CHAPITRE 0

ELÉMENTS DE LOGIQUE ET RAISONNEMENTS.

Dans ce chapitre, nous nous limiterons à présenter les premiers éléments de la logique classique et des arguments, car ils sont nécessaires même si cela ne fait pas dans programme du cours d'analyse 1.

Définition 0.1. (Proposition)
On appelle proposition logique (ou assertion logique) toute relation $\mathcal{P}$ qui est soit vraie soit fausse.

1. Quand la proposition est vraie, on lui affecte la valeur 1
2. Quand la proposition est fausse, on lui affecte la valeur 0.

Ces valeurs sont appelées (Valeurs de vérité de la proposition).
Ainsi, pour définir une proposition logique, il suffit de donner ses valeurs de vérités. En général, on met ces valeurs dans un tabeau qu'on nommera table de vérités ou tableau de vérités.

Remarque 0.1. Le fait qu'une proposition ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1 provient d'un principe fondamental de la logique classique qui est : Le principe du tiers exclu, à savoir qu'une proposition logique ne peut pas être vraie et fausse à la fois.

Exemples 0.1.
1. Tout entier naturel divisible par 8 est divisible par 2.
2. $3 + 4 = 7$.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 > 0$.
4. Il existe un réel x tel que $x^2 = -1$.

0.1 Opérations Logiques

Définition 0.2. (La négation $\neg$)
Etant donnée une proposition logique $\mathcal{P}$, on appelle négation de $\mathcal{P}$ la proposition logique $\overline{\mathcal{P}}$, qu'on note aussi $\neg\mathcal{P}$, qui est fausse quand $\mathcal{P}$ est vraie et qui est vraie quand $\mathcal{P}$ est fausse, donc on peut la représenter comme suit :

$\mathcal{P}$	$\overline{\mathcal{P}}$
1	0
0	1

TABLE 1 – Tableau de vérités.

Définition 0.3. (La Conjonction $\wedge$)

Etant donnees deux propositions logiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on appelle conjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, la proposition logique $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ qui est Vraie quand $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies a la fois.

Propriétés 0.1. Soit $\mathcal{P}$ une proposition logique, alors $\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{P}}$ est une proposition fausse.

Définition 0.4. (La Disjonction $\vee$)

Etant donnees deux propositions logiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on appelle disjonction de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, la proposition logique $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ qui est Vraie si l'une des propositions logiques $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie.

Propriétés 0.2. Soit $\mathcal{P}$ une proposition logique, alors $\mathcal{P} \wedge \overline{\mathcal{P}}$ est une proposition fausse et $\mathcal{P} \vee \overline{\mathcal{P}}$ est toujours vraie.

Propriétés 0.3. (Règles de De Morgan)

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions logiques, alors :

1. $\overline{(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})} \Leftrightarrow (\overline{\mathcal{P}} \vee \overline{\mathcal{Q}})$.
2. $\overline{(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})} \Leftrightarrow (\overline{\mathcal{P}} \wedge \overline{\mathcal{Q}})$.

Définition 0.5. (L'Implication $\Rightarrow$)

Etant donnees deux propositions logiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, on note $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$, la proposition logique qui est Fausse si $\mathcal{P}$ est Vraie et $\mathcal{Q}$ est Fausse. Quand la proposition $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est Vraie, on dit que la proposition $\mathcal{P}$ implique la proposition $\mathcal{Q}$.

Remarque 0.2. La table de vérité de l'implication nous indique comment procéder pour montrer que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie : on suppose que $\mathcal{P}$ est vraie et on montre que $\mathcal{Q}$ est vraie. En effet, si $\mathcal{P}$ est fausse l'implication est de toute façon vraie et n'y a rien à prouver. Nous utiliserons souvent le vocabulaire suivant, si $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie, nous dirons : si $\mathcal{P}$ alors $\mathcal{Q}$. L'assertion $\mathcal{P}$ est alors appelée une condition suffisante pour $\mathcal{Q}$, et $\mathcal{Q}$ une condition nécessaire pour $\mathcal{P}$.

Définition 0.6. (La réciproque $\Leftarrow$)

Etant donnees $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions logiques, on appelle la Reciroque de l'implication $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ la proposition $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Définition 0.7. (L'Equivalence $\Leftrightarrow$)

On dit que deux propositions logiques $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont logiquement equivalentes, ou equivalentes, si elles ont les mêmes valeurs de verite. On note : $\mathcal{Q} \Leftrightarrow \mathcal{P}$.
les tableaux de verites des propositions précédentes sont :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{Q} \Leftrightarrow \mathcal{P}$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	1

TABLE 2 – Tableaux des vérités.

Remarque 0.3. Pour prouver une équivalence, nous disposons de deux possibilités. La première consiste à raisonner par équivalences successives, en général plus simples à montrer. Cependant, ce type de preuve n'est pas toujours à privilégier, on peut utiliser le fait que $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ est équivalente à $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$. Montrer $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ séparément s'appelle raisonner par double implication. Ce raisonnement doit être annoncé comme tel au début de la démonstration.

0.1.1 Propriétés des opérations logiques

Propriétés 0.4. (Propriétés des opérations logiques)
Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois propositions logiques, alors

1. $\overline{\overline{\mathcal{P}}} \Leftrightarrow \mathcal{P}$.
2. $\mathcal{P} \wedge \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \vee \mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{P}$.
3. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}})$ (la contraposée).
4. $(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\overline{\mathcal{Q}} \Rightarrow \overline{\mathcal{P}})$.
5. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \Leftrightarrow (\mathcal{P} \vee \overline{\mathcal{Q}})$.
6. $\Big((\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}\Big) \Leftrightarrow \Big(\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})\Big)$ (associativite de $\vee$).
7. $\Big((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}\Big) \Leftrightarrow \Big(\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})\Big)$ (associativité de $\wedge$).
8. $\Big((\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R}\Big) \Leftrightarrow \Big((\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})\Big)$ (distributivité de $\wedge$ par rapport à $\vee$).
9. $\Big((\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R}\Big) \Leftrightarrow \Big((\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})\Big)$ (distributivité de $\vee$ par rapport à $\wedge$).
10. $\Big((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}\Big) \Leftrightarrow \Big(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})\Big)$ (transitivité de $\Rightarrow$).

0.2 Quantificateurs

0.2.1 Le quantificateur pour tout $\forall$.

Une assertion $\mathcal{P}$ peut dépendre d'un paramètre x, par exemple $x^2 > 1$, l'assertion $\mathcal{P}(x)$ est vraie ou fausse selon la valeur de x.
L'assertion

$$\forall x \in X : \mathcal{P}(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $\mathcal{P}(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble X.
On lit pour tout x appartenant à X, $\mathcal{P}(x)$, sous entendu pour tout x appartenant à X, $\mathcal{P}(x)$ est vraie.

Exemples 0.2.
1. $\forall x \in \mathbb{R} :\ x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.
2. $\forall n \in \mathbb{N} :\ n^2 = 4$ est une assertion fausse.

0.2.2 Le quantificateur il existe $\exists$.

L'assertion $\forall\ x \in X : \mathcal{P}(x)$ est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de X pour lequel $\mathcal{P}(x)$ est vraie. On lit il existe x appartenant à X tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie.

Exemples 0.3.
1. $\exists x \in \mathbb{R} :\ x^2 = -1$ est une assertion fausse.
2. $\exists n \in \mathbb{Z} :\ n^2 = 4$ est une assertion vraie (par exemple pour $n = 2$).

0.2.3 La négation des quantificateurs

Propriétés 0.5. 1. La négation de $\forall x \in X : \mathcal{P}(x)$ est $\exists x \in X : \overline{\mathcal{P}(x)}$.

2. La négation de $\exists x \in X : \mathcal{P}(x)$ est $\forall x \in X : \overline{\mathcal{P}(x)}$.

Exemples 0.4. – La négation de $\forall x \in \mathbb{R} :\ x^2 \geq 1$ est $\exists x \in \mathbb{R} :\ x^2 < 1$.

– La négation de $\exists n \in \mathbb{Z} :\ n^2 = 4$ est $\forall n \in \mathbb{Z} :\ n^2 \neq 4$.

0.2.4 Raisonnements

1– (Raisonnement par contre-exemple :) Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\forall x \in X : \mathcal{P}(x)$ est vraie alors pour chaque x de X il faut montrer que $\mathcal{P}(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors, il suffit de trouver $x \in X$ tel que $\mathcal{P}(x)$ soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion $\forall x \in X : \mathcal{P}(x)$.

2– (Raisonnement direct :) On veut montrer que l'assertion $P \Rightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

3– (Contraposée :) Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante

$$P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P.$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \Rightarrow Q$, on montre en fait que si $\neg Q$ est vraie alors $\neg P$ est vraie.

4– (Absurde :) On veut montrer que l'assertion P est vraie. On suppose que $\neg P$ est vraie aussi et on cherche une contradiction.