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

changement de variables (cas des coordonnées cartisienne)

Le thèorème est analize ou cas intégrales doubles, soit $f(x,y,z)$ est une fonction continue sur le domaine D fermé et borné et φ est une fonction bijection, alors $f \circ \varphi$ est integrable sur $\varphi^{-1}(D)$

de plus:

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\int\limits_{\varphi^{-1}(D)=D'} f\circ\varphi(u,v,w)\,|J_\varphi|\,dudvdw$$

$$\begin{array}{ccccc} D' = \varphi^{-1}(D) \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (u,v) & \longmapsto & \varphi(u,v)\,w) = (x,y,z) & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array}$$

ou J_φ appelé le Jacobien, $|J_\varphi|$ est le déterminant de la matrice J_φ

$$|J_\varphi| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Cas des coordonnés cylindriques

le changment de variable est donné par l'application:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^+ \times [0,2\pi] \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ (r,\theta,z) & \longmapsto & \varphi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & f(x,y,z) \end{array}$$

Alors,

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\int\limits_{\varphi^{-1}=D'} f\circ\varphi(r,\theta,z)\,drd\theta dz$$

$|J_\varphi| = rdrd\theta dz.$

cas des coordonnés sphériques:

le changment de variable est donné par l'application :

$$\begin{array}{ccc}]0,\infty[\times[0,2\pi[\times[0,\pi[& \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta,\beta) & \longmapsto & (x,y,z)=(r\cos\beta\cos\theta, r\sin\beta\sin\theta, r\sin\beta) \end{array}$$

$|J_\varphi| = r^2 \sin\beta dr d\theta d\beta$

Ex: calculer $\displaystyle\int_{\{x^2+y^2+z^2\leq 4\}} \sin\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}} dxdydz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2} r^2 \sin r^3 \times$ $\sin\beta dr d\theta d\beta$

$= 2\pi\left[\frac{1}{3}\cos r^3\right]_0^2 [\cos\beta]_0^\pi = 4\pi\left[1-\frac{1}{3}\cos 8\right]$