Chapitre I <u>**GENERALITES SUR LES VIBRATIONS**</u>

SOMMAIRE

1. Introduction

La vibration est un phénomène dynamique, c'est-à-dire en mouvement. L'étude des mouvements périodiques et, plus particulièrement, du mouvement oscillatoire conduit à une définition de la vibration. Une vibration est un mouvement d'oscillation mécanique autour d'une position d'équilibre stable ou d'une trajectoire moyenne. La vibration d'un système peut être libre ou forcée. Tout mouvement vibratoire peut être défini par les caractéristiques suivantes :

- Degrés de liberté (ddl) : un degré de liberté ; deux ou plusieurs degrés de liberté
- Causes : paramétriques ; naturelles (ou libres),.
- Forme, nature : périodiques, sinusoïdales..
- Objet de la vibration : machine, bâtiment, .moteur.
- Intensité et amplitude

2. Quelques définitions

2.1. Mouvement périodique

On appelle mouvement périodique un mouvement qui se répète et dont chaque cycle se reproduit identiquement. La durée d'un cycle est appelée période qui s'exprime en seconde (s).

Un cycle constitue une suite ininterrompue de mouvements ou de phénomènes qui se renouvellent toujours dans le même ordre. Le mouvement périodique n'est pas forcement un mouvement vibratoire.

Le nombre de répétitions par seconde est appelé fréquence (notée f, mesurée en Hertz ou (s^{-1}) Elle est reliée à la période par $f = \frac{1}{T}$

Le nombre de tours par seconde est appelé pulsation (notée) $\omega = 2\pi f$ mesurée en rad/s

Mathématiquement, le mouvement périodique de période T est défini par: à $\boldsymbol{tout\ \ instant}$, $x\,(\boldsymbol{t} + \boldsymbol{T}) = x(\boldsymbol{t})$

2.3. Définition d'une Oscillation (Vibration)

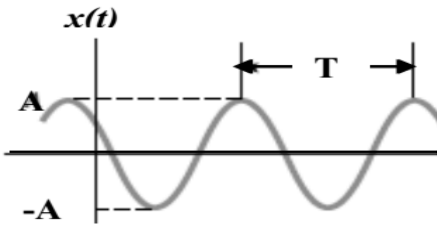
Une oscillation est un mouvement ou une fluctuation périodique autour d'une position d'équilibre stable. Les oscillations sont soit régulières (périodiques) ou soit décroissantes (amorties). Elles répondent aux mêmes équations quel que soit le domaine.

Une oscillation est une "variation d'une grandeur mécanique, électrique, caractérisé par un changement périodique de sens. (Par vibration, on désigne les oscillations rapides des systèmes mécaniques). Prenons à titre d'exemple en mécanique, un balancier de pendule oscille de droite à gauche autour de son point d'équilibre qui est la verticale ; une suspension de véhicule a tendance à osciller autour de son point de repos, lors de son fonctionnement sans amortisseur ou lorsque celui-ci est défectueux.

Et en électricité l'oscillation dans un circuit électrique peut être voulue, comme dans le cas des oscillateurs, ou être due à un défaut. Elle consiste en une variation cyclique de l'intensité de la tension électrique dans ce circuit.

2.4. Mouvement oscillatoire sinusoïdal

Un mouvement vibratoire est sinusoïdal, si un point vibrant possède une élongation du type **:** $\mathbf{x}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{sin}\,(\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi})$



¬ La grandeur x(t) est appelée l'élongation (ou la position) à l'instant *t*, l'élongation maximale ou l'amplitude du mouvement, elle varie entre *–A* et *+A*.

¬ La quantité $\boldsymbol{\omega}$ est la pulsation du mouvement et exprimée en (rad /s).

¬ La quantité ($\boldsymbol{\omega t} + \boldsymbol{\varphi}$) est la phase instantanée, exprimée en (radian, sans dimension),

¬ l'angle φ est la phase initiale, correspond à la phase à l'instant $t = 0$.

3. Coordonnées généralisées d'un système physique

Définition

On appelle coordonnées généralisées d'un système physique un ensemble de variables réelles, qui ne correspondent pas toutes à des coordonnées cartésiennes (par exemple : angles, positions relatives), et permettant de décrire ce système, en particulier dans le cadre de la mécanique lagrangienne. Les coordonnées généralisées ne sont pas toujours supposées indépendantes, et leur intérêt, par rapport aux seules coordonnées cartésiennes, est de pouvoir choisir les coordonnées les plus adaptées pour représenter le système, en tenant compte de ses contraintes. Par exemple, dans le cas d'un pendule, il est avantageux d'utiliser l'angle du pendule parmi les coordonnées généralisées.

Les coordonnées généralisées sont au nombre de $n \leq 3N$, où N est le nombre de points permettant de décrire le système et sont souvent notées : $q_1(t), q_2(t), \dots \dots \dots . q_N(t)$.

Exemples :

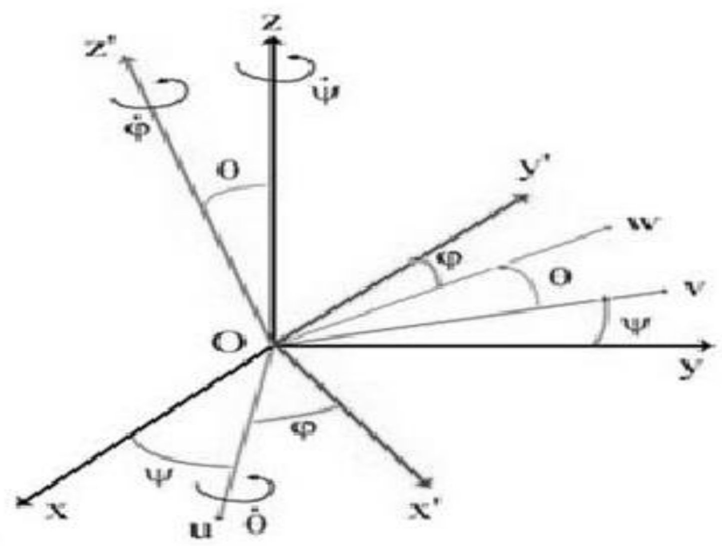
-Un point matériel libre dans l'espace peut être déterminé par ces trois (03) coordonnées généralisées : (x, y, z);

¬ Un solide peut être déterminé par 6 coordonnées. généralisées :

• 03 coordonnées relatives au centre de gravité;

• 03 coordonnées liées aux angles d'Euler (φ, ψ, θ).

¬ Les coordonnées généralisées d'un système de P points matériels et Q corps solides sont défini par : $N = 3P + 6Q$ coordonnées.



3.1 Degrés de liberté

L'expression degré de liberté est une notion recouvrant la possibilité de mouvement dans l'espace (en mécanique) et indique également la possibilité pour un système d'évoluer dans une direction non contrainte (en physique).

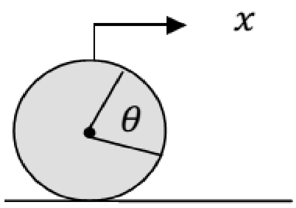
Le degré de liberté est le nombre de coordonnées généralisées indépendantes, nécessaires pour configurer tous les éléments du système à tout instant : d = N, Où, le nombre de coordonnées généralisées où liées, pour configurer tous les éléments du système à tout instant moins le nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles : $d = N - r$

$\boldsymbol{d}$: Degré de liberté ;

$\boldsymbol{N}$ **:** Nombre de coordonnées généralisées

$\boldsymbol{r}$ **:** Nombre de relations reliant ces coordonnées entre elles

.**Exemple :** Un disque de masse m et de rayon r, roule sans glisser sur un plan horizontal. Ici on a deux coordonnées généralisées x et θ donc $\boldsymbol{N}$ = 2, x et θ sont liées avec une relation $x = r\theta$ donc : $\boldsymbol{r}$ = 1. Le nombre de degrés de liberté



$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{N} - \boldsymbol{r} = \mathbf{1}$.

4. Conditions d'équilibre et d'oscillation

La condition d'équilibre est F = 0 - Si l'équilibre est en x = x_0 , on écrit $(F)_{x=x0} = 0$; Pour une force dérivant d'un potentiel ($\boldsymbol{F} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}}$), la condition d'équilibre s'écrit **:** $\left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{x}}\right)_{\mathbf{x=x0}} \mathbf{= 0}$

- **Equilibre stable :**

L'équilibre d'un système est stable si, une fois «écarté de sa position d'équilibre, il y retourne. Le système retourne à son équilibre si F est une force de rappel. Puisque F = - C x; on aura une force de rappel si C > 0: Comme C = - $\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial \mathrm{U}^2}{\partial \mathrm{x}^2}$; la condition d'équilibre stable s'écrit:

$\left(\frac{\partial \mathrm{U}^2}{\partial \mathrm{x}^2}\right)\mathrm{x} = \mathrm{x}0 > 0$. Cette condition est également une condition d'oscillation.

- **Equilibre instable :** L'équilibre d'un système est instable (il n'y a pas de force de rappel) si le système ne regagne pas son équilibre lors d'un écartement, c-a-d si C < 0: La condition d'équilibre instable s'écrit donc :
  $\left(\frac{\partial \mathrm{U}^2}{\partial \mathrm{x}^2}\right)\mathrm{x} = \mathrm{x}0 < 0$

Le mouvement oscillatoire est dit linéaire si cet écart est infinitésimal. Ainsi, l'énergie potentielle prend la forme quadratique en fonction de l'écart par rapport à la position d'équilibre. Dans un mouvement oscillatoire, l'énergie totale est constante. L'énergie se transforme d'une énergie cinétique à une énergie potentielle. Quand l'énergie cinétique diminue, l'énergie potentielle augmente et vis versa. Cette propriété est appelée conservation de l'énergie totale du système.

5. Equation du mouvement oscillatoire

Le mouvement oscillatoire est un mouvement autour de la position d'équilibre caractérisé par un équation différentielle du second ordre de la forme **:** $\ddot{y} + 2\delta\dot{y} + \omega_0^2 y = A(t)$**,** avec :

y : Le déplacement (m)

$\dot{y}$: La vitesse (m/s)

$\ddot{y}$: L'accélération (m/s^2)

δ : Le coefficient d'amortissement

ω_0 : La pulsation libre (rad/s)

A(t) : Le second membre.

L'équation du mouvement pour un système conservatif peut être déterminée par trois méthodes **:** le principe de la conservation d'énergie totale : $E_T = E_C + E_P$ = Constante, la seconde loi de la dynamique et la méthode de Lagrange

6. Formalisme de Lagrange (1788) :

Cette méthode basée sur le principe de moindre action inspiré du principe de moindre temps de Fermat. En effet, cette méthode compare les actions correspondant à différentes trajectoires possibles et choisit le chemin pour lequel l'action est minimale.

Ce critère débouche, à l'aide du calcul variationnel aux équations dites d'Euler-Lagrange régissant le mouvement des corps rigides. En utilisant l'équation de Lagrange appelée aussi équation d'Euler-Lagrange on peut établir directement l'équation de mouvement.

6.1 Fonction de Lagrange (Lagrangien)

Le lagrangien (**L**) d'un système dynamique est une fonction des variables dynamiques qui permet d'écrire de manière concise les équations du mouvement du système. Son nom vient de Joseph-Louis Lagrange, qui a établi les principes du procédé (à partir de 1788).La mécanique lagrangienne fut historiquement une reformulation de la mécanique classique à l'aide du concept de lagrangien. Dans ce contexte, le lagrangien est généralement défini par la différence entre l'énergie cinétique Ec = T et l'énergie potentielle Ep = V

$$\mathbf{L = Ec - Ep = T - U}$$

Non unicité du Lagrangien : pour un lagrangien *L= L (qi,t)* donné, s'il est possible de le réécrire comme L= L'+dF(q_i,t)/dt où *F* est une fonction continue et différentiable quelconque des coordonnées généralisées du système, alors satisfait aussi les équations d'Euler-Lagrange. Cette propriété de transformation du lagrangien démontre que le lagrangien d'un système n'est jamais unique, car on peut toujours ajouter un terme de la forme *dF/dt* à un lagrangien tout en conservant les équations du mouvement.

6.2 Equations d'Euler-Lagrange

- Pour un système conservatif à plusieurs degrés de liberté (nombre *n*), l'équation d'Euler-Lagrange s'écrit comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} 0 \qquad i = 1,\ldots n$$

Où : L : Fonction de Lagrange ou Lagrangien, *qi* : est la coordonnée généralisée et *q̇i* est la vitesse généralisée du système. Pour un système à un degré de liberté, l'équation du mouvement s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

- Pour un système dissipatif (non conservatif) de plusieurs degrés de liberté l'équation du mouvement déterminé comme suit :
  - **Système en translation :**

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \overline{\sum \left|\vec{F}_{ext}\right|} \qquad i = 1,\ldots n$$

où F_{ext} sont les forces extérieures appliquées au systèmes

  - **Système en rotation** :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = \overline{\sum \left|\vec{M}_{ext}\right|} \qquad i = 1,\ldots n$$

Où M_{ext} sont les moments extérieurs appliqués aux systèmes .Dans ce cas les forces extérieures ne dérivent d'un potentiel.

- **Fonction de dissipation de Rayleigh**

En général, et pour un système à *n* degré de liberté, la fonction de dissipation pour des frottements de type visqueux (vitesses faibles) à la forme quadratique des vitesses généralisées :

$$D = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \chi_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j$$

La qi –composante Fq_i de la force de frottement peut alors s'écrire :

$$F_{q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}$$

Finalement, l'équation d'Euler- Lagrange s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} \qquad i = 1, \cdots, n$$

- **Cas d'une force extérieure dépendant du temps**

Examinons le cas plus général d'une force extérieure dépendant du temps agissant sur un système soumis à des forces de frottement 'dérivant ' d'une fonction dissipation D. Soit *Fext* la *q*-composante de la force extérieure.

Dans ce cas l'équation d'Euler-Lagrange peut s'écrire sous la forme suivante:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right] - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}} + F_{ext} \qquad avec \quad L = E_c - E_p$$

Dans le cas général d'un système à plusieurs degrés de liberté, il y a autant d'équations de Lagrange que de degrés de liberté. Ainsi, si le système possède *n* degrés de liberté, il est nécessaire d'avoir *n* coordonnées généralisées q_i (i = 1, 2, ...,n). Nous aurons ainsi *n* équations d'Euler-Lagrange comme suit :

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + F_i^{ext}$$

où Fi^{ext} est la force extérieure qui fait varier la coordonnée généralisée *qi*.

7. Exercices résolus

Exercice N°1

Un mouvement vibratoire est caractérisé par le déplacement suivant : $x(t)=5cos(25t+\pi/3)$

Ou x en centimètres, t en secondes et la phase en radians.

1- Déterminer l'amplitude maximale.

2- Donner la pulsation propre, la fréquence et la période du mouvement.

3- Exprimer la phase initiale (déphasage à l'origine).

4- Calculer le déplacement, la vitesse et l'accélération aux instants t=0s et t=0.5s.

Solution

1- L'amplitude maximale est 5 cm.

2- La pulsation propre est ω_0 = 25 rad.s-1,

La fréquence f = 3.98 Hz et la période propre T_0 = 0.25 s.

3- La phase initiale $\varphi = \frac{\pi}{3}$ rad.

4- Le déplacement, la vitesse et l'accélération à t= 0 s:

$\boldsymbol{x(0)} = 5\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.5cm$; $\dot{\boldsymbol{x}}(0) = -125\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1.082\ m/s$; $\ddot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{(0)} = -3125\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -15.62\ m/s^2$

A t = 0.5 s, $\boldsymbol{(0.5)} = 5\cos\left(12.5+\frac{\pi}{3}\right) = 1.5cm$, $\dot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{(0.5)} = -125\sin\left(12.5+\frac{\pi}{3}\right) = -1.192\ m/s$

$\ddot{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{(0.5)} = -3125\cos(12.5+\pi/3) = -9.397\ m/s^2$

Exercice N°2

1- Quel est le nombre de degré de liberté du point matériel dans chaque système (*Fig.1*).

a) On considère un point matériel contenu dans le plan xOz du pendule simple

b) On considère un point matériel astreint à se déplacer sur un cercle de rayon R et de centre O contenu dans le plan xOy.

c) Un système mécanique constitué de deux (02) points matériels M_1 et M_2 reliés d'une tige de longueur L.

2- Quelles sont les coordonnées généralisées que l'on peut utiliser pour définir le mouvement de ce point.

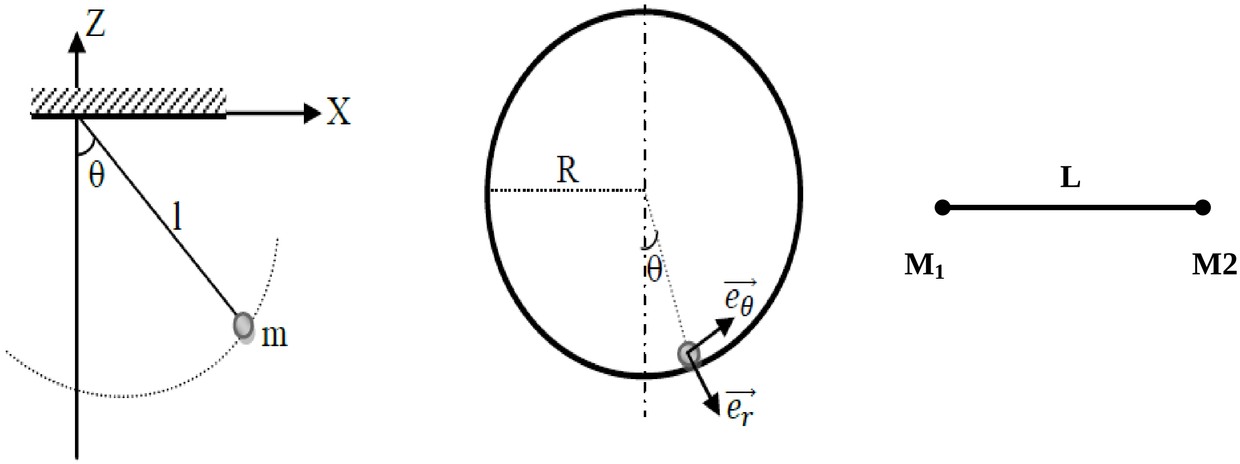


Fig.1 : Différents systèmes :(a)- un pendule simple, (b)- un cercle, (c)- un segment reliant deux points

Solution

a) Le système de pendule simple :

1- Le point m est défini par les deux cordonnées x et z :

$$\begin{cases} x = l\sin\theta \\ z = l\cos\theta \end{cases} \qquad \text{Donc } N=2$$

Le nombre de liaisons (relations mathématiques) entre les coordonnées :

$x^2 + z^2 = l^2 \Rightarrow$ r =1

Alors, le nombre de degré de liberté est : d = N- r = 2-1= 1

2- La coordonnée généralisée qui définie le système est l'angle θ

b) système (le cercle) :

1- Le point M est défini par le vecteur $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{ex} + y\,\overrightarrow{ey}$

$$\begin{cases} \overrightarrow{er} = R\cos\theta\,\overrightarrow{ex} - R\sin\theta\,\overrightarrow{ey} \\ \overrightarrow{e\theta} = R\sin\theta\overrightarrow{ex} + R\cos\theta\,\overrightarrow{ey} \end{cases}$$ Et par conséquent :

$$\begin{cases} \{x = r\sin\theta \\ y = r\cos\theta \end{cases} \Rightarrow N=2$$

Le nombre de liaisons entre les coordonnées est égale à un (1) :

$x^2+z^2 = r^2 \Rightarrow$ r = 1

Donc, le nombre de degré de liberté est : d= N- r = 2-1=**1**

Qui est représenté par la cordonnée généralisée l'angle θ

c) Le système (segment relié par deux points) :

1- Le segment relié par deux points est défini par : $\begin{cases} M1 : (x1, y1, z1) \\ M2 : (x2, y2, z2) \end{cases} \Rightarrow$ N= 6

Le nombre de liaisons entre les coordonnées est donné par la relation :

$$L = \sqrt{(x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2 + (z1 - z2)^2} \quad = \text{Constante} \quad \Rightarrow \quad r = 1$$

Le nombre de degré de liberté est : d= N- r = 6-1 = 5

Exercice N°3

Une poulie de masse *M*, de moment d'inertie *J*, et de rayon *R*, suspendue au point *O* par un ressort de raideur *k.* Le fil inextensible glisse sur la poulie sans frottement relié par une masse *m* (voir figure 2)

1-Déterminer le nombre de degré de liberté

2- Ecrie le Lagrangien du système

3-Etablir l'équation de d'Euler-Lagrange

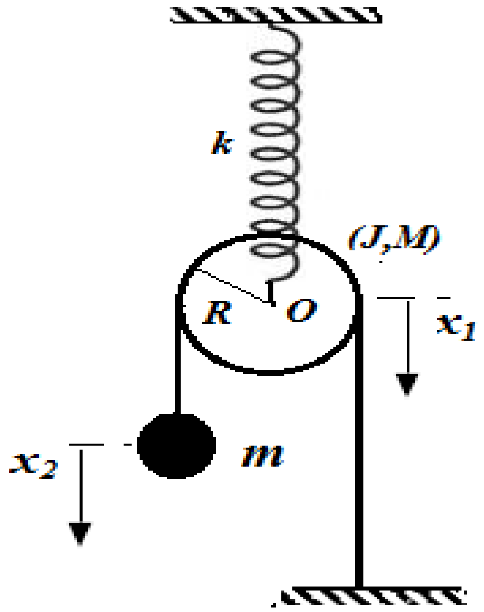
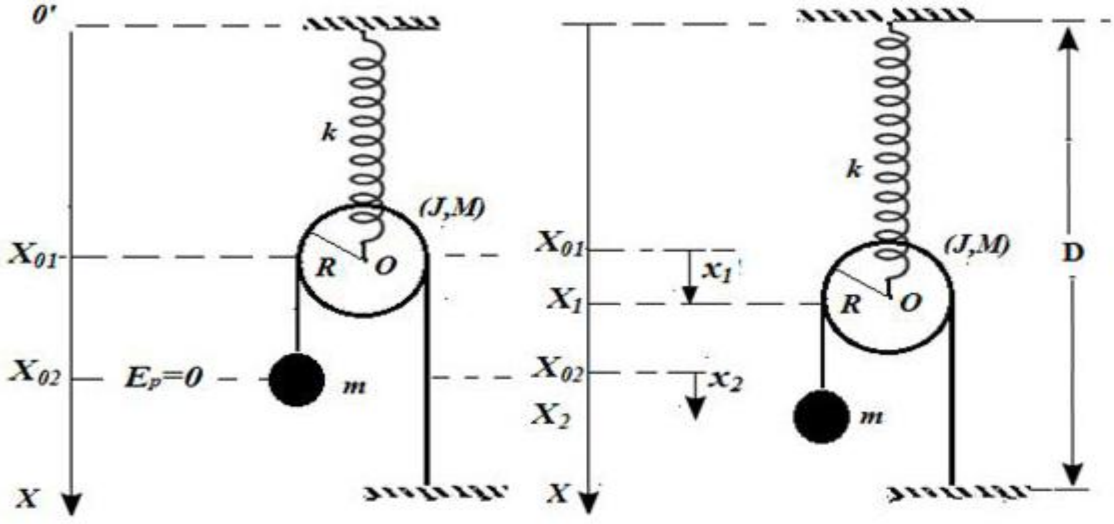


Figure.2 Mouvement oscillatoire de la poulie de masse M

La figure 2.1 : a) représente l'état d'équilibre du système et b) représente l'état du système en mouvement.



a) Etat d'équilibre b) En mouvement

Les paramètres, (X_{01}, X_{02}) et (X, X_2) représentent respectivement les positions des masses M et m en état d'équilibre et en mouvement.

1- Le nombre de degré de liberté : la longueur du fil l est la même en mouvement et en équilibre à savoir :

En équilibre : $l = D - X_{01} + \pi R + (X_{02} - X_{01})$

En mouvement : $l = D - X_1 + \pi R + (X_2 - X_1)$

Apres l'égalité des deux équations, on obtient : $X_1 = 2X_2$ X_1et X_2 sont liés entre eux (dépendants) le degré de liberté est égal à un qu'est représenté par X

2- Le lagrangien du système à un seul degré de liberté s'écrit alors : L = T - U avec T représente l'énergie cinétique du système et U énergie potentielle du système

3- L'équation d'Euler Lagrange ou tout simplement l'équation de Lagrange pour un système à un seul degré de liberté s'écrit :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_1} = 0$$

Exercices non corrigés

Exercice1

On considère un pendule simple constitué d'une masse m reliée à un point fixe O par un fil de longueur ` et de masse négligeable. Cette masse peut osciller librement dans le plan vertical xOy.

1. Quel est le nombre de degrés de liberté de ce système ? Quelles sont les coordonnées généralisées les plus pratiques à utiliser ? Ecrire les coordonnées x et y de la masse m dans le repère xOy en fonction des coordonnées généralisées choisies.
2. Quelles sont les forces qui s'exercent sur la masse m. Quelles sont celles qui dérivent d'un potentiel ? Quelles sont celles dont le travail n'est pas nul au cours du mouvement ?
3. Etablir les équations du mouvement par la méthode des équations de Lagrange.
4. Ecrire les équations du mouvement par la méthode de Newton ; retrouve-t-on le même résultat que par la méthode de Lagrange ? Déterminer le module de l'action du fil sur la masse m; pouvait-on déterminer ce module par la méthode de Lagrange ? Commenter le résultat.

Exercice 2

Etudier à l'aide des équations de Lagrange, le mouvement d'une masse M qui glisse sur un plan incliné faisant un angle θ avec l'horizontale, avec un coefficient de frottement de glissement μ. La masse est soumise de plus à une force $F(t)$ parallèle au plan incliné.

Exercice 3

Soit le circuit électrique LC, constitué d'une bobine et d'un condensateur. Trouver l'équation du mouvement du circuit en utilisant les deux méthodes, la loi de Kirchhoff et la méthode de Lagrange.