Chapitre2 : Formalisme de Lagrange

2-1. Coordonnées généralisées :

Considérons un système mécanique comportant N particules évoluant en trois dimensions. Les positions de ces particules seront notées $\vec{r}_i$ (i = 1, 2, . . ., N). Chaque vecteur position comportant trois composantes, il faut 3N coordonnées pour spécifier la configuration du système dans son entier. Supposons en outre que ces 3N coordonnées ne sont pas indépendantes, c'est-à-dire qu'elles ne sont pas libres d'évoluer indépendamment, mais qu'elles sont reliées par un certain nombre K de contraintes, qui pourraient s'exprimer comme un ensemble de relations mathématiques explicites :

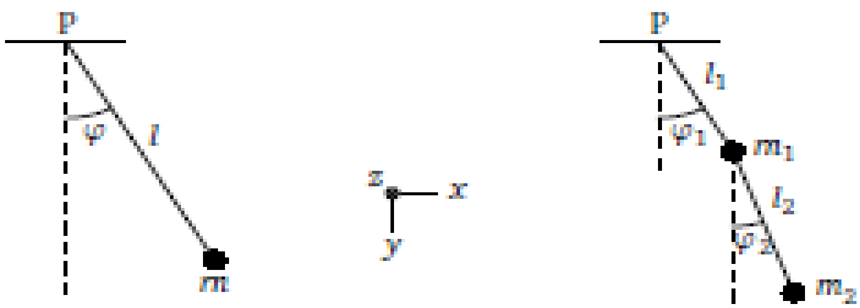
$$C_\alpha\,(\vec{r}_1\,,\dots,\vec{r}_N\,,t) \;=\; 0\;(\alpha =\; 1,2,\dots,K)$$

On appelle n = 3N -K le nombre de degrés de liberté du système mécanique étudié. Les n variables $q_\alpha, \alpha =\; 1,2,\dots,n$, qui sont suffisantes pour décrire sont appelées coordonnées généralisées.

Les variablesq_α sont en principe des fonctions connues des coordonnées des particules et, accessoirement, dutemps :

$$q_\alpha = q_\alpha(\vec{r}_1\,,\dots,\vec{r}_N\,,t);\;(\alpha =\; 1,2,\dots,n)$$

Ce sont les relations de transformations entre les coordonnées généralisées $q_\alpha$est les



Exemple1 :pendule simple : Considérons une masse *m* suspendue à un point *P*, qu'on prend comme origine, par une tige rigide de longueur *l* etde masse négligeable.
Ecrire les équations des contraintes :
Déduire le nombre de degrés de liberté , les coordonnées généralisées et les relations de transformations.
Solutions : les deux contraintes sont :
$z = 0$ (1)

$x^2 + y^2 = l^2$ (2)
Le nombre de degrés de liberté $n = 3.1 - 2 = 1 \Rightarrow$ 1 seul degré de liberté
On peut écrire $\begin{cases} x = l.\sin\varphi \\ y = l.\cos\varphi \end{cases}$
Il suffit de connaitre φpour déduire x et y
La coordonnée généralisée est φ
La relation de transformation s'écrit : $q = \varphi = arctg(x/y)$

Exemple2 : pendule double : ajoutons une deuxième masse (m_2), suspendue à la masse m_1 du pendulesimple par une autre tige rigide de masse négligeable et de longueur l_2, elle aussi contrainte de pivoter dans leplan (xy) seulement. Désignons par 'φ_2' , l'angle que fait la deuxième tige par rapport à la verticale (contre 'φ_1' pour lapremière tige, de longueur l_1). Désignons par (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) les coordonnées cartésiennes des deux masses.
Solutions : les quatre contraintes sont :

$z_1 = 0$ (1)

$z_2 = 0$ (2)

$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$ (3)

$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = l_2^2$ (4)

Le nombre de degrés de liberté $n = 3.2 - 4 = 2 \Rightarrow 2$ degrés de liberté

On peut écrire $\begin{cases} x_1 = l_1 . \sin\varphi_1 \\ y_1 = l_1 . \cos\varphi_1 \end{cases}$

$$\begin{cases} x_2 = l_1 . \sin\varphi_1 + l_2 . \sin\varphi_2 \\ y_2 = l_1 . \cos\varphi_1 + l_2 . \cos\varphi_2 \end{cases}$$

Il suffit de connaitre $\varphi_1 \ et \ \varphi_2$ pour déduire $x_1, y_1, x_2 \ et \ y_2$

Les relations de transformation s'écrivent :

$$q_1 = \varphi_1 = arctg(x_1/y_1)$$

$$q_2 = \varphi_2 = arctg\left(\frac{x_2 - x_1}{y_2 - y_1}\right)$$

2-2. Variation fonctionnelle :

Différentielles réelles

Soit une fonction $f(q_i, t)$telle que $\mathbf{i = 1, 2, ..., n}$sa différentielle réelle est :

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Ou dq_iet dtsont des différentielles des $q_i$et t**.**

Différentielles virtuelles (variation)

Les variations des coordonnées q_is'effectuent suivant des lois $q_i = q_i\ (t)$et $f$est finalement Une fonction du temps par intermédiaire des q_i**.**

Par définition on appellera différentielle virtuelle de fà l'instant tl'expression

$$\delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i$$

Le temps est figé $dt = 0$.

Soit **dw**le travailfourni par la force $\vec{F}$lors d'un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{dr}$:

$$dw = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \overrightarrow{dr}_i = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{n} \vec{F}_i . \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right\} dq_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} \left\{ \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \right\} dq_\alpha$$

$$dw = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i . \overrightarrow{dr}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} \phi_\alpha dq_\alpha$$

La quantité $\phi_\alpha$est appelée la force généralisée :

$$\phi_\alpha = \frac{\partial w}{dq_\alpha}$$

Relation importantes:

1) $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{\partial \vec{\dot{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}$

Demonstration: $\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_\alpha, \dots, q_n)$

$$d\vec{r}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1} dq_1 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} dq_\alpha + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n} dq_n$$

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\frac{dq_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\frac{dq_\alpha}{dt} + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n}\frac{dq_n}{dt}$$

$$\vec{\dot{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha + \cdots + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_n}\dot{q}_n$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \vec{\dot{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

2) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial \vec{\dot{r}}_i}{\partial q_\alpha}$

Demonstration:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) = \frac{\partial}{\partial q_\alpha}\left(\frac{d}{dt}\vec{r}_i\right) = \frac{\partial \vec{\dot{r}}_i}{\partial q_\alpha}$$

2-3. Equation de Lagrange :

Soit $\vec{F}_i$ la force extérieure agissante sur la i^{ème} particule d'un système de N particules de n degrés de liberté :

On a :

$$m_i \vec{\ddot{r}}_i = \vec{F}_i$$

On multiple par $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$ on obtient :

$$m_i \vec{\ddot{r}}_i . \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \vec{F}_i . \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} \qquad (1)$$

D'autre part on a : $\frac{d}{dt}\left(\vec{\dot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) = \vec{\ddot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} + \vec{\dot{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) \Rightarrow$

$$\vec{\ddot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\dot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) - \vec{\dot{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) \quad (2)$$

On multiple (2) par m_i

$$m_i \vec{\ddot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha} = \frac{d}{dt}\left(m_i \vec{\dot{r}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) - m_i \vec{\dot{r}}_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right) = \vec{F}_i . \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\alpha}$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dt}\sum_i\left(m_i\vec{\dot{r}}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)-\sum_i m_i\vec{\dot{r}}_i\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\right)_i=\sum_i\vec{F}_i\cdot\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}(3)$$

Soit E_c l'énergie cinétique d'un système de N particules :

$$E_c=\frac{1}{2}\sum_i m_i\vec{\dot{r}}_i^{\,2}$$

$$\frac{\partial E_c}{\partial q_\alpha}=\sum_i m_i\vec{\dot{r}}_i\frac{\partial\vec{\dot{r}}_i}{\partial q_\alpha}\quad(4)$$

Et $\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_\alpha}=\sum_i m_i\vec{\dot{r}}_i\frac{\partial\vec{\dot{r}}_i}{\partial \dot{q}_\alpha}=\sum_i m_i\vec{\dot{r}}_i\frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_\alpha}\quad(5)$

En remplaçant (4) et (5) dans (3) on obtient :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_\alpha}=\Phi_\alpha\qquad(6)$$

L'équation (6) est l'équation de Lagrange. Il y a une équation pour chaque coordonnée généraliséeq_α. Si on a n degrés de liberté on a un système à n équations de Lagrange.

2-4. Quantité de mouvement généralisée ;

La quantité p_α tel que :

$$p_\alpha=\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)$$

S'appelle la quantité de mouvement généralisée associée à la coordonnée généralisée q_α.

2-5. Le Lagrangien:

Dans les systèmes conservatifs, la force appliquée au système dérive d'un potentiel U et elle s'écrit :

$$\Phi_\alpha=-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\frac{\partial E_c}{\partial q_\alpha}=-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial E_c}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha}\right)-\left(\frac{\partial E_c}{\partial q_\alpha}-\frac{\partial U}{\partial q_\alpha}\right)=0\text{Avec}\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_\alpha}=0$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\frac{\partial(E_c-U)}{\partial \dot{q}_\alpha}-\frac{\partial(E_c-U)}{\partial q_\alpha}=0$$

On introduit :$L = E_c - U$

L : la fonction de Lagrange (ou le Lagrangien du système).

D'où la forme de l'équation d'Euler-Lagrange dans le cas d'un système conservatif.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q_\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0, (\alpha = 1, \dots, n)$$

2-6. Système de coordonnées curvilignes :

Contrairement au système de coordonnées cartésiennes, le repère d'un système de coordonnées curvilignes n'est pas fixe, mais dépend de la position d'un point dans l'espace.
Un système de coordonnées curvilignes est appelé système orthogonal si les lignes coordonnées sont orthogonales entre elles en chaque point M de l'espace. Les trois vecteurs de base étant tangent en M aux lignes de coordonnées, il en résulte que ces vecteurs sont orthogonaux entre eux en chaque point de l'espace.

Exemples de systèmes de coordonnées curvilignes :

-Coordonnées cylindriques
-Coordonnées sphériques
Energie cinétique d'une particule de masse m en coordonnées curvilignes

$$E_c = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

Où s est l'abscisse curviligne

Tel que $ds^2 = d\vec{r}.d\vec{r}$
En coordonnées cartésiennes : $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$

$$ds^2 = (dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}).(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}) = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

En coordonnées cylindriques (voir chapitre 1)

$\vec{r} = \overrightarrow{0M} = \rho\vec{e}_r + z\vec{k} \Rightarrow d\vec{r} = d\rho\vec{e}_r + \rho d\vec{e}_r + dz\vec{k} = d\rho\vec{e}_r + \rho\frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}d\varphi + dz\vec{k}$

$\vec{e}_r = cos\varphi\vec{i} + sin\varphi\vec{j} \Rightarrow \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = -sin\varphi\vec{i} + cos\varphi\vec{j} = \vec{e}_\varphi$

Donc $\Rightarrow d\vec{r} = d\rho\vec{e}_r + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}$

$$ds^2 = d\vec{r}.d\vec{r} = (d\rho\vec{e}_r + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k}).(d\rho\vec{e}_r + \rho d\varphi\vec{e}_\varphi + dz\vec{k})$$

$$ds^2 = (d\rho)^2 + (\rho d\varphi)^2 + (dz)^2$$

En coordonnées sphériques (voir chapitre 1)

$$\vec{r} = \overrightarrow{0M} = r\vec{e}_r \Rightarrow d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\vec{e}_r$$

$\vec{e}_r = sin\theta\cos\varphi\vec{i} + sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + cos\theta\vec{k}$

$d\vec{e}_r = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_r\right)d\theta + \left(\frac{\partial}{\partial\varphi}\vec{e}_r\right)d\varphi = \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\vec{e}_r\right) = d\theta\vec{e}_\theta + d\varphi sin\theta\vec{e}_\varphi$

$$d\vec{r} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rin\theta d\varphi sin\theta\vec{e}_\varphi$$

$$ds^2 = d\vec{r}.d\vec{r} = (dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rd\varphi sin\theta\vec{e}_\varphi).(dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rd\varphi sin\theta\vec{e}_\varphi)$$

$$ds^2 = (dr)^2 + (rd\theta)^2 + (rsin\theta d\varphi)^2$$

Et on écrit de façon générale :

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}dq_i.dq_j$$

g_{ij} S'appelle la métrique (tenseur métrique)

Coordonnées cartésiennes	Coordonnées cylindriques	Coordonnées sphériques
$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 sin^2\theta \end{pmatrix}$

g_{ij}estun tenseur symétrique qui nous permet de définir l'énergie cinétique T par :

$$E_c = \frac{m}{2}\sum_{i,j} g_{ij}\dot{q}_\imath.\dot{q}_\jmath$$

Exemple 1 : En coordonnées sphériques, le lagrangien d'une particule soumise à un potentiel $U(r,\theta,\varphi)$ s'écrit : $L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 \, sin^2\theta\right)$- $U(r,\theta,\varphi)$

Equations de Lagrange : 3 équations correspondent aux variables r, θ, φ

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 & (1) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 & (2) \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 & (3) \end{cases}$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}et\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\theta}^2 + mr\dot{\varphi}^2 \, sin^2\theta - \frac{\partial U}{\partial r}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta}et\frac{\partial L}{\partial \theta} = \; 2mr\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \theta}$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \, sin^2\theta \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = 2mr\dot{r}\dot{\varphi} \, sin^2\theta + mr^2\ddot{\varphi} \, sin^2\theta + 2mr^2\dot{\varphi} sin\theta cos\theta$et$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{\partial U}{\partial \varphi}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 - mr\dot{\varphi}^2 \, sin^2\theta + \frac{\partial U}{\partial r} = 0 & (1) \\ 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mr^2\ddot{\theta} - 2mr\dot{\varphi}^2 sin\theta cos\theta + \frac{\partial U}{\partial \theta} = 0 & (2) \\ 2mr\dot{r}\dot{\varphi} \, sin^2\theta + mr^2\ddot{\varphi} \, sin^2\theta + 2mr^2\dot{\varphi} sin\theta cos\theta - \frac{\partial U}{\partial \varphi} = 0 & (3) \end{cases}$$

2-7. Contraintes holonomes et non holonomes :

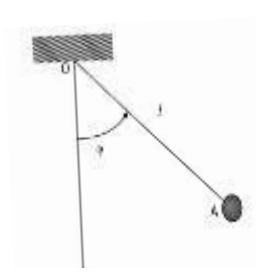
Une contrainte holonome est une contrainte qui peut se mettre sous la forme :

$$f(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = \; 0$$

Si non elle est non holonome.

Si l'équation de la contrainte holonome dépend du temps, $\frac{\partial f}{dt} \neq 0$, elle est dite rhéonome. Si elle n'en dépend pas, $\frac{\partial f}{dt} = 0$, elle est dite scléronome.

Exemple :



Pendule simple les équations des contraintes sont :

$z = 0 \qquad (1)$
$x^2 + y^2 = l^2 \quad (2)$
Les deux contraintes sont holonomes et sclérotomes.

2-7. Applications:

1-Particule dans un champ gravitationnel :

Une particule de masse m dans le champ gravitationnel d'une énergie potentielle $U = mgz$où $z$mesure sa hauteur et $g$est l'accélération due à la gravité. (Prenons $z = 0, U = 0$: origine de l'énergie potentielle gravitationnelle).(x, y, z)Sont les coordonnées du point matériel dans l'espace.
$(n = 3)$, $q_\alpha = x, y, z$

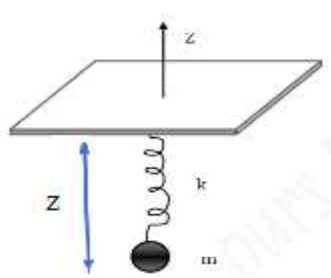
$E_c = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$et U= mgz
$L = E_c - U = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$- mgz

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 & (1) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}}\right) - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 & (2) \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\ddot{x} \text{ et } \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y} \text{ et } \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\ddot{z} \text{ et } \frac{\partial L}{\partial z} = -mg \end{cases} \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} + mg = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = c_{1,x}t + c_{2,x} \\ y = c_{1,y}t + c_{2,y} \\ z = -\frac{g}{2}t^2 + c_{1,z}t + c_{2,z} \end{cases}$$

2-Particule suspendue à un ressort :

Une particule de masse m est suspendue à un ressort de constante k dans le champ gravitationnel Près de la surface de la Terre, On pose que seul le mouvementvertical est permis et aucunmouvement en x et en y, donc un seul degré de liberté.
Le meilleur choix decoordonnées généralisées est la coordonnée cartésienne z ($U = mgz$).Le mouvement n'étant que vertical.



Le lagrangien de système s'écrit : $E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$, $U = \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 - mgz$ tel que $(z = 0, U = 0)$

L=$E_c - U = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 - \frac{1}{2}k(z - z_0)^2 + mgz$

Equation de Lagrange$(n = 1)$, $q_\alpha = z$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial L}{\partial z} = 0$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}\right) = m\ddot{z}$ et $\frac{\partial L}{\partial z} = -k(z - z_0) + mg \quad \Rightarrow m\ddot{z} - k(z - z_0) + mg = 0$

C'est une équation du deuxième ordre avec second membre, la solution est :

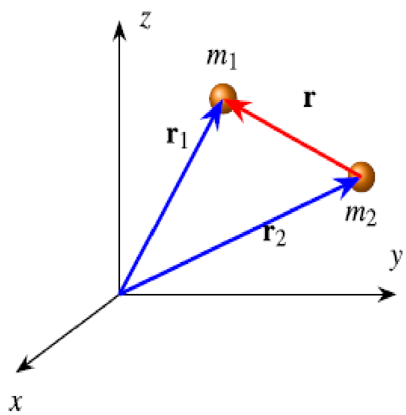
$$z(t) = A\sin(\omega t + \gamma) + z_0 + \frac{mg}{k}$$

Tel que : $\omega^2 = \frac{k}{m}$

3-Problème à deux corps :

C'est le système physique fermé le plus simple qui existe. Deux particules, de masses m_1 et m_2, dont les positions instantanées sont $\vec{r}_1$ et $\vec{r}_2$ interagissent via un potentiel :

$$U(\vec{r}, \vec{r}_2) = U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$



L'énergie cinétique s'écrit :$E_c = \frac{1}{2}\sum_i m_i\vec{\dot{r}}_i^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\vec{\dot{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{\dot{r}}_2^{\,2}$

Le lagrangien du système s'écrit : $L = E_c - U = \frac{1}{2}m_1\vec{\dot{r}}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{\dot{r}}_2^{\,2} - U(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

La coordonnée relative $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

Et la coordonnée du centre de masse : $\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2}$

Donc :

$\vec{r}_1$=$\vec{r}_c$+$\frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r}$ et $\vec{r}_2$=$\vec{r}_c$-$\frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r}$

Par suite $\dot{\vec{r}}_1$=$\dot{\vec{r}}_c$+$\frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}$ et $\overrightarrow{\dot{r}_2}$=$\dot{\vec{r}}_c$-$\frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}}$

Remplaçant dans le lagrangien $(\vec{r}_1, \vec{r}_1)$ par $(\vec{r}, \vec{r}_c)$ nous obtenons donc :

$$L = E_c - U$$

$$L = \frac{1}{2}M\overrightarrow{\dot{r}_c}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - U(\vec{r})$$

Où: $M = m_1 + m_2$est la masse totale du système et $m = \frac{m1m2}{m_1 + m_2}$est la masse réduite du système ; et le lagrangien se décompose en deux éléments non pas reliés :

$$L = L_c + L_r$$

Ou $L_c = \frac{1}{2}M\overrightarrow{\dot{r}_c}^2$ et $L_r = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$

Ou $L_c$est l'énergie cinétique globale du système$L_r$relative, apparaît comme le lagrangien d'une particule de masse m et de position r.

4. Le potentiel central:

Nous étudions ici un problème à un corps qui est aussi assimilable à celui d'une particule soumise à une force centrée à l'origine.
On peut montrer que si la force est centrale donc U=U(r)
Par définition $\vec{F} = f(r)\vec{e}_r$
$\vec{F} = -\vec{\nabla}$U(r)⇒ U(r) $= -\int \vec{F}\overrightarrow{dr} == -\int f(r)\vec{e}_r(\, dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta + rin\theta d\varphi sin\theta\vec{e}_\varphi) = -\int f(r)dr$
Donc le potentiel ne dépend que de r pour le cas d'une $force\ centrale$

Supposons qu'une particule de masse m, son vecteur position est $\vec{r}$, soumise à un potentiel central $U(r)$

Le lagrangien L s'écrit : $L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{r}}^2 - V(\vec{r})$

On peut montrer que si la force est centrale le mouvement est plan :

Démonstration :

Le moment de la force est défini par $\vec{\Gamma}_{/o} = r \wedge \vec{F} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$

$$\vec{\Gamma}_{/o} = r\vec{e}_r \wedge f(r)\vec{e}_r = rf(r)\vec{e}_r \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$$

On sait que le moment de la force est la dérivée par rapport au temps du moment cinétique :

$\vec{\Gamma}_{/o} = \frac{d\vec{L}_{/o}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_{/o} = \overrightarrow{constant}$

D'autre part: $\vec{L}_{/o} = \vec{r} \wedge \vec{p} = m\vec{r} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{constant}\ \forall\ le\ temps\ t \Rightarrow \vec{r}\ et\ \vec{v}$ dans le meme plan $\forall\ t$ ⇒le movement est plan

On peut choisir le système de coordonnées polaire pour étudier notre système: $q_\alpha = r, \varphi$

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

Equations de Lagrange :

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial r} = 0 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \dfrac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \end{cases}$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) = m\ddot{r}$ et $\frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\varphi}^2 - \frac{\partial U}{\partial r}$ (1)

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi})$ et $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$ (2) $\Rightarrow \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\varphi}) = 0$

$\Rightarrow mr^2\dot{\varphi} = constant = C$ (3)

De (1) $\Rightarrow m\ddot{r} - mr\dot{\varphi}^2 + \frac{\partial U}{\partial r} = 0$

Et de (3) $\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{C}{mr^2}$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - mr\left(\frac{C}{mr^2}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r} = 0 \text{ on pose } c^2 = K$$

$$\Rightarrow m\ddot{r} - \frac{K}{mr^3} + \frac{\partial U}{\partial r} = 0$$