Série- III- Contrainte et deformation dans la sollicitation de Traction pure

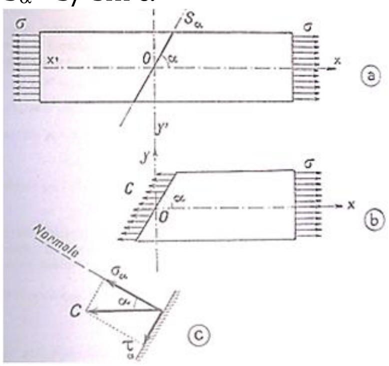
Exercice 01

Trouver l'état de contrainte sur une facette inclinée d'angle α dans la sollicitation de traction pure:

Solution exercice 01

Considérons un barreau rectiligne de section constante, S dont les extrémités, perpendiculaires à l'axe longitudinal sont le siège d'une contrainte de traction σ uniformément repartie. Coupons ce barreau par une section quelconque définie par l'angle α, l'aire de cette section est:

$S_\alpha = S/\sin\alpha$



Contraintes

Isolons le tronçon de droite.

Chaque élément de la section S_α est le siège d'une contrainte que nous appellerons contrainte totale et que nous désignerons par C. Pour des raisons évidentes d'homogénéité et d'isotropie toutes ces contraintes totales C sont égales et parallèlemen. dirigées. Les forces dues aux contraintes C devant équilibrer les forces dues aux contraintes σ, les contraintes totales C, uniformément réparties sur la section S_α sont dirigées parallèlement à l'axe longitudinal ox. La condition d'équilibre du tronçon de droite s'écrit :

$$C \times S_\alpha = \sigma \cdot S$$

$$C \times \frac{S}{\sin\alpha} = \sigma \times S$$

et

$$C = \sigma \sin\alpha \tag{1}$$

En projetant cette contrainte totale C sur la normale à la facette et sur le plan de la facette à laquelle elle est appliquée on obtient la contrainte normale σ_α et la contrainte tangentielle τ_α

$$\sigma_\alpha = C\sin\alpha = \sigma\sin^2\alpha \tag{2}$$

$$\tau_\alpha = C\cos\alpha = \sigma\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1}{2}\sigma\sin 2\alpha \tag{3}$$

Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$, facette parallèle à l'axe oy

$$\sigma_{\pi/2} = \sigma\,; \qquad \tau_{\pi/2} = 0$$

Pour $\alpha = 0$, facette parallèle à l'axe ox

$$\sigma_0 = 0\,; \qquad \tau_0 = 0$$

les différentes couches longitudinales (parallèles à l'axe ox) n'ont, entre elles, aucune action mutuelle. Tout se passe comme si le barreau sollicité en traction était constitué par un faisceau de fils rectilignes et parallèles à l'axe longitudinal.

La relation (3) montre que τ_α a une valeur maximale pour $\alpha = 45°$

$$\tau_{45°} = \frac{1}{2}\sigma$$

Si on considère 2 sections définies par les angles α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$ on peut calculer :

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2}\sigma\sin 2\alpha$$

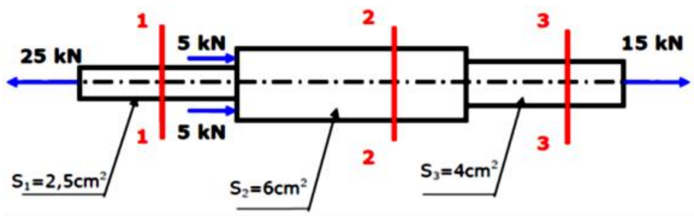
$$\tau_{\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sigma\sin 2\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha+\pi)$$

$\tau_{(\alpha+\pi/2)} = -\tau_\alpha$ ou en valeur absolue $|\tau_\alpha| = |\tau_{\alpha+\pi}|$

SERIE -III- Traction et Compression Simples

Exercice 2

Soit la barre schématisée par la figure ci-dessous. Calculer les contraintes au niveau des sections **1-1**, **2-2** et **3-3**.



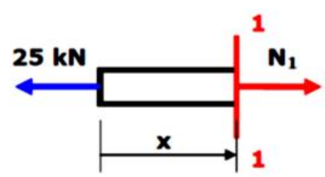
Solution de l'exercice 2

- ***Solution de l'exemple 2.1***

Section 1-1

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad N_1 = 25kN$$

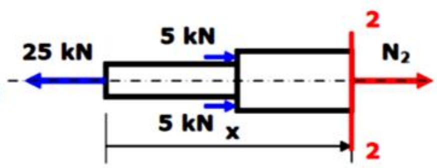
$$\sigma_{1-1} = \frac{N_1}{S_1} = \frac{25}{2,5} = 10kN/cm^2 = 100MPa$$



Section 2-2

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad N_2 = 15kN$$

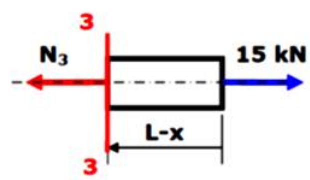
$$\sigma_{2-2} = \frac{N_2}{S_2} = \frac{15}{6} = 2,5kN/cm^2 = 25MPa$$



Section 3-3

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \quad N_3 = 15kN$$

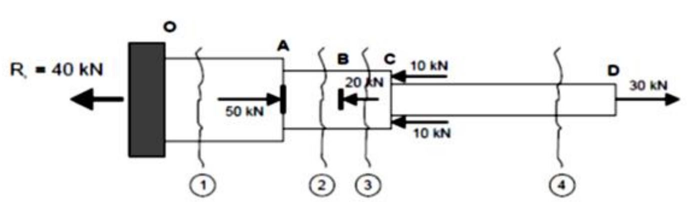
$$\sigma_{3-3} = \frac{N_3}{S_3} = \frac{15}{4} = 3,75kN/cm^2 = 37,5MPa$$



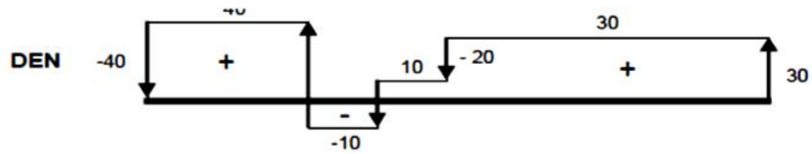
Exercice 3

Exemple avec des forces concentrées

Sur la figure ci-dessous , calculez le diagramme d'effort normal tout au long d'une barre dans le cas où les efforts axiaux sont concentrés.

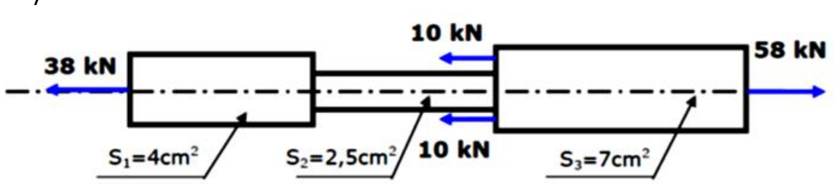


Solution de l'exercice 3



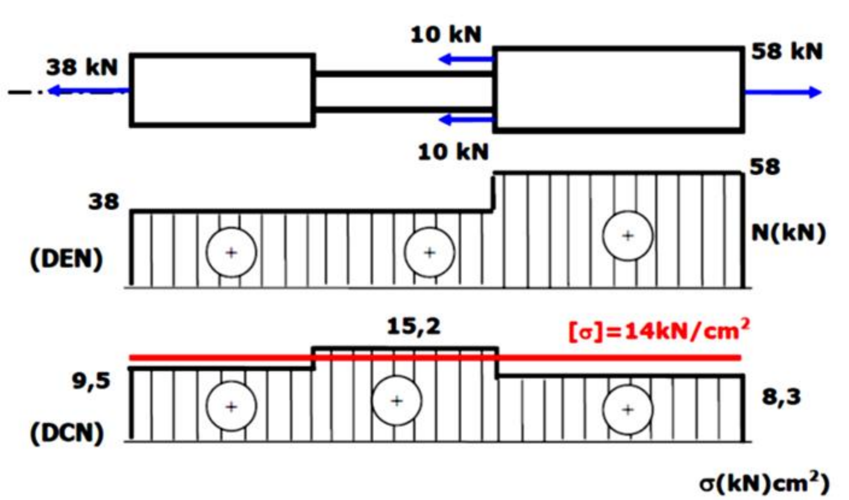
Exercice 4

Vérifier la résistance de la barre métallique schématisée par la figure ci-dessous, sachant que $[\sigma]=14$ kN/cm^2.



Solution de l'exercice 4

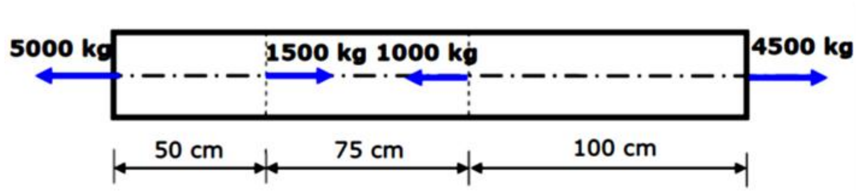
Nous traçons le Diagramme de l''Effort Normal (DEN) et nous déduisons le Diagramme de la Contrainte Normale (DCN) puis nous reportons dessus la valeur de la contrainte admissible du matériau:



Nous remarquons que la contrainte maximale est égale à 15,2 kN/cm^2 et elle est supérieure à la contrainte admissible, d'où la barre ne résiste pas à la traction.

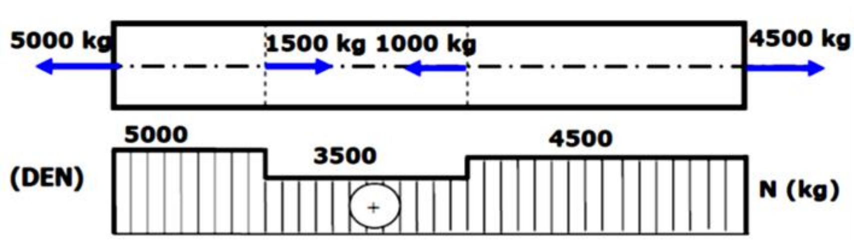
Exercice 5

Déterminer l'allongement total de la barre métallique, sollicitée comme le montre la figure ci-dessous, sachant que le module de Young E = 2,1106 kg/cm^2. La section de la barre est constante et vaut 5 cm^2.



Solution de l'exercice 5

Le DEN est montré sur la figure ci-dessous:



$$\Delta L = \int_0^L \frac{N}{ES}dx = \int_0^{L_1} \frac{N_1}{ES_1}dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \frac{N_2}{ES_2}dx + \int_{L_1+L_2}^{L} \frac{N_3}{ES_3}dx$$

$$= \frac{N_1 L_1}{ES_1} + \frac{N_2 L_2}{ES_2} + \frac{N_3 L_3}{ES_3}$$

$$= \frac{1}{E}\sum_{i=1}^{3} \frac{N_i L_i}{S_i}$$

$$\Delta L = \frac{1}{2{,}1.10^6 x5}(5000x50 + 3500x75 + 4500x100)$$

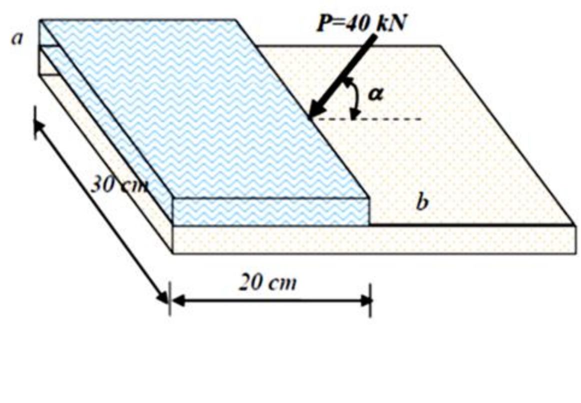
Ainsi, l'allongement total de la barre est

$$\Delta L = 0{,}092cm$$

SERIE -III- Cisaillement

<u>Exercice 6</u>

Calculer la contrainte moyenne sur le plan ab sur la figure ci-dessous.



Solution de l'exercice 6

- ***Solution de l'exemple 3.1***

La contrainte moyenne sur le plan ab est:

$$\tau = \frac{T}{S} = \frac{P\cos\alpha}{S}$$

D'où pour α, par exemple, égale à 45° on a:

$$\tau = \frac{40\sqrt{2}}{2(20x30)} = 0{,}047 kN / cm^2$$

Exercice 7

La contrainte de cisaillement dans un corps métallique est égale à 1050 kg/cm². Si le module de cisaillement vaut 8400 kN/cm², déterminer la déformation de cisaillement.

Solution de l'exercice 7

- ***Solution de l'exemple 3.2***

De l'équation (4), on a:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}$$

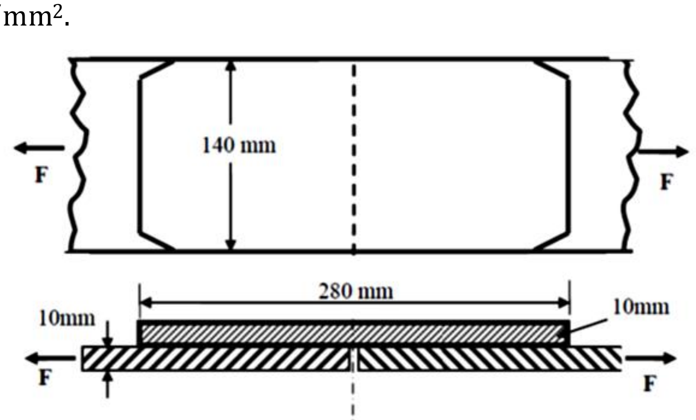
$$\gamma = \frac{1050}{840000} = 0{,}00125 rad = 0{,}225°$$

Exercice 8

On veut assembler, à l'aide de rivets dont le diamètre de chacun vaut 20 mm et d'un couvre joint, deux tôles métalliques de 140 mm de largeur et 10 mm d'épaisseur. L'ensemble est soumis à un effort de traction F = 10 000 daN, comme montré par la figure ci-dessous.

1- Déterminer le nombre de rivets nécessaires à cet assemblage si la contrainte admissible de cisaillement [τ], pour chaque rivet, est égale à la 90 MPa.

2- Vérifier la résistance du système si la contrainte admissible pour chacune des deux tôles est 12 daN/mm².

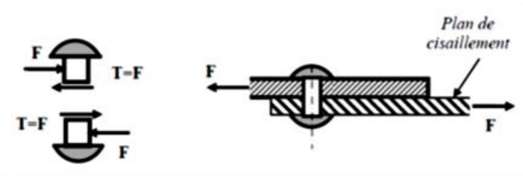


Solution de l'exercice 8

1- Nous avons ici un seul plan de cisaillement. La force de cisaillement (effort tranchant) appliquée à la section cisaillée, au niveau du plan de cisaillement est

$$T_1 = \frac{F}{n}$$

Où n est le nombre de rivets.



S'il y a un seul rivet, alors

$$T = F$$

La contrainte de cisaillement sur la section cisaillée (revenant à chaque rivet) est

$$\tau_1 = \frac{T_1}{A_1}; \quad A_1 = \frac{\pi d^2}{4}$$

La condition de résistance étant

$$\tau_1 \leq [\tau]$$

Alors, on écrit

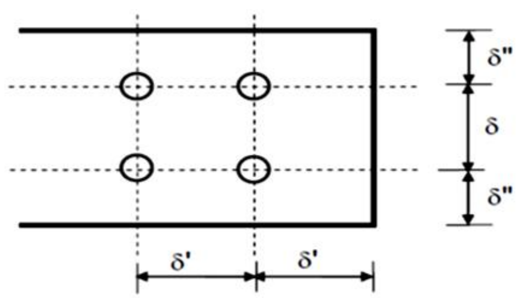
$$\tau_1 = \frac{10000/n}{\pi(20)^2/4} \leq 9$$

$$\Rightarrow n \geq 3{,}5$$

Le nombre de rivets nécessaire à cet assemblage est donc

$$n = 4$$

Les dispositions pratiques des rivets se fait selon les conditions suivantes

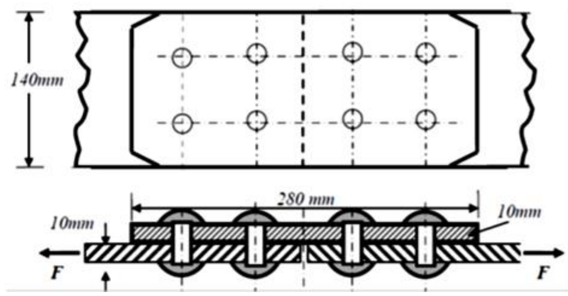


$$\delta = 3d$$

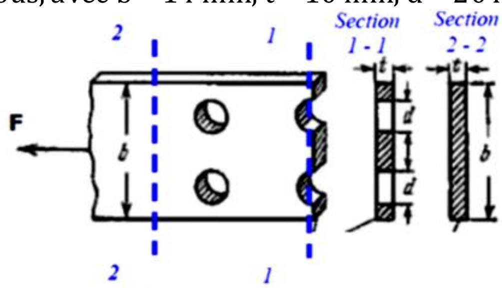
δ' au voisinage de 1,5d

$$1{,}5d \leq \delta'' \leq 2{,}5d$$

Selon ces conditions, le nombre de rivets obtenu est disposé sur la figure ci-dessous.



1- Pour vérifier la résistance du système, on doit vérifier la résistance de chacune des deux tôles au niveau de la section dangereuse qui passe naturellement par les axes des rivets, comme montrée co-dessous, avec b = 14 mm, t = 10 mm, d = 20 mm.



$$\sigma_{1-1} = \frac{N}{A_{1-1}}; \quad N = F \quad ; \quad A_{1-1} = t(b - 2d)$$

$$\sigma_{1-1} = \frac{10000}{10(140 - 2x20)} = 10 daN / mm^2$$

La condition de résistance pour la traction

$$\sigma_{1-1} \leq [\sigma]$$

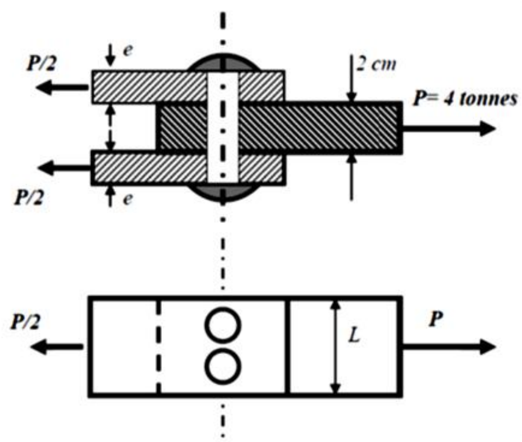
est vérifiée, alors le système résiste à l'effort de traction appliqué.

Exemple 9

Trois tôles en acier sont assemblées entre elles par deux rivets de diamètre chacun égale à 17 mm.

1- Vérifier la résistance des rivets si la contrainte admissible de cisaillement $[\tau] = 900$ kg/cm^2.

2- Déterminer l'épaisseur minimale de chacune des deux tôles si $[\sigma] = 1200$ kg/cm^2.



Solution de l'exercice 9

1- Nous avons ici deux plans de cisaillement. La force de cisaillement (effort tranchant) appliquée à la section cisaillée, au niveau d'un seul plan de cisaillement est:

$T_1 = F/2$

S'il y a n est rivets.

$T_1 = (F/2)/n$

La contrainte de cisaillement sur la section cisaillée (revenant à chaque rivet) est

$$\tau_1 = \frac{F/2n}{A_1}; \quad A_1 = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Avec la condition de résistance

$$\tau_1 \leq [\tau]$$

on écrit

$$\tau_1 = \frac{2F}{n\pi(d)^2} \leq [\tau]$$

$$\tau_1 = \frac{2x4.10^3}{2\pi(17)^2} = 440,6kg/cm^2$$

$$\tau_1 = 440,6kg/cm^2 \qquad \leq \qquad [\tau] = 900kg/cm^2$$

Alors la résistance des rivets est vérifiée.

2- La contrainte normale dans une des deux tôles à la section dangereuse est

$$\sigma_{1-1} = \frac{N}{A_{1-1}} = \frac{F/2}{e(5-2x1,7)}$$

$$\sigma_{1-1} = \frac{2.10^3}{1,6.e} \leq 1200$$

$$\Rightarrow e \geq 1,04cm$$

Donc l'épaisseur minimale que devrait avoir chacune de deux tôles est au moins égale à 10,4 mm.

Exercice 10

examinez ce que devient le volume du métal soumis à des déformations élastiques, on peut considérer un volume parallélépipédique de longueur l et de section a × b. Un effort F appliqué parallèlement à la longueur l engendre un effort unitaire :

Solution de l'exercice 10

$$F_0 = F/(a \times b)$$

et on a :

$$l \rightarrow l + \Delta l = l + l \times (F_0 /E)$$
$$a \rightarrow a - \Delta a = a + \nu \times a \times (F_0 /E)$$
$$b \rightarrow b - \Delta b = b + \nu \times b \times (F_0 /E)$$

et donc :

$$V_0 = l \times a \times b$$
$$V = (l + \Delta l) \times (a - \Delta a) \times (b - \Delta b)$$
$$V = l \times a \times b \times [1 + (F_0 /E)] \times [1 - \nu \times (F_0 /E)]^2$$

soit :

$$V = V_0 \times [1 + (F_0 /E)] \times [1 - \nu \times (F_0 /E)]^2$$

ou :

$$V = V_0 \times \{1 + [(1 - 2\nu) \times F_0 /E] - [\nu \times (2 - \nu) \times (F0 /E)2] + [\nu 2 \times (F0 /E)3]\}$$

Pour de l'aluminium, avec $\nu = 0{,}34$, et sous une charge unitaire de 600 MPa on aurait :

$$V = V_0 [1 + 2{,}72 \cdot 10- 3 - 4{,}08 \cdot 10- 5 + 7{,}1 \cdot 10- 8]$$

Pour du fer sous une charge unitaire de 1 000 MPa avec $\nu = 0{,}3$ on aurait :

$$V = V_0 [1 + 1{,}90 \cdot 10^{-3} - 1{,}16 \cdot 10^{-5} + 9{,}72 \cdot 10^{-9}]$$

On voit que, E étant toujours très grand par rapport à F_0, on peut réduire pratiquement cette formule à :

$$V = V_0 [1 + (F_0 /E) \times (1 - 2\nu)]$$

formule qui permet de constater que, lors de la déformation élastique, le volume du métal resterait constant si $\nu = 0{,}5$. Or nous avons vu que pour les métaux polycristallins ν est inférieur à 0,5; on aura donc $1 - 2\nu > 0$ ce qui montre que la déformation élastique sous effort unidirectionnel d'un métal s'accompagne d'une augmentation (réversible) de son volume.

Exercice 11

Vecteur contrainte sur une facette

En un point M d'un solide, dans le repère orthonormé $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$, le tenseur des contraintes a pour valeur :

$$[\sigma(M)] = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 20 \\ -40 & -60 & 50 \\ 20 & 50 & 40 \end{bmatrix} \text{ MPa}$$

1. Faire un dessin qui montre la signification physique des composantes du tenseur des contraintes.
2. Soit le vecteur unitaire, $\vec{n}$ de composantes :

$$\{n\} = \frac{1}{3}\begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix}.$$

Sur la facette, $\vec{n}$:

(a) Calculer les composantes du vecteur contrainte $\vec{T}(M, \vec{n})$.

(b) Calculer la contrainte normale σ_n.

(c) Calculer les composantes du vecteur cisaillement $\vec{\tau}_n$, puis le module τ_n du cisaillement.

Solution de l'exercice 11

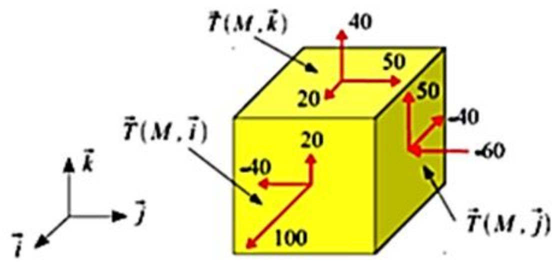
Solution

Représentation graphique des composantes du tenseur des contraintes

Les composantes en MPa du tenseur des contraintes dans le repère $\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\}$:

$$\text{composantes sur} \left\{ \begin{array}{c} \vec{\imath} \\ \vec{\jmath} \\ \vec{k} \end{array} \right. \begin{array}{ccc} \vec{T}(M,\vec{\imath}) & \vec{T}(M,\vec{\jmath}) & \vec{T}(M,\vec{k}) \\ \end{array} \begin{bmatrix} 100 & -40 & 20 \\ -40 & -60 & 50 \\ 20 & 50 & 40 \end{bmatrix}$$

sont représentées sur la figure ci-dessous.



Facette $\vec{n}$

Les composantes du vecteur contrainte sont (formule de Cauchy : $\{T(M,\vec{n})\} = [\sigma(M)]\{n\}$) :

$$\begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & -40 & 20 \\ -40 & -60 & 50 \\ 20 & 50 & 40 \end{bmatrix} \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 60 \\ -60 \\ 200 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 20 \\ -20 \\ 66.67 \end{Bmatrix} \text{MPa}$$

On en déduit la contrainte normale ($\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M,\vec{n})$) :

$$\sigma_n = \frac{1}{9}(60 - 120 + 400) = \frac{340}{9} = 37.78 \text{ MPa}$$

les composantes du vecteur cisaillement ($\vec{\tau}_n = \vec{T}(M,\vec{n}) - \sigma_n \vec{n}$) :

$$\begin{Bmatrix} \tau_{nx} \\ \tau_{ny} \\ \tau_{nz} \end{Bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 60 \\ -60 \\ 200 \end{Bmatrix} - \frac{340}{9}\frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7.41 \\ -45.19 \\ 41.48 \end{Bmatrix} \text{MPa}$$

et le module du cisaillement :

$$\tau_n = \|\vec{\tau}_n\| = \sqrt{7.41^2 + (-45.19)^2 + 41.48^2} = 61.78 \text{ MPa}$$