Chapitre 2

Equations différentielles linéaires à valeurs vectorielles et applications

Dans ce chapitre, on va généraliser l'étude d'une équation différentielle à valeurs réelles a une équation différentielle à valeur vectorielle. On énonce un théorème analogue au théorème de Cauchy - Lipschitz, et une application sur les équations différentielles d'ordre supérieur. Nous limiterons l'étude aux équations linéaires et laisserons les équations non linéaires à l'étudiant.

2.1 Notion d'une équation différentielle de premier ordre à valeurs vectorielles

Soit E un espace vectoriel normé sur le corps $\mathbb{R}$, et soit $\mathcal{L}(E)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans E, muni de la norme :

$$\|A\|_{\mathcal{L}(E)} = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$$

.

Rappelons que la notion d'une dérivée d'une fonction f vectorielle définie et dérivable sur un intervalle ouvert $]a, b[$ est la suivante :

$$\forall x \in]a, b[: f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

On a la définition suivante

Définition 2.1 *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}, A : I \to \mathcal{L}(E)$ et $B : I \to E$. Une équation différentielle linéaire de premier ordre, à valeur dans E est une équation sous la forme*

$$Y' = A(x).Y + B(x). \tag{2.1}$$

L'inconnue Y est une fonction vectorielle à valeur dans E.
Toute fonction satisfaisant à cette relation est dite solution de l'équation différentielle.
On appelle équation différentielle associé à l'équation (2.1) *l'équation suivante*

$$Y' = A(x)Y. \tag{2.2}$$

Maintenant, on va donner quelques propriétés de solutions de l'équations (2.1) et (2.2) :

Proposition 2.1 *Si Y_1, Y_2 sont deux solutions de l'équation* (2.1), *alors $Y_2 - Y_1$ est une solution de l'équation* (2.2).

Proposition 2.2 *L'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ de l'équation* (2.2) *forme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, et l'ensemble des solutions de l'équation* (2.1) *forme un espace affine dirigé par $\mathcal{S}$.*

2.2 Théorème d'existence et d'unicité

On considère maintenant le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x).Y(x) + B(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

ou $A : I \to \mathcal{L}(E)$ et $B : I \to E$. sont des applications continues.
On alors le théorème suivant :

Théorème 2.1 *Le problème* (2.3) *admat une solution unique.*

Preuve:
La démonstration est divisé aux étapes suivante :

— **Transformation du problème à une équation intégrale :**
Comme dans lemme 1.1, le problème (2.3) est équivalant à l'équation intégrale suivante :

$$Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} [A(t).Y(t) + B(t)]dt \tag{2.4}$$

— **Existence dans le cas d'un intervalle compact :**
Supposons que $I = [a, a+h]$ $(h > 0)$ est un intervalle compact.
On construit une suite des fonctions (Y_n) vérifiant la relation suivante :

$$\forall x \in [a, a+h] : \begin{cases} Y_0(x) = Y_0, \\ Y_{n+1}(t) = Y_0 + \displaystyle\int_{x_0}^{x} [A(t).Y_n(t) + B(t)]dt \end{cases} \tag{2.5}$$

En remarquant que

$$Y_{n+1}(x) - Y_n(x) = \int_{x_0}^{x} A(t)[Y_n(t) - Y_{n-1})(t)]dt,$$

et que

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [a,b];\ \|Y_{n+1}(x) - Y_n(x)\|_{C([a,a+h],E)} \leq h\|A\|_{\mathcal{L}(E)}.\|Y_n - Y_{n-1}\|_E,$$

Puisque

$$\|Y_1(x) - Y_0(x)\|_E = \|\int_{x_0}^{x} (A.Y_0 + B)(t)\|_E \leq h(\|A\| + \|B\|),$$

on obtient pqr réccurence :

$$\forall n \geq 1,\ \forall x \in [a,b];\ \|Y_{n+1}(x) - Y_n(x)\|_{C([a,a+h],E)} \leq (\|A\|.\|Y_0\| + \|B\|)\frac{(h\|A\|)^n}{n!}.$$

On a alors la convergence de la série numérique

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\|A\| + \|B\|)(h\|A\|)^n,$$

ce qui donne la convergence normale de la série de fonction

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (Y_{n+1}(x) - Y_n(x)),$$

et puisque E est un espace de Banach, En endéduire que cette série est converge uniformément sur $[a, a+h]$. La suite des fonctions $(Y_n(x))$ est aussi converge uniformément, et puisque Y_n sont des fonctions continues, la limite Y est aussi continue, la même chose pour $A(x).Y(x)$, on obtient alors

$$\begin{aligned} Y(x) &= \lim_{n\to+\infty} Y_{n+1}(x) \\ &= \lim_{n\to+\infty} [Y_a + \int_{x_0}^{x} (A.Y_n + B)(t)dt] \\ &= Y_a + \int_{x_0}^{x} \left[\lim_{n\to+\infty} (A.Y_n + B)(t)dt\right] \\ &= Y_a + \int_{x_0}^{x} (A.Y(t) + B(t))dt. \end{aligned}$$

Alors, Y est une solution de l'équation (2.4), donc du problème (2.3).

— **Unicité :**
Soit Y^1, Y^2 deux solutions de (2.4), alors $T = Y^1 - Y^2$ est une solution de l'équation

$$Y(x) = \int_{x_0}^{x} A(t).Y(t)dt \tag{2.6}$$

En utilisant les mêmes arguments que précédemment, on obtient :

$$\forall x \in [a, a+h];\ \|Y_{n+1}(x) - Y_n(x)\|_E \leq h\|A\|\|Y_n - Y_{n-1}\|_E,$$

alors

$$\forall x \in [a, b];\ 0 \leq (1 - h\|A\|)\|Y_{n+1}(x) - Y_n(x)\|_E \leq 0.$$

Alors, $T = 0$, i.e. $Y_1 = Y_2$.

— **Existence dans le cas d'un intervalle quelconque :**
Pour chaque $x \in I$, on choisit un intervalle compact J contient x_0, il existe une solution unique Y_J du problème 2.3 ne dépend pas au choix de J, on le note par Y, on obtient alors une application Y de I dans E, ce qui est la solution unique du problème (2.3).

■

Le théorème suivant montre que l'espace $\mathcal{S}$ des solutions du l'équation homogène (2.2) (proposition 2.1) est isomorphe à l'espace E.

Théorème 2.2 *Pour tout $x_0 \in I$, l'application φ de $\mathcal{S}$ dans E définie par $\varphi(Y) = Y(x_0)$ est isomorphisme.*

Preuve: Il est clair que φ est linéaire, il est bijective d'après théorème 2.1, même aussi l'inverse de φ. ■

Corollaire 2.1 *Si E est de dimension finie n, alors $\mathcal{S}$ est de la même dimension n.*

On va donner maintenant le définition et les résultats suivants pour un espace de dimension finie :

Définition 2.2 *Supposons que E est de dimension finie n, et soit $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ des solutions de l'équation homogène (2.2). On dit que $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ est un système fondamental de l'équation (2.2) si et seulement si $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ sont linéairement indépendant.*

On a les deux propositions suivants :

Proposition 2.3 *Soit $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ des solutions de (2.2). $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ sont linéairement indépendant dans $\mathcal{S}$ si et seulement si leurs valeurs au point $x_0 \in I$ sont linéairement indépendant dans E. Par conséquent, leurs valeurs en chaque point $x \in [a, b]$ sont linéairement indépendant dans E.*

Proposition 2.4 *Soit Y_p une solution particulière de l'équation (2.1), et soit $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ un système fondamental de l'quation homogène associée (2.2). Toute solution Y de l'équation (2.1) est écrit comme suivant :*

$$Y = Y_p + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . Y_k, \ (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}).$$

2.3 Application aux équations différentielles linéaires d'ordre supérieur

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre n suivante :

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)} = f(x), \tag{2.7}$$

ou $f(x), a_k(x)\,(0 \leq a_k \leq n-1)$ sont des fonctions continues définies sur I.

On associe l'équation (2.7) l'équation suivante

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(x) y^{(k)} = 0. \tag{2.8}$$

Le théorème suivant nous a permis d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution d'équation (2.7), par donnant des conditions initiales sur les dérivées successives $y^{(k)}$ au point x_0.

Théorème 2.3 *L'équation (2.7) admet une solution unique satisfaisant les conditions suivants :*

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(k)}(x_0) = y_k, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

Preuve: L'idée du preuve est de transformer l'équation (2.7) à une équation différentielle vectorielle de type (2.1), pour cela on pose

$$y^1 = y \quad y^2 = y' \quad \cdots \quad y^k = y^{(k-1)} \quad \cdots \quad y^n = y^{(n-1)}. \tag{2.9}$$

On peut alors écrire

$$y'^1 = y^2 \quad y'^2 = y^3 \quad \cdots \quad y'^k = y^{k+1} \quad \cdots \quad y'^{n-1} = y^n. \tag{2.10}$$

On pose $Y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$, et $Y' = (y'^1, y'^2, \cdots, y'^n)$, on obtient

$$Y' = (y^2, y^3, \cdots, y^{(n)}) = (y_2, y_3, \cdots, f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x) y^k),$$

ce qui donne

$$\begin{cases} Y'(x) = A(x).Y(x) + B(x) \\ Y(x_0) = Y_0 \end{cases}, \tag{2.11}$$

ou $A(x)$ est une matrice continue carré $n \times n$ définie par

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix},$$

et $B(x)$ est une fonction vectorielle continue définie par : $B(x) = (0, 0, \cdots, f(x))$.
Si on pose $E = (C[a,b], \mathbb{R})^n$, l'existence et l'unicité sont assuré d'après théorème 2.3. ∎

La proposition suivante devient immédiatement du corollaire 2.1 :

Proposition 2.5 *Soit $u_1, u_2, \cdots, u_n$ n solutions de de l'équation homogène (2.8). Alors, $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est un système fondamental de (2.8) si et seulement si le système :*

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

est linéairement indépendant.

Remarque 2.1 *Le système $(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ est un système fondamental de l'équatio (2.8) si et seulement si $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)(x) \neq 0$,*
ou $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)(x)$ est le Woronskian donné par

$$W(u_1, u_2, \cdots, u_n)(x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_2(x) & \cdots & u_n(x) \\ u_1'(x) & u_2'(x) & \cdots & u_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_1^{(n-1)}(x) & u_2^{(n-1)}(x) & \cdots & u_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}. \tag{2.12}$$

Remarque 2.2 *Par conséquent la proposition 2.3, $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)(x) \neq 0$ si et seulement s'il existe $x_0 \in I$ tel que $W(u_1, u_2, \cdots, u_n)(x_0) \neq 0$.*

2.4 Équation différentielle linéaire à coefficients constants

Dans cette section, nous présentons une méthode directe pour résoudre une équation différentielle à coefficients constantes :

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0, \tag{2.13}$$

ou a_k sont des constants réels.

Définition 2.3 *On appelle le polynôme caractéristique associé à l'équation* (2.13) *le polynôme défini par :*

$$P_n(\lambda) = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k.$$

Le théorème suivant donne une relation entre une racine du polynôme P_n et une solution de l'équation (2.13).

Théorème 2.4 *Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une racine de P_n, alors, $\varphi_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ est une solution de l'équation* (2.13).

Preuve: Soit $k = 1 \ldots n$. Alors $\varphi'_\lambda(x) = \lambda \varphi_\lambda(x)$.
Par récurrence, nous obtenons $\varphi_\lambda^{(k)}(x) = \lambda^k \varphi_\lambda(x)$.
En appliquant ce résultat à l'équation (2.13), on obtient :

$$\varphi_\lambda^{(n)}(x) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \varphi_\lambda^{(k\alpha)}(x) = \left(\lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \lambda^k\right) \varphi_\lambda(x) = 0.$$

■

La proposition suivante devient immédiatement des propriétés de la fonction exponentielle :

Proposition 2.6 *Soit $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ deux racines distinctes de P_n, alors $\varphi_{\lambda_1}, \varphi_{\lambda_2}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation* (2.13).

Remarque 2.3 *Si $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$ ($\theta \in]0, 2\pi[$) est une racine de P_n, alors $\dfrac{\varphi_\lambda + \varphi_{\overline{\lambda}}}{2}, \dfrac{\varphi_\lambda - \varphi_{\overline{\lambda}}}{2i}$ sont deux solutions réelles linéairement indépendantes du équation (2.13).*
En effet, puisque les coefficients a_k sont des coefficients réels, $\overline{\lambda}$ est une racine de P_n, donc φ_λ et $\varphi_{\overline{\lambda}}$ sont deux solutions de (2.13). D'ou le résultat.

Exemple 2.1 *Considérons l'équation suivante :*

$$y'' + 2y' - 3y = 0. \tag{2.14}$$

Le polynôme caractéristique associé à l'équation (2.14) est

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 3.$$

$P(\lambda)$ a deux racines distinctes -3 et 1. D'où l'équation (2.14) a deux solutions linéairement indépendantes :

$$\varphi_1(x) = e^{-3x} \qquad \varphi_2(x) = e^x$$

Si φ est une solution de l'équation (2.14), alors

$$\varphi(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.2 *Considérons l'équation suivante :*

$$y'' + y = 0. \tag{2.15}$$

Le polynôme caractéristique associé à l'équation (2.15) *est*

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 1.$$

$P(\lambda)$ a deux racines distinctes $-i$ et i. D'où l'équation (2.15) *a deux solutions linéairement indépendantes :*

$$\varphi_1(x) = e^{ix} \qquad \varphi_2(x) = e^{-ix}$$

On pose

$$\psi_1(x) = \frac{\varphi_1(x) + \varphi_2(x)}{2} = \cos x, \qquad \psi_2(x) = \frac{\varphi_2(x) - \varphi_1(x)}{2i} = \sin x.$$

Si φ est une solution de l'équation (2.15)*, alors*

$$\varphi(x) = C_1 \cos c + C_2 \sin x,\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.3 *Considérons l'équation suivante :*

$$y'' - 2ry' + r^2 y = 0. \tag{2.16}$$

Le polynôme caractéristique associé à l'équation (2.14) *est*

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2r\lambda + r^2.$$

$P(\lambda)$ a une solution double r. Alors la fonction $\varphi_1(x) = e^{rx}$ est une solution de l'équation (2.16).
On peut vérifier que la fonction $\varphi_2(x) = xe^{rx}$ est une solution de l'équation (2.16)*, linéairement indépendante à φ_1.*
En effet
$\varphi_2'(x) = (rx+1)e^{rx}$ *et* $\varphi_2''(x) = (r^2x + 2r)e^{rx}$. *Alors :*
$\varphi_2''(x) - 2r\varphi_2'(x) + r^2\varphi_2(x) = (r^2x+2r)e^{rx} - 2r(rx+1)e^{rx} + r^2xe^{rx} = 0.$
Donc : φ_2 est une solution de l'équation (2.16).

$$W(\varphi_1, \varphi_2)(x) \quad = \quad \begin{vmatrix} e^{rx} & xe^{rx} \\ re^{rx} & (rx+1)e^{rx} \end{vmatrix} = 2e^{rx} \neq 0.$$

Donc, φ_1, φ_1 sont linéairement indépendants.
Si φ est une solution de l'équation (2.16)*, alors*

$$\varphi(x) = (C_1 + C_2 x)e^{rx}, \; C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Exemple 2.4 *Considérons l'équation suivante :*

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0. \tag{2.17}$$

Le polynôme caractéristique associé à l'équation (2.17) *est*

$$P(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2.$$

$P(\lambda)$ a trois racines distinctes $-1, 1$ et 2. D'où l'équation (2.17) *a trois solutions linéairement indépendantes :*

$$\varphi_1(x) = e^{-x} \qquad \varphi_2(x) = e^{x} \qquad \varphi_2(x) = e^{2x}$$

Si φ est une solution de l'équation (2.16)*, alors*

$$\varphi(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{2x}, \; C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$$