

V- Étude des systèmes quantiques hors équilibre

La notion de système hors équilibre fait toujours intervenir une interaction avec le milieu extérieur. Lorsque cette interaction cesse, le système évolue vers une situation d'équilibre. Le temps nécessaire pour atteindre cet équilibre s'appelle le temps de relaxation du système.

Il existe deux types d'approches des phénomènes hors équilibre, l'une macroscopique (la thermodynamique des systèmes hors équilibre), l'autre microscopique (la physique statistique hors équilibre). Un gaz dilué en représente une bonne approximation.

On s'intéresse à l'équation de Boltzmann qui consiste une excellente introduction aux équations cinétiques. Ces dernières font le lien entre les propriétés des particules et les grandeurs macroscopiques qui résultent souvent de mouvements collectifs.

Collisions et section efficace

a) Libre parcours moyen

C'est la distance moyenne entre deux collisions. Il est défini par :

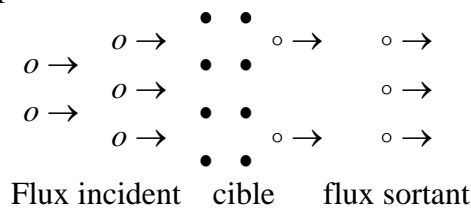
$$l = \langle v \rangle \bar{t} \quad (1)$$

Où $\langle v \rangle$ est la vitesse des particules. \bar{t} : le temps moyen entre deux collisions.

Le libre parcours moyen des molécules d'un gaz dans les conditions normales de température et de pression varie de $0.1 \mu m$ à $1 \mu m$.

b) Section efficace

Considérons un flux de particules arrivent sur un ensemble de particules au repos (cible).



Le flux Φ est un nombre de particules par unité de surface et par unité de temps.

Le flux sortant nous permet de calculer le nombre n de particules qu'ont eu une interaction.

$$n = \sigma N \Phi \quad (2)$$

Où σ est la section efficace d'interaction qui a la dimension d'une surface.

Le rapport $n / \Phi = \sigma N$, qui est sans dimension, représente la probabilité d'interaction par unité de surface entre le projectile et la cible.

Il peut y avoir plusieurs types d'interaction lors du bombardement d'une cible par un faisceau de particules : la section efficace totale est la somme des sections efficaces de tous les processus ($\sigma = \sum_i \sigma_i$).

Nous allons généraliser la définition de la section efficace : soit dn le nombre de particules par unité de surface et de temps qui sont défléchis lors de l'interaction selon une direction dans l'espace.

$$dn = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right) N \Phi d\Omega \quad (3)$$

$d\Omega$: un élément d'angle solide.

La quantité $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ s'appelle la section différentielle de la réaction. D'où :

$$\sigma = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \sin \theta \quad (4)$$

2- L'approximation de champ moyen

Lorsque on veut traiter un ensemble de particules en interaction (problème dit à N corps), on utilise souvent l'approximation de champ moyen.

Les particules sont considérées comme indépendantes. Chacun d'entre elles évolue dans le champ moyen créée par les autres. Le potentiel moyen ne dépend que de la position r et non des coordonnées de chacune des particules. Le problème à N corps est ramené à N problèmes à 1 corps.

2.1- La fonction de distribution à un corps

Pour décrire complètement un système de particules indépendantes, il suffit de connaître la fonction de distribution $f_p(r, p, t)$ dans l'espace de phase. $f_p(r, p, t) d\vec{r} d\vec{p}$ représente à l'instant dt , le nombre moyen de particules contenues dans l'élément de volume de l'espace de phase $d\vec{r} d\vec{p}$ centré en \vec{r} et \vec{p} .

La connaissance de $f_p(r, p, t)$ permet de calculer les propriétés du système dans le cadre de l'approximation de particules indépendantes.

Le nombre moyen de particules par unité de volume $n(r, t)$ au temps t est :

$$n(r, t) = \int f_p(r, p, t) dp \quad (5)$$

Le nombre N de particules :

$$N = \int n(r, t) d\vec{r} \quad (6)$$

La valeur moyenne d'une quantité $Q(r, p, t)$ est :

$$\bar{Q}(r, p, t) = \frac{\int Q(r, p, t) f_p(r, p, t) d\vec{p}}{\int f_p(r, p, t) dp} = \frac{1}{n(r, t)} \int Q(r, p, t) f_p(r, p, t) d\vec{p} \quad (7)$$

2.2- Théorème de Liouville

La description d'un système de N particules indiscernables de masse m à l'aide de la fonction de distribution à un corps est une approximation car on néglige les corrélations entre les particules. L'énergie total d'un système :

$$E = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + V(r_1, \dots, r_N) = \mathfrak{H} \quad (8)$$

\mathfrak{H} : l'hamiltonien du système.

Les équations de l'hamiltonien s'écrivent :

$$\dot{r}_i = \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial p_i} \text{ et } \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial r_i}, i = 1, \dots, N \quad (9)$$

Elles sont équivalentes aux équations de Newton :

$$\dot{r}_i = \frac{p_i}{m}, m \ddot{r}_i = \dot{p}_i \quad (10)$$

Exprimons maintenant les équations de Hamilton sous une autre forme en introduisant la fonction de distribution à N corps $f^{(N)}(r_1, p_1, \dots, r_N, p_N, t)$. On a :

$$\int f^{(N)}(r_1, p_1, \dots, r_N, p_N, t) dr_1 dp_1 \dots dr_N dp_N = 1 \quad (11)$$

Considérons un élément de volume $dr_1 dp_1 \dots dr_N dp_N$ centré en $r_1, p_1, \dots, r_N, p_N$ au temps t , celui-ci deviendra $dr_1' dp_1' \dots dr_N' dp_N'$ centré en $r_1', p_1', \dots, r_N', p_N'$ au temps $t+dt$. On a :

$$dr_1' dp_1' \dots dr_N' dp_N' = dr_1 dp_1 \dots dr_N dp_N \quad (12)$$

puisque le Jacobien de la transformation est, au second ordre près, égal à 1.

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Liouville.

Nous différencions l'équation (11) :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int f^{(N)}(r_1, p_1, \dots, r_N, p_N, t) dr_1 dp_1 \dots dr_N dp_N \\ &= \int \left[\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f^{(N)}}{\partial r_i} \cdot \frac{dr_i}{dt} + \sum_i \frac{\partial f^{(N)}}{\partial p_i} \cdot \frac{dp_i}{dt} \right] dr_1 dp_1 \dots dr_N dp_N \\ &= \int \left[\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f^{(N)}}{\partial r_i} \cdot \dot{r}_i + \sum_i \frac{\partial f^{(N)}}{\partial p_i} \cdot \dot{p}_i \right] dr_1 dp_1 \dots dr_N dp_N \quad (13) \\ &= \int \left[\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f^{(N)}}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial f^{(N)}}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_i} \right] dr_1 dp_1 \dots dr_N dp_N = 0 \end{aligned}$$

On déduit :

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f^{(N)}}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} - \sum_i \frac{\partial f^{(N)}}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial r_i} = 0 \quad (14)$$

On appelle crochet de Poisson de deux quantités A et B l'expression :

$$\{A, B\} = \sum_i \left(\frac{\partial A}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial B}{\partial r_i} \right) \quad (15)$$

D'où :

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} = \{ \mathcal{H}, f^{(N)} \} \quad (16)$$

Cette équation s'appelle l'équation de Liouville.

3- Mouvement Brownien (Equation de Langevin)

Ce phénomène a été découvert en 1827 par Robert Brown, alors qu'il observait le mouvement de pollen dispersés dans l'eau. Il s'aperçut que ceux-ci avaient une trajectoire très erratique et ne peut proposer une explication correcte de ses observations. Einstein a donné, en 1905, l'interprétation de ce phénomène qui a pour origine les collisions des molécules du liquide sur les grains de pollen.

Considérons une particule macroscopique de masse M (particule de Brown) immergée dans un liquide à la température T .

La vitesse $v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$, au niveau macroscopique, elle est soumise à 2 forces :

1°) $\mathfrak{F}(t)$, provient du champ extérieur appliqué (le champ pesanteur, $\mathfrak{F}(t) = mg$, le champ électrique ; $\mathfrak{F}(t) = eE$).

2°) La force de friction, $F = -\gamma v$, γ : le coefficient de friction.

L'équation de Newton s'écrit :

$$M \frac{dv}{dt} = \mathfrak{F} - \gamma v \quad (17)$$

L'équation de Newton est déterministe et ne peut pas décrire la trajectoire de la particule de Brown.

Une manière simple de décrire le phénomène observé, consiste à partir de l'équation de Newton et à lui ajouter un terme aléatoire ou stochastique qui traduit une particule de l'influence des molécules du fluide sur la particule de Brown ($F(t)$).

Cette équation appelée l'équation de Langevin (1908), c'est une équation stochastique. On peut l'écrire :

$$M \frac{dv}{dt} + \gamma v = F(t) + \mathfrak{F} \quad (18)$$

La solution général de cette équation différentielle s'obtient en deux étapes : dans la première, on cherche la solution sans second membre. Celle-ci est $e^{-\frac{\gamma}{M}t}$. Dans une 2^o étape, on varie la constante K . La solution générale est :

$$V(t) = \frac{1}{M} \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{M}(t-\tau)} F(\tau) d\tau + V(0) e^{-\frac{\gamma}{M}t} \quad (19)$$

($\mathfrak{F} = 0$)

Le 2^o terme est négligeable des que $t \gg \frac{M}{\gamma}$.

L'énergie cinétique moyenne $\langle \frac{1}{2} MV^2(t) \rangle$ de la particule de Brown est :

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{2} MV^2(t) \rangle &= \frac{1}{2M} \langle \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{M}(t-\tau)} F(\tau) d\tau \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{M}(t-\tau')} F(\tau') d\tau' \rangle \\ &= \frac{1}{2M} \langle \int_0^t \int_0^t e^{-\frac{\gamma}{M}(t-\tau)} F(\tau) e^{-\frac{\gamma}{M}(t-\tau')} F(\tau') d\tau d\tau' \rangle \quad (20) \\ &= \frac{1}{2M} e^{-\frac{2\gamma}{M}t} \int_0^t \int_0^t e^{\frac{\gamma}{M}(\tau+\tau')} \langle F(\tau) F(\tau') \rangle d\tau d\tau' \end{aligned}$$

Cette expression fait intervenir le moment d'ordre 2 de F . La moyenne sur l'ensemble des micro états (donc sur des systèmes différents ayant les mêmes propriétés macroscopiques) et l'intégration sur le temps sont deux opérations indépendantes que l'on peut permuter. On suppose qu'il n'y a pas de champ extérieur ($\mathfrak{F} = 0$) et le fluide est isotrope, $\langle F(t) \rangle = 0$.

De plus on suppose que la corrélation entre deux collisions se produisant l'une à t_1 , l'autre à t_2 est nulle des que la différence $t_1 - t_2 > \tau_c$ (la durée de collision). Par conséquent, on peut écrire, pour le moment d'ordre 2 de F :

$$\langle F(t_1) F(t_2) \rangle = \Phi(t_1 - t_2) \quad (21)$$

Où $\Phi(t_1 - t_2)$ est une fonction très piquée autour de $t_1 - t_2$, donc $\Phi = 0$, pour $|t_1 - t_2| \neq \tau_c$. La fonction de corrélation peut s'écrire sous la forme :

$$\langle F(t_1) F(t_2) \rangle = c \delta(t_1 - t_2) \quad (22)$$

d'où :

$$\begin{aligned} \langle \frac{1}{2} MV^2(t) \rangle &= \frac{c}{2M} e^{-\frac{2\gamma}{M}t} \int_0^t \int_0^t e^{\frac{\gamma}{M}(\tau+\tau')} \delta(\tau - \tau') d\tau d\tau' \\ &= \frac{c}{2M} e^{-\frac{2\gamma}{M}t} \int_0^t e^{\frac{2\gamma\tau}{M}} d\tau = \frac{c}{4\gamma} (1 - e^{-\frac{2\gamma}{M}t}) \end{aligned} \quad (23)$$

Pour $t \gg \frac{M}{\gamma}$: $e^{-\frac{2\gamma}{M}t} \rightarrow 0$, et :

$$\langle \frac{1}{2} MV^2(t) \rangle = \frac{c}{4\gamma} \quad (24)$$

On peut appliquer le théorème d'équipartition de l'énergie (équilibre statistique avec les molécules du milieu qui jouent le rôle d'un thermostat à température T) :

$$\langle \frac{1}{2} MV^2(t) \rangle = \frac{1}{2} KT, \text{ d'où : } c = 2\gamma KT \quad (25)$$

Etudions les propriétés liées au déplacement effectué par la particule de Brown. Si celle-ci est en $x=0$, à $t=0$. On a par raison de symétrie, $\langle x \rangle = 0$, en l'absence de champ extérieur. Calculons les fluctuations autour de cette valeur moyenne ($\langle x^2 \rangle$) : A partir de l'équation de Langevin sans champ extérieur ($\mathfrak{F} = 0$), on multipliant chaque terme par x . On obtient :

$$Mx \frac{d\dot{x}}{dt} = M \left[\frac{d}{dt} (x\dot{x}) - \dot{x}^2 \right] = -\gamma x \dot{x} + xF(t) \quad (26)$$

On a : $\langle xF(t) \rangle = \langle x \rangle \cdot \langle F(t) \rangle = 0$, d'autre part, on a : $M \langle \dot{x}^2 \rangle = KT$. Par conséquent :

$$M \frac{d}{dt} \langle x\dot{x} \rangle = KT - \gamma \langle x\dot{x} \rangle \Rightarrow M \frac{d}{dt} \langle x\dot{x} \rangle + \gamma \langle x\dot{x} \rangle = KT \quad (27)$$

C'est une équation différentielle du 1^o ordre à coefficients constants pour la variable $z = \langle x\dot{x} \rangle$. La solution est la somme de la solution générale de l'équation second membre ($Ae^{-\frac{\gamma}{M}t}$) et d'un solution particulière de l'équation avec second membre (KT/γ). Donc :

$$\langle x\dot{x} \rangle = \frac{1}{2} \langle x^2 \rangle = Ae^{-\frac{\gamma}{M}t} + \frac{KT}{\gamma} \quad (28)$$

A $t=0$, $x=0$, d'où : $A = -\frac{KT}{\gamma}$ et :

$$\frac{d}{dt} \langle x^2 \rangle = \frac{2KT}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{M}t}) \quad (29)$$

En intégrant encore une fois et en tenant compte que $\langle x^2 \rangle = 0$ pour $t=0$, on obtient :

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2KT}{\gamma} \left[1 - \frac{M}{\gamma} (1 - e^{-\frac{\gamma}{M}t}) \right] \quad (30)$$

pour $t \gg M/\gamma$, on a :

$$\langle x^2 \rangle = \frac{2KT}{\gamma} t \quad (31)$$

La particule de Brown diffuse dans le milieu. Ainsi, nous avons affaire à un processus de diffusion caractérisé par la constante D :

$$D = \frac{KT}{\gamma} \quad (32)$$

Cette relation s'appelle la relation d'Einstein.

4- L'équation de Boltzmann sans collision

Considérons au temps t , l'élément de volume $d\vec{r} d\vec{p}$ centré en \vec{r} et \vec{p} de l'espace de phase. Il contient en moyenne $f_p(r, p, t)$ particules. Au temps $t+dt$, ces particules sont déplacées

sous l'influence du potentiel moyen $U(r)$. Nous négligeons les collisions entre particules. Chaque particule à soumis une force :

$$F = -\frac{\partial U(r)}{\partial r} \quad (33)$$

l'élément de volume $d\vec{r} d\vec{p}$ est devenir $d\vec{r}' d\vec{p}'$. On déduit \vec{r}' et \vec{p}' des équations du mouvement des particules.

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{\vec{p}}{m} \Rightarrow \vec{r}' = \vec{r} + \frac{\vec{p}}{m} dt \quad (34)$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \vec{p}' = \vec{p} + \vec{F} dt \quad (35)$$

On a : $d\vec{r}' d\vec{p}' = d\vec{r} d\vec{p}$, donc la conservation du nombre de particules implique :

$$f_p(\vec{r}', \vec{p}', t') d\vec{r}' d\vec{p}' = f_p(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{r} d\vec{p} \quad (36)$$

Soit :

$$f_p(\vec{r}', \vec{p}', t') = f_p(\vec{r}, \vec{p}, t) \quad (37)$$

Où :

$$f_p(\vec{r}', \vec{p}', t') - f_p(\vec{r}, \vec{p}, t) = f_p(\vec{r} + d\vec{r}, \vec{p} + d\vec{p}, t + dt) - f_p(\vec{r}, \vec{p}, t) = 0$$

Un développement autour du point (r, p) et la simplification de l'expression conduit à :

$$\frac{\partial f_p(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial t} dt + \frac{\partial f_p(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial \vec{r}} d\vec{r} + \frac{\partial f_p(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial \vec{p}} d\vec{p} = 0 \quad (38)$$

Après laquelle nous avons introduit les notions suivantes :

$$Df_p(\vec{r}, \vec{p}, t) = \frac{\partial f_p(\vec{r}, \vec{p}, t)}{\partial t} + \vec{r} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \vec{r}} + \vec{p} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (39)$$

Dans laquelle nous avons introduit les notions suivantes :

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \dot{\vec{p}} = \frac{d\vec{p}}{dt}, D = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}} + \vec{p} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \quad (40)$$

Sachant que : $\dot{\vec{p}} = F$, l'équation peut s'écrire encore :

$$Df_p = \frac{\partial f_p}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \vec{r}} + F \cdot \frac{\partial f_p}{\partial \vec{p}} = 0 \quad (41)$$

C'est l'équation de Boltzmann sans collision. C'est une équation linéaire aux dérivées partielles.

Dans la suite, nous allons prendre comme variables indépendantes la position \vec{r} et la vitesse \vec{v} plutôt que la position \vec{r} et l'impulsion \vec{p} . On a :

$$N = \int f_p(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{r} d\vec{p} = \int f_p(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{r} d\vec{v} \quad (42)$$

Si nous faisons le changement de variables $\vec{p} = m\vec{v}$, nous avons :

$$\int f_p(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{r} d\vec{p} = \int f_p(\vec{r}, \vec{p}, t) d\vec{r} \frac{d\vec{p}}{m^3} \quad (43)$$

Le facteur m^3 provient de ce que l'intégrale sur les vitesses est triple (v_x, v_y, v_z) .

On en déduit que:

$$f_p(r, p, t) = \frac{f(r, v, t)}{m^3} \quad (44)$$

L'équation de Boltzmann sans terme de collision s'écrit :

$$Df(r, v, t) = \frac{\partial f(r, v, t)}{\partial t} + v \frac{\partial f(r, v, t)}{\partial r} + \frac{F}{m} \frac{\partial f(r, v, t)}{\partial v} = 0 \quad (45)$$

a) Collision de deux particules

Considérons la collision de deux particules (\vec{v}_1, \vec{v}_2). Après le choc, leur vitesse (\vec{v}'_1, \vec{v}'_2). Soit $\sigma'(v_1, v_2 \rightarrow v'_1, v'_2)$ la section efficace associée à la collision. Nous supposons que la collision est élastique et la durée de choc est courte. Si Φ est le flux incident et N le nombre de particules cibles. Le nombre de particules diffusées par unité de temps dans l'élément de volume $dv'_1 dv'_2$ est :

$$\frac{d^6 n}{dv'_1 dv'_2} = \sigma' NK, \sigma' = \sigma'(v_1, v_2 \rightarrow v'_1, v'_2) \quad (46)$$

La conservation de l'énergie et de l'impulsion conduit à :

$$V' = V \text{ et } v'_{rel} = v_{rel} \text{ (dans le centre de masse)} \quad (47)$$

de plus :

$dv_1 dv_2 = dv_{rel} dV$, V : la vitesse du centre de masse, v_{rel} : la vitesse relative des deux particules.

$$dv_1 dv_2 = dv_{rel} dV = dv'_{rel} dV' dv'_1 dv'_2 \quad (48)$$

La section efficace σ' est nulle lorsque les conditions (47) ne sont pas satisfaites.

La collision entre deux particules a pour effet de changer leur direction ($d\Omega \rightarrow d\Omega'$). Par conséquent, il est commode d'introduire la section efficace $\sigma'(v_{rel})$ associée à la déflexion dans l'angle solide $d\Omega'$. Le nombre de particules qui sont défléchies par unité de temps dans $d\Omega'$ est donné par :

$$\frac{d^2 n}{d\Omega'} = \sigma(v'_{rel}) N \Phi \quad (49)$$

La relation $\sigma(v'_{rel})$ et $\sigma'(v_1, v_2 \rightarrow v'_1, v'_2)$ est :

$$\begin{aligned} \sigma(v'_{rel}) &= \int \int_{V' v'_{rel}} \sigma'(v_1, v_2 \rightarrow v'_1, v'_2) dv'_1 dv'_2 = \int \int_{V v_{rel}} \sigma' dv_1 dv_2 \\ &= \int \int_{V v_{rel}} \sigma' dV' dv'_{rel} = \int \int_{V v_{rel}} \sigma' \delta(V - V') \delta(v'_{rel} - v_{rel}) dV' v_{rel}^2 dv'_{rel} d\Omega' \end{aligned} \quad (50)$$

Où, $dv_{rel} = v_{rel}^2 dv'_{rel} d\Omega'$ et δ est la distribution de Dirac.

b) Terme de collisions

Nous allons faire les hypothèses simplificatrices suivantes (hypothèse chaos moléculaire) :

- On suppose que le temps moyen entre deux collisions \bar{t} est très grand devant le temps de collision τ_c : $\tau_c \ll \Delta t \ll \bar{t}$ (les collisions peuvent être considérées comme instantanées).
- On néglige les interactions à 3, 4, ... corps.
- La section efficace à une particule est indépendante de champ moyen, i.e de la force F .
- La distribution à une particule $f(r, v, t)$ varie lentement (fonction continue).
- Chaque collision est indépendante des collisions précédentes.

L'équation de Boltzmann sans collision, $Df=0$, exprime la conservation du nombre de particules dans un élément de volume de l'espace de phase.

A cause des collisions, certaines particules vont sortir de cet élément de volume et d'autre y entrer, d'où l'équation de Boltzmann s'écrit :

$$Df(r, v, t) = -I^{(-)} + I^{(+)} \quad (55)$$

Où : $I^{(-)}$: le terme de perte et $I^{(+)}$: le terme de gain par unité de volume et de vitesse.

Si on pose :

$$f = f(r, v, t), f_1 = f(r, v_1, t), f' = f(r, v', t), f'_1 = f(r, v'_1, t) \quad (56)$$

Le terme de collision total s'écrit :

$$I^{(+)} - I^{(-)} = \iiint_{v'_1 v' v_1} v_{rel} (f' f'_1 - f f_1) \sigma'(v, v_1 \rightarrow v', v'_1) dv' dv_1 dv'_1 \quad (57)$$

avec : $v_{rel} = v - v_1$ et $v'_{rel} = v' - v'_1$.

L'équation de Boltzmann s'écrit :

$$\begin{aligned} Df(r, v, t) &= \frac{\partial f(r, v, t)}{\partial t} + v \frac{\partial f(r, v, t)}{\partial r} + \frac{F}{m} \frac{\partial f(r, v, t)}{\partial v} \\ &= \iiint_{v'_1 v' v_1} v_{rel} (f' f'_1 - f f_1) \sigma'(v, v_1 \rightarrow v', v'_1) dv' dv_1 dv'_1 \end{aligned} \quad (58)$$

Le terme de collision peut être simplifié en faisant intervenir la section efficace différentielle $\sigma(\Omega')$ au lieu de $\sigma'(v, v_1 \rightarrow v', v'_1)$. Pour cela on passe de (v', v'_1) aux variables (v', v'_{rel}) .

Compte tenue des relations (48) :

$$\iiint_{v'_1 v' v_1} \dots dv' dv'_1 = \int_{v'} \int_{v'_{rel}} \int_{\Omega'} \dots dv' v'_{rel}{}^2 dv'_{rel} d\Omega' \quad (59)$$

d'où :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = \int_{v_1} \int_{\Omega'} (f' f'_1 - f f_1) v_{rel} \sigma(\Omega') d\Omega' dv_1 \quad (60)$$

L'équation de Boltzmann est une équation intégrodifférentielle non linéaire que l'on ne peut pas résoudre analytiquement dans le cas général.

c) Linéarisation de l'équation de Boltzmann

La difficulté pour résoudre l'équation de Boltzmann de ce que c'est une équation intégrodifférentielle non linéaire. Les approximations les plus usuelles sont basées sur le fait que cette équation décrit le retour vers l'équilibre d'un système qui souvent a été faiblement perturbé. Pour cela on utilise la méthode de relaxation :

On suppose que $f(r, v, t)$ tend vers une fonction de distribution d'équilibre $f^{(0)}(r, v, t)$ en un temps τ . L'idée alors est de remplacer le terme de collision par $-\frac{f - f^{(0)}}{\tau}$. L'équation de Boltzmann devient :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{F}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau} \quad (61)$$

C'est une équation différentielle linéaire, donc plus facile à résoudre.