Ex 04 :

$$\begin{cases} x = R\cos(2t) \\ y = R\sin(2t) \\ z = 2t \end{cases}$$

1°/ :

$x^2 + y^2 = R$: Dans le plan xoy : c'est un cercle

$z = 2t$ Droite suivant l'axe $\vec{Oz}$

la combinaison d'un m^vt circulaire (xoy) et rectiligne $(\vec{Oz})$ donne une courbe qui est une hélice

$* \ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} \dot{x} = -2R\sin(2t) \\ \dot{y} = 2R\cos(2t) \\ \dot{z} = 2 \end{cases}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \left(4R^2\sin^2(2t) + 4R^2\cos^2(2t) + 4\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{4R^2(\underbrace{\sin^2 2t + \cos^2 2t}_{1}) + 4} = 2\sqrt{1+R^2}$$

$$\boxed{v = |\vec{v}| = 2\sqrt{1+R^2} \ m/s}$$

$* \ \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \Rightarrow \vec{a}\begin{cases} \ddot{x} = -4R\cos 2t \\ \ddot{y} = -4R\sin 2t \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 4 \ m/s^2}$

a : toujours constante en module et orienté vers l'axe Oz

2°/ Dans la base cylindrique $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{k})$,

$\vec{OM} = \vec{r} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} \Rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$

$\frac{d\vec{k}}{dt} = 0$ (fixe) , $\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} = R \\ tg\theta = y/x = tg(2t) \Rightarrow \theta = 2t \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{OM} = \vec{r}\,(R, 2t, 2t)$: $\vec{OM} = \vec{r} = \rho\vec{u}_\rho + z\vec{k} = R\vec{u}_\rho + z\vec{k}$

$\rho = R \Rightarrow \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ $\quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{k} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta + 2\vec{k}$

$\theta = 2t \Rightarrow \dot{\theta} = 2, \ddot{\theta} = 0$ $\quad \vec{v} = 2R\vec{u}_\theta + 2\vec{k}$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2} = \sqrt{4R^2+4} = 2\sqrt{1+R^2}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\,\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\,\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{k}$$

$$\vec{a} = (0 - R(2)^2)\,\vec{u}_\rho + (2(0)(2) + R(0))\,\vec{u}_\theta + (0)\,\vec{k}$$

$$\boxed{\vec{a} = -4R\,\vec{u}_\rho} \qquad \boxed{|\vec{a}| = a = 4R\ m/s^2}$$

On voit que l'accélération st toujours dans la direction radiale et orientée vers l'axe Oz tout au long du parcours.

* 4°/, Dans la base intrinseque,

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{car } |\vec{v}| = v = 2\sqrt{1+R^2} = \text{Const}$$

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = a = 4R.$$

- rayon de courbure : $a_N = \frac{v^2}{\mathcal{R}} \Rightarrow \mathcal{R} = \frac{v^2}{a_N} = \frac{4(1+R^2)}{4R}$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{R} = (1+R^2)/R}$$

Rque : il faut faire la différence entre le rayon du cylindre et le rayon de courbure de l'hélice $\mathcal{R} \neq R$