

## II- Formulation de la statistique quantique

### 1. Rappel des notions fondamentales de la mécanique classique

Soit un système de ( $N$  points matériels) qui se déplace selon la loi de mécanique classique. L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial q_k} = 0, k = 1, 2, \dots, s \quad s : \text{est le degré de liberté du système.}$$

$$\mathfrak{L} = T - U$$

$\mathfrak{L}$ : fonction de Lagrange,  $T$ : énergie cinétique,  $U$ : énergie potentiel.

L'équation d'hamiltonien :

$$q_k = \frac{\partial H}{\partial p_k} \quad q = 1, 2, \dots, s$$

$$p_k = - \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_k}$$

$$\text{avec } H = \sum_k p_k \dot{q}_k - \mathfrak{L}, p_k = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \dot{q}_k}, \dot{q}_k = \frac{dq_k}{dt}$$

Pour déterminer l'état du système, il faut  $2s$  coordonnées généralisées ( $sq_k, sp_k$ ). Un état de ce système est représenté par un point dans cet espace qui est appelé espace de phase.

#### a. Description statistique du système mécanique

Pour décrire l'état du système on utilise quelques paramètres macroscopiques qu'on peut mesurer expérimentalement. Chaque paramètre correspond à plusieurs états macroscopiques (l'énergie, l'entropie, pression, ...).

#### b. Densité de probabilité

On désigne par  $\rho(p, q)$  la densité de probabilité du système. La probabilité pour que notre système se trouve dans un volume quelconque dans l'espace de phase est :

$$W_{V_1} = \int_{V_1} \rho(X) dX = \int \rho(p, q) dp dq, \rho(p, q) = \rho(x_1, x_2, \dots, x_{6N}, t)$$

$$dX = dx_1 dx_2 \dots dx_{6N}$$

$$\text{avec } \int_V \rho(X) dX = \int \rho(p, q) dp dq = 1$$

#### c. La valeur moyenne

$$\bar{A} = \int \rho(X) A(X) dX$$

#### d. Ecart quadratique

$$\Delta A = \sqrt{(A - \bar{A})^2}$$

### 2. Les postulats principaux de la physique statistique

La physique statistique est construite à partir de postulats. Ce sont des hypothèses raisonnables choisies à priori.

#### a) Postulat 1

Tous les micro états accessibles à un système isolé en équilibre sont équiprobables. Si  $\Omega(E)$  est le nombre de micro états accessibles à un système isolé en équilibre, la probabilité pour qu'il soit dans un micro état donné est égale à  $\frac{1}{\Omega(E)}$ . Si ce n'est pas le cas, le système est hors équilibre et il va évoluer de manière à satisfaire au postulat d'équiprobabilité.

### b) Postulat 2

La moyenne dans le temps d'un paramètre quelconque est égale à la moyenne de ce paramètre prise sur un ensemble de ce système. La moyenne dans le temps de la grandeur  $y$  est définie par :

$$\langle y \rangle_t = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(t') dt'$$

Considérons à présent un ensemble  $\{\mathcal{E}\}$  de  $N$  systèmes au temps  $t$ . La moyenne de la variable  $y$ , prise sur l'ensemble  $\{\mathcal{E}\}$ , est égale à :

$$\langle y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_i(t)$$

Où  $y_i(t)$  est la valeur de  $y(t)$  pour le système  $i$  appartenant à l'ensemble  $\{\mathcal{E}\}$ .

## 2.1- Modèle quantique de la matière

A basse température, la statistique classique devient non valable, l'énergie  $E$  en mécanique classique est continu, alors que l'expérience montre que  $E$  est discrète.  $(\vec{r}, \vec{p}, E, \dots)$  deviennent des opérateurs  $(\hat{r}, \hat{p}, \hat{H}, \dots)$ . La solution de l'équation de Shrodinger, nous donne l'énergie et la fonction d'onde.

$$\begin{aligned} \hat{H}|\Psi\rangle &= E_k|\Psi\rangle \\ \hat{H}(p, q) &= \sum_{k=1}^N \frac{p_k^2}{2m} + \hat{U}(q_k) \\ \hat{H}\Psi(q, t) &= E_k\Psi(q, t) \end{aligned}$$

$\hat{H}$  : est l'opérateur d'hamiltonien.

$|\Psi|^2$  : la densité probabilité, et la somme des probabilités de toutes les valeurs possibles des coordonnées du système doit, par définition, être égale à l'unité.  $\int |\Psi|^2 dq = 1$ .

-Si  $\Psi$  correspond à un seul valeur de  $E_k$ , on dit qu'il y a pas de dégénérescence.

-Si  $\Psi$  correspond à plusieurs valeurs de  $E_k$ , on dit qu'il y a de dégénérescence appelé  $g_k$ . ( $g_k$  : ordre de dégénérescence).

Soit  $\varphi_n(q)$  un ensemble complet de fonctions orthonormées, c'est-à-dire :

$$\int \varphi_m(q)\varphi_n(q) dq = \delta_{nm}$$

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, si, n=m \\ 0, si, n \neq m \end{cases}$$

$\delta_{nm}$  :le symbole de Kronecker.

On peut développer la fonction  $\Psi$  sur la base formé par les fonctions  $\varphi_n$  :

$$\Psi(q,t) = \sum_n C_n(t)\varphi_n(q)$$

La valeur moyenne au sens de la mécanique quantique d'une grandeur physique  $\mathfrak{S}$  représenté par un opérateur (qui sera désigné par même lettre dans l'état  $\Psi$ ) est :

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{S} \rangle &= \int \Psi^* \mathfrak{S} \Psi dq \\ \langle \mathfrak{S} \rangle &= \sum_{n,m} C_m^*(t) C_n(t) \int \varphi_m^* \mathfrak{S} \varphi_n dq \\ &= \sum_{n,m} C_m^*(t) C_n(t) \mathfrak{S}_{mn} \end{aligned}$$

Où  $\mathfrak{S}_{mn}$  est l'élément de matrice de l'opérateur  $\mathfrak{S}$  entre les états  $\varphi_m$  et  $\varphi_n$ . Il est clair que la connaissance des  $\mathfrak{S}_{mn}$  et de la matrice d'élément  $C_m^*(t)C_n(t)$  suffit pour déterminer  $\langle \mathfrak{S} \rangle$ .

Pour avoir l'expression moyenne de  $\mathfrak{S}$  pour un système formé d'un grand nombre de particules, on effectue, en plus de la moyenne quantique, une moyenne sur l'ensemble.

$$\langle \bar{\mathfrak{S}} \rangle = \sum_{n,m} \overline{C_m^*(t)C_n(t)} \mathfrak{S}_{mn}$$

Où le signe  $\bar{\quad}$  désigne une moyenne effectuée sur l'ensemble. Si on pose  $\rho_{mn} = \overline{C_m^*(t)C_n(t)}$ , la moyenne de  $\mathfrak{S}$  s'écrit :

$$\langle \bar{\mathfrak{S}} \rangle = \sum_{m,n} \rho_{nm} \mathfrak{S}_{mn} = Tr(\rho \mathfrak{S}), \text{ où } Tr \text{ désigne la trace.}$$

On a  $Tr \rho = 1$ , car  $\Psi$  doit être normé à 1. Signalons encore que la matrice densité  $\rho(q, q')$  est liée à la matrice  $\rho_{mn}$  par :  $\rho(q, q') = \sum_{n,m} \rho_{mn} \Psi_n^*(q') \Psi_m(q)$ .

## 2.2- La matrice de densité

### a) Ensemble micro canonique

La forme explicite de la densité de probabilité  $\rho(E)$  dépend de la nature du système que l'on décrit. Considérons tout d'abord un système isolé. Son énergie interne  $E$  est déterminée avec une incertitude de  $\delta E$  :  $E_0 \leq E \leq E_0 + \delta E$ . On décrit un système isolé par une densité de probabilité, constant dans la couche de l'espace des phases et nulle en dehors de celle-ci ( $E_0, E_0 + \delta E$ ) :

$$\begin{aligned} \rho(A) &= A, E_0 \leq E \leq E_0 + \delta E \\ &= 0, \text{ autrement.} \end{aligned}$$

On peut l'écrire :  $\rho = A \delta(E - E_0)$ ,  $\delta$  : la distribution de Dirac.

### b) Ensemble canonique

L'ensemble canonique est défini en se donnant une matrice de densité  $\rho$  sous forme

$$\text{d'opérateur, } \rho = \exp[\beta(F - H)] = A \exp(-\beta H), \beta = \frac{1}{K_B T}$$

$F$  : l'énergie libre,  $F = U - TS$ ,  $F$  : est une fonction.

$H$  : L'opérateur d'Hamiltonien.

La condition de normalisation  $Tr \rho = 1$ , s'écrit :

$$\text{Tr}[\exp \beta(F - H)] = 1$$

$$\text{Tr}[\exp(\beta F)] \text{Tr}[\exp(-\beta H)] = 1$$

$$\exp(\beta F) \cdot \text{Tr}[\exp(-\beta H)] = 1$$

$$\exp(-\beta F) = \text{Tr}[\exp(-\beta H)]$$

Dans la base  $\Psi_k$  des fonctions propres de l'hamiltonien,  $\exp(-\beta H)$  est diagonal.

$$\exp(-\beta H) = 1 - \frac{\beta H}{1!} + \dots + \frac{\beta^n H^n}{n!} + \dots; \exp(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{n!}. \text{ D'où :}$$

$$\exp(-\beta F) = \sum_k \exp(-\beta E_k), \text{ si les } E_k \text{ ne sont pas dégénérées.}$$

$$\text{Et } \exp(-\beta F) = \sum_k g_k \exp(-\beta E_k), \text{ si les } E_k \text{ sont dégénérées.}$$

On introduit la fonction de partition  $Z$  par :

$$Z = \sum_k g_k \exp(-\beta E_k), \text{ on obtient :}$$

$$\exp(-\beta F) = Z, \text{ soit : } F = -\frac{1}{\beta} \log Z.$$

### c) Ensemble grand canonique

Considérons un système constitué d'un grand nombre de particules non fixées. Soit  $\hat{H}(N)$

l'opérateur hamiltonien du système formé de  $N$  particules. Soit  $\hat{N}$  l'opérateur nombre de particules du système, et  $\Psi_k(N)$  les fonctions propres de l'hamiltonien.

$$H\Psi_k(N) = E_k(N)\Psi_k(N)$$

$$E_k = \sum_l n_l \varepsilon_l$$

$$n_0 \rightarrow \varepsilon_0$$

$$n_1 \rightarrow \varepsilon_1$$

$$n_2 \rightarrow \varepsilon_2$$

.

.

.

$$\hat{N} \Psi_k(N) = N \Psi_k(N)$$

représentation de nombre d'occupation :

$$\hat{N} = \sum_l n_l$$

$\Psi_k(N)$  représente un état du système contient  $N$  particules, de l'énergie  $E_k(N)$ .

L'ensemble grand canonique sera représenté par un opérateur densité  $\rho$  par :

$$\rho = \exp[\beta(\Psi + \mu N - H)]$$

avec  $\Psi$  : grand potentiel,  $\mu$  : le potentiel chimique.

On peut généraliser l'ensemble grand canonique pour décrire un système formé de particules de type 1,2,...,r.

$$\rho = \exp \left[ \beta \left( \Psi + \sum_i N^{(i)} \mu_i - H \right) \right]$$

La valeur moyenne de la grandeur  $\mathfrak{S}$  dans l'ensemble grand canonique sera :

$\langle \mathfrak{S} \rangle = Tr(\rho \mathfrak{S})$ . On a :

$$\rho \Psi_k(N) = \exp[\beta(\Psi + \mu N - E_k(N))]$$

L'élément de matrice  $\rho_{K,N,K',N'}$  est définie par :

$$\rho_{K,N,K',N'} = \int \Psi_K^*(N) \Psi_{K'}(N) dq_N,$$

Où  $q_N$  est l'ensemble des coordonnées de  $N$  particules.

$$\rho_{K,N,K',N'} = \exp[\beta(\Psi + \mu N - E_k(N))] \delta_{KK'} \delta_{NN'}$$

L'opérateur  $\rho$  est diagonal dans la base  $\Psi_K(N)$ . La condition de normalisation de  $\rho$  s'écrit :

$$Tr \rho = 1$$

$$\sum_{N,K} \exp[\beta(\Psi + \mu N - E_k(N))] = 1$$

$$\exp(\beta\Psi) \cdot \sum_{K,N} \exp[\beta(\mu N - E_k(N))] = 1$$

$$\exp(-\beta\Psi) = \sum_{K,N} [\beta(\mu N - E_k(N))] = \Xi$$

$\Xi$  : la fonction de partition de grand système canonique.

$$\Psi = -\frac{1}{\beta} \log \Xi = -K_B T \log \Xi$$

$$\Xi = \sum_{K,N} \exp[\beta(\mu N - E_k(N))]$$

Comme les particules sont supposées être sans interaction, on a :

$$E_k(N) = \sum_i n_i \varepsilon_i, \text{ et } N = \sum_i n_i.$$

avec  $k = \{n_1, n_2, \dots, n_i, \dots\}$  un état quantique à  $N$  particules est donc déterminé par la donnée de  $\{n_1, \dots, n_i, \dots\}$  de somme  $N$ .

$$\Xi = \sum_{\{n_i\}} \exp \left[ \sum_i \beta(\mu n_i - n_i \varepsilon_i) \right]$$

Où nous avons remplacé  $N$  par son expression, en fonction de  $n_i$  : la somme entre parenthèse porte sur tous les micro états à une particule. Ceux-ci sont numérotés de zéro à l'infini. La seconde sommation porte sur tous les ensembles  $\{n_i\}$  des nombres d'occupations.

L'exponentiel de l'équation peut aussi s'écrire :

$$\exp \left[ \beta \sum_i (\mu n_i - n_i \varepsilon_i) \right] = \prod_i \exp[\beta(\mu n_i - n_i \varepsilon_i)]; \text{ d'où :}$$

$$\Xi = \sum_{\{n_i\}} \prod_i \exp[\beta(\mu n_i - \varepsilon_i n_i)] = \prod_{i=1}^N \xi_i = \xi_i^N$$

avec  $\xi_i = \sum_{\{n\}} \exp[\beta(\mu n_i - \varepsilon_i n_i)]$ , ce qui conduit à :

$$\log \Xi = \sum_i \log \xi_i, \text{ et nous permet de calculer le grand potentiel } \Psi :$$

$$\Psi = -K_B T \log \Xi = -K_B T \sum_i \log \xi_i = -\sum_i \Psi_i$$

Où  $\Psi_i$  est le grand potentiel associé au micro état  $i$ . Le nombre d'occupation moyen du niveau micro état est donné par l'équation :

$$\bar{n}_i = \langle n \rangle = - \frac{\partial \Psi_i}{\partial \mu} = K_B T \frac{\partial \ln \xi_i}{\partial \mu}$$

L'équation au dessus est valable si les particules sont identiques mais discernables sans interaction.

Si, les particules sont indiscernables : la probabilité d'occupation d'un niveau à une particule est faible, ce qui implique une réduction d'un facteur à  $N!$ .

### 3. Système de particules indiscernables

#### Introduction à la méthode de second quantification

##### a) Espace de fock

C'est l'espace de Hilbert  $\mathcal{E}_H$  formé par une somme directe des espaces de Hilbert :

$\mathcal{E}_H^{(0)}, \mathcal{E}_H^{(1)}, \dots, \mathcal{E}_H^{(N)}$ , à  $0, 1, \dots, N$  particules indiscernables, bosons ou fermions.

- fermions : particules antisymétriques de spin demi entier.
- Bosons : particules symétriques de spin entier.

Nous choisissons pour base de l'espace  $\mathcal{E}_H^{(1)}$  l'ensemble de vecteurs propres d'hamiltonien à un corps  $H^{(1)}$ .

Les états de base  $q$  et les valeurs propres correspondantes  $\varepsilon_q$  s'obtiennent en résolvant l'équation de Schrödinger.

Passons aux états à deux particules, formant l'espace de Hilbert  $\mathcal{E}_H^{(2)}$ , pour des particules sans interaction, l'hamiltonien à la forme :

$$H^{(2)} = H_1^{(1)} + H_2^{(1)}$$

Où les deux termes se réfèrent séparément à chacune des particules 1 et 2. Si on ne tient pas compte de l'indiscernabilité, les fonctions propres de  $H^{(2)}$  s'obtiennent simplement comme un produit de deux fonctions,  $q(1)$  pour la particule 1 et  $q'(2)$  pour la particule 2, et leurs énergies vaut  $\varepsilon_q + \varepsilon_{q'}$ .

Cependant pour des fermions, l'espace de Hilbert  $\mathcal{E}_H^{(1)}$  est celui des fonctions antisymétriques.

$$\Phi^F = \frac{1}{\sqrt{2}} [q(1)q'(2) - q(2)q'(1)]$$

Pour des bosons, les fonctions de  $\mathcal{E}_H^{(2)}$  doivent être symétriques.

$$\Phi^B = \frac{1}{\sqrt{2}} [q(1)q'(2) + q(2)q'(1)]$$

Ce raisonnement s'étend facilement à des états à  $N$  particules.

Donc nous avons construit, à partir de la base des états  $q$  à une particule de l'espace de Hilbert  $\mathcal{E}_H^{(1)}$ , une base complète d'états de l'espace de Fock à un nombre quelconque de particules.

$$\mathcal{E}_H = \mathcal{E}_H^{(0)} \oplus \mathcal{E}_H^{(1)} \oplus \mathcal{E}_H^{(2)} \oplus \dots$$

dans les deux cas où les fonctions d'ondes doivent être antisymétriques (fermions) ou symétriques (bosons). Chaque état de cette base, noté :  $|n_1, n_2, \dots, n_q, \dots\rangle$ , est caractérisé par la donnée des nombres quantiques  $n_q$ , dont chacun peut prendre les valeurs 0,1 pour les fermions, ou 0,1,2,... $\infty$  pour les bosons.

Cette base porte le nom de base de Fock associé à la base  $q$  des états à une particule.

La construction de la base de Fock à partir de l'espace des états à une particule s'appelle 'la seconde quantification'.

### 3.2- Statistique de Fermi Dirac

La fonction de partition s'écrit :

$$\Xi = \prod_i \xi_i \text{ avec } \xi_i = \sum_{\{n_i\}} \exp[\beta(\mu n_i - \varepsilon_i n_i)]$$

Pour les fermions  $n_i = 0,1$ , d'où :

$$\xi_i = 1 + \exp \beta(\mu - \varepsilon_i)$$

Le nombre d'occupation moyen du micro état est :

$$\bar{n}_i = \langle n_i \rangle = - \frac{\partial \Psi_i}{\partial \mu} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \xi_i}{\partial \mu}$$

$$n_i^{FD} = \frac{1}{\beta} \frac{\beta e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}}{1 + e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} + 1}$$

Pour les fermions  $\mu$  peut être positif, négatif ou nul.

### 3.3- Statistique de Bose Einstein

$$\text{On a : } \xi_i = \sum_{\{n_i\}} e^{\beta(\mu n_i - \varepsilon_i n_i)}$$

Pour les bosons  $n_i = 0,1,\dots,\infty$

$$\xi_i = \sum_{n_i=0}^{\infty} e^{\beta(\mu n_i - \varepsilon_i n_i)}$$

C'est une série géométrique de raison  $e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)} < 1$  dont le premier terme est égal à 1.

Le résultat vaut :  $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-an} = \frac{1}{1 - e^{-a}}$ , d'où :

$$\xi_i = \frac{1}{1 - e^{-\beta(\mu - \varepsilon_i)}}$$

Le nombre d'occupation moyen du micro état  $i$  vaut :

$$\bar{n}_i = \frac{1}{\beta} \frac{\partial \ln \xi_i}{\partial \mu}, \ln \xi_i = -\ln(1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)})$$

$$\bar{n}_i = \frac{\beta e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}}{\beta [1 - e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}]}$$

$$\bar{n}_i^{BE} = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} - 1}$$

Cette série converge si  $\exp \beta(\mu - \varepsilon_i) < 1$ , donc,  $\mu \leq 0$  pour les bosons.

### 3.4- Limite classique

La limite classique s'obtient quand  $\langle n_i \rangle \ll 1$ , ce qui impose que les facteur exponentiels présents dans les formules de Fermi Dirac ou de Bose Einstein soient grand devant 1, quelque soit  $\varepsilon_i$ .

$e^{\beta(\varepsilon_i - \mu)} \gg 1$ , cette formule est vraie aussi pour  $\varepsilon_i = 0$  (l'énergie fondamentale),  $e^{-\beta\mu} \gg 1$ , ou  $\beta\mu \leq 0$ .

Dans la limite classique, les deux statistiques (Fermi Dirac et de Bose Einstein) tendent toutes les deux vers la statistique de Maxwell Boltzmann.

$$\langle n_i \rangle = e^{-\beta(\varepsilon_i - \mu)} = e^{\beta(\mu - \varepsilon_i)}$$

$$\langle n_i \rangle = e^{\beta\mu} e^{-\beta\varepsilon_i} = \frac{N}{Z} e^{-\beta\varepsilon_i}$$

### 3.5- Système de particules libres

Considérons un système constitué de  $N$  particules continues dans un volume  $V$ . L'énergie du système est exclusivement sous forme cinétique ;

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}; \text{ ou } m : \text{ la masse des particules du gaz et } p_i : \text{ l'impulsion de la particule } i. \text{ Le}$$

nombre  $\Omega$  de micro états accessibles au système, dont l'énergie est comprise entre  $E_0$  et  $E_0 + \delta E$ , est égal au volume de l'espace de phase auquel peut avoir accès, divisé par le

$$\text{volume de la cellule élémentaire qui vaut } h^{3N}. \quad \Omega = \frac{1}{h^{3N}} \int \dots \int d^{3N} q d^{3N} p.$$

L'intégrale est de dimension  $6N$ .

$$\Omega = \left[ \frac{1}{h^3} \int d^3 q d^3 p \right]^N = \left[ \int \int g(p) dp \right]^N$$

$$\text{Où } g(p) dp : \text{ la densité d'état. } g(p) dp = \frac{V}{h^3} 4\pi p^2 dp.$$

#### a) La fonction de partition

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N! h^{3N}} \int \dots \int \exp\left(-\beta \frac{\sum p_i^2}{2m}\right) d\vec{r}_i d\vec{p}_i \\ &= \frac{1}{N! h^{3N}} \prod_{i=1}^N \int \exp\left(-\beta \frac{p_i^2}{2m}\right) d\vec{r}_i d\vec{p}_i \\ &= \frac{1}{N! h^{3N}} \left[ \int \exp\left(-\beta \frac{p_i^2}{2m}\right) d\vec{r}_i d\vec{p}_i \right]^N \\ &= \frac{V^N}{N! h^{3N}} \left[ \int \exp\left(-\beta \frac{p_i^2}{2m}\right) d\vec{p}_i \right]^N \\ &= \frac{V^N}{N! h^{3N}} (4\pi)^N \left[ \int_0^\infty \exp\left(-\beta \frac{p_i^2}{2m}\right) p_i^2 dp_i \right]^N \end{aligned}$$

On utilise l'intégral :  $\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \alpha^{-\frac{3}{2}}$ , on pose :  $\alpha = \frac{\beta}{2m}$ , d'où :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{V^N (4\pi)^N}{N! h^{3N}} \left[ \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{\beta}{2m}\right)^{-\frac{3}{2}} \right]^N \\ &= \frac{1}{N!} \left[ \frac{V}{h^3} \left(\frac{2\pi m}{\beta}\right)^{\frac{3}{2}} \right]^N \end{aligned}$$