Exo1 :

- Dans la base orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on donne :

$$\begin{cases} x(t) = t-1 \\ y(t) = 1-t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

1°/ : Equation de la trajectoire.

Par élimination du temps "t" entre "x" et "y" $(z=0)$:

$x = t-1 \Rightarrow t = x+1$

et $y = 1-t^2 \Rightarrow y = 1-(x+1)^2 = -(x^2+2x)$

$\boxed{y = -(x^2+2x)}$ Equation d'une parabole.

2°/ : * Vecteurs vitesse : "On définit la vitesse comme étant la dérivée première par rapport au temps du vecteur position".

le vecteur position du point "M" est : $\vec{OM} = \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: fixent $\Rightarrow \frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = \frac{d\vec{k}}{dt} = 0$

$\vec{v} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$ $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$

$$\vec{v} : \begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t-1) = 1 \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(1-t^2) = -2t \\ \dot{z} = 0 \end{cases}$$

Le mvt se fait dans le plan.

$\boxed{\vec{v} = \vec{i} - 2t\vec{j} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}}$ $v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{1+4t^2}$ m/s

$\boxed{|\vec{v}| = v = \sqrt{1+4t^2} \text{ m/s}}$

* Vecteur accélération : Par définition, c'est la dérivée première du vecteur vitesse ou la dérivée seconde du vecteur position par rapport au temps,

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$$

$$z = \dot{z} = \ddot{z} = 0$$

$$\vec{a} : \begin{cases} a_x = \dfrac{d\dot{x}}{dt} = \ddot{x} = \dfrac{d}{dt}(1) = 0 \\ a_y = \dfrac{d\dot{y}}{dt} = \ddot{y} = \dfrac{d}{dt}(-2t) = -2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -2\vec{j}} \quad \boxed{|\vec{a}| = a = 2\ m/s^2}$$

3°/. Calcul des accélérations tangentielle et normales

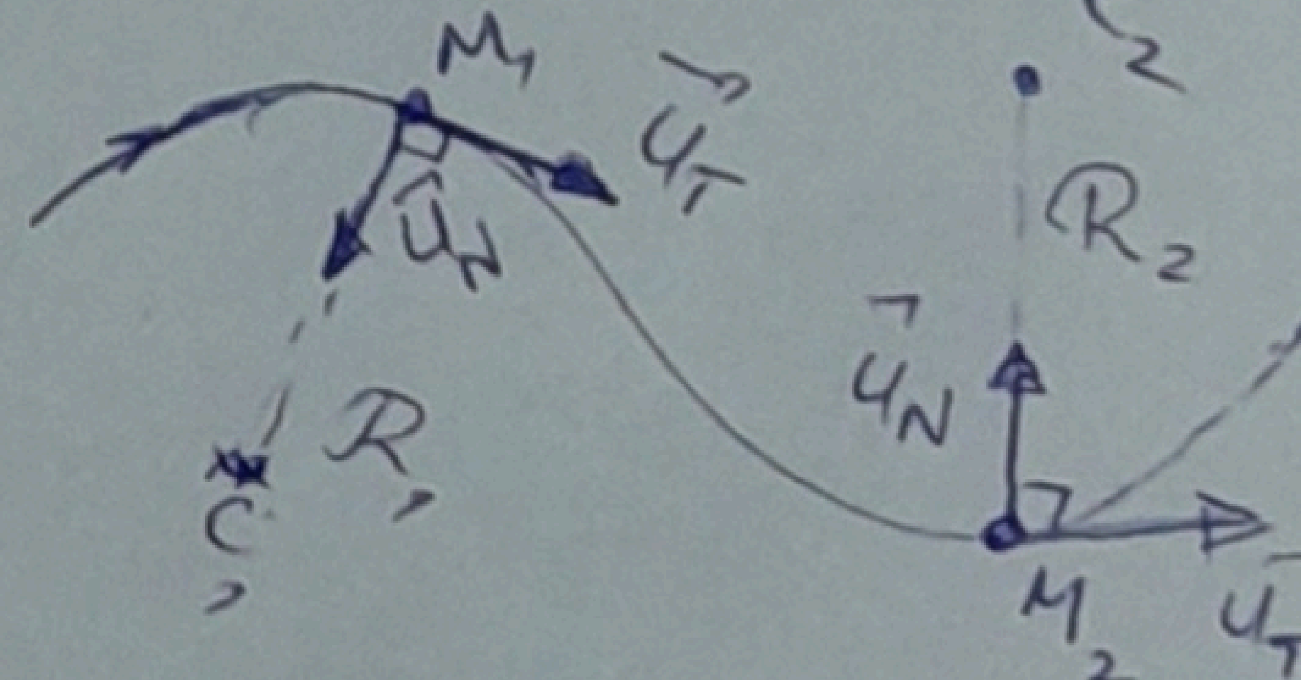
a_T : accélération tangentielle (tangente ~~à la~~ à la ~~tr~~trajectoire)

a_N : " normale (dans la direction du centre de courbure de la trajectoire)

Par définition $\vec{a}_T = \dfrac{dv}{dt}\vec{u}_T$ $\quad \vec{u}_T$: vecteur unitaire tangent à la trajectoire

$\vec{a}_N = \dfrac{v^2}{R}\vec{u}_N$ $\quad \vec{u}_N$: vecteur unitaire normale à la tangente

* accélération tangentielle



$a_T = \dfrac{dv}{dt}$ $\quad v$: module du vecteur vitesse.

or $v = \sqrt{1+4t^2} \Rightarrow a_T = \dfrac{d}{dt}\left(\sqrt{1+4t^2}\right)$

$$\boxed{a_T = \frac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}}$$

* accélération ~~tangen~~ normale.

on a : $\vec{a} = \underbrace{a_x\vec{i} + a_y\vec{j}}_{\text{Base cartesienne}} = \underbrace{a_T\vec{u}_T + a_N\vec{u}_N}_{\text{Base intrinsèque}}$

et $|\vec{a}| = a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_T^2 + a_N^2}$

on sait que $a = 2\ m/s^2$ et $a_T = \dfrac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}$

$$\Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{4 - \frac{16t^2}{1+4t^2}}$$

$$a_N = \sqrt{4 - \frac{16t^2}{1+4t^2}} \Rightarrow \boxed{a_N = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}}}$$

* Rayon de ~~...~~ Courbure : on sait que, $a_N = \frac{v^2}{R}$

R : rayon de courbure, $R = \frac{v^2}{a_N} = (1+4t^2) / \left(2/\sqrt{1+4t^2}\right)$

$$\boxed{R = \frac{1}{2}(1+4t^2)^{3/2}\ m}$$

Ex 02 : Dans le plan (oxy) : $\vec{v} = \alpha\vec{i} + \beta x\vec{j}$ à $t=0$ $A(0,0)$

$A(x_0, y_0)$

1°/. Equation de la trajectoire $y = f(x)$

$$\vec{v} : \begin{cases} v_x = \alpha = dx/dt & (1) \\ v_y = \beta x \quad dy/dt & (2) \end{cases}$$

(1) : $dx = \alpha\, dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \alpha\, dt$

$\Rightarrow x\Big|_{x_0}^{x} = \alpha t\Big|_0^t$

$\Rightarrow x - \underset{0}{x_0} = \alpha(t-0) \Rightarrow \boxed{x = \alpha t}$

(2) : $v_y = \frac{dy}{dt} = \beta x = \beta(\alpha t) \Rightarrow dy = (\alpha\beta t)\,dt \Rightarrow \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t \alpha\beta t\, dt$

$y - y_0 = \frac{1}{2}\alpha\beta(t-0) \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{2}\alpha\beta t^2}$

$$M : \begin{cases} x(t) = \alpha t & (3) \\ y(t) = \frac{\alpha\beta}{2}t^2 & (4) \end{cases}$$

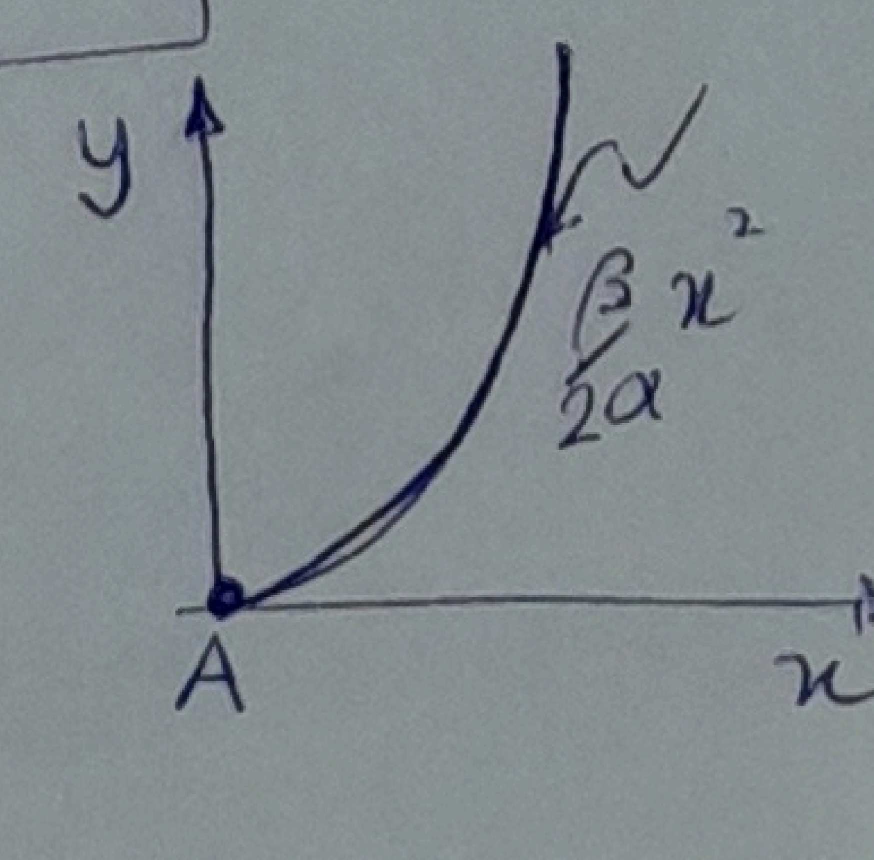
(3) : $t = \frac{x}{\alpha}$

$\Rightarrow y = \frac{\alpha\beta}{2}\left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}x^2$

$\boxed{y = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}x^2}$ Une forme : $\boxed{y = Ax^2}$

L'equation est celle de la parabole

à $t=0$ $x_0 = 0$
$y_0 = 0$



2°/ : accélération : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\alpha\vec{i} + \beta x\vec{j})$ ④

$\vec{a} = \frac{d}{dt}(\alpha\vec{i} + \alpha\beta t\vec{j}) = \alpha\beta\vec{j}$ m/s², $\boxed{\vec{a} = \alpha\beta\vec{j}}$

$\vec{a} : \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \alpha\beta \end{cases}$ et $\boxed{|\vec{a}| = a = \alpha\beta \text{ m/s}^2}$

puisque "α" et "β" sont des constante, alors "a" est une constante et le mouvement est uniformement varié suivant oy et uniforme suivant ox.

3°/ : Rayon de courbure : Si on part de l'equation de la trajectoire $y = f(x)$ on donne l'expression du rayon de courbure R comme suit

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \quad \text{ou } y' = \frac{dy}{dx}, \; y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$$

y' : 1ère dérivée par rapport à x

y'' : deuxième derivée par rapport à x

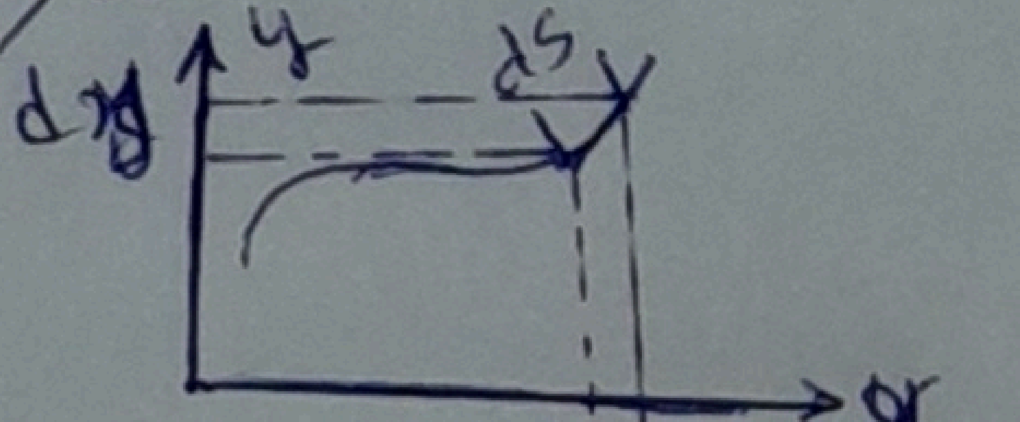
on a : $\begin{cases} y(x) = \frac{1}{2}\frac{\beta}{\alpha}x^2 \\ y'(x) = \beta/\alpha \, x = \beta t \\ y'' = \beta/\alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{R = \frac{(1 + \beta^2 t^2)^{3/2}}{\beta/\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}\sqrt{(1+\beta^2t^2)^3}}$

Ex03 : $M(x, y)$: suit la trajectoire d'equation : $y = \sqrt{4 - x^2}$ dont l'équation de mouvement est $s(t) = 2t$

à $t = 0$, $x_0 = 0$

1°/ : Les équations paramétriques : $x(t) = ?$ $y(t) = ?$

- On part de l'equation qui donne un élement de secteur dans les coordonnées intrinsèque dans la base cartésienne, $ds^2 = dx^2 + dy^2$



$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)}$$

$$\begin{cases} ds = \sqrt{1 + y'^2}\, dx \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{cases} \qquad y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

$$\Rightarrow \quad ds = \sqrt{1 + \frac{x^2}{4 - x^2}}\, dx = \frac{2\,dx}{\sqrt{4 - x^2}}$$, puisque $s = 2t$ $\Rightarrow ds = 2dt$

$$ds = 2dt = \frac{2\,dx}{\sqrt{4 - x^2}} \Rightarrow \int_0^t dt = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin(x/2)\Big|_0^x$$

$$t\Big|_0^t = \arcsin(x/2)\Big|_0^x \Rightarrow t = \arcsin(x/2) \Leftrightarrow \boxed{x = 2\sin t}$$

$\boxed{x(t) = 2\sin(t)}$ et $y = \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = 2\cos t$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = 2\cos(t)}$

2°// L'accélération $\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = -2\sin t \\ \ddot{y} = -2\cos t \end{cases}$ $|\vec{a}| = a = 2\ m/s^2$

$\vec{a} = a_T \vec{u}_T + a_N \vec{u}_N$ $\qquad a_T = \frac{dv}{dt}$ $\qquad \vec{v} \begin{cases} \dot{x} = 2\cos t \\ \dot{y} = -2\sin t \end{cases} \Rightarrow v = 2 m/s^2$

$\Rightarrow \boxed{a_T = 0}$

et $a^2 = a_T^2 + a_N^2 \Rightarrow a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = a = 2 m/s^2$ $\boxed{a_N = 2 m/s^2}$

$+ \ a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{4}{R} = 2 \Rightarrow \boxed{R = 2m = R}$

L'équation de la trajectoire $y = \sqrt{4 - x^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$

Equation du cercle de centre $(0,0)$ de rayon $R = 2$