CHAPITRE 1

# LES NOMBRES RÉELS.

## 1.1 Propriétés des nombres réels

### 1.1.1 les sous-ensembles usuelles de $\mathbb{R}$

Dans la suite, on note

1. L'ensemble des nombres entiers naturels est $\mathbb{N} = \Big\{0, 1, 2, 3, ...\Big\}$.
2. L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \Big\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\Big\}$.
   On note aussi $\mathbb{Z}^+ = \Big\{0, 1, 2, 3, ...\Big\} = \mathbb{N},\ \ \mathbb{Z}^- = \Big\{0, -1, -2, -3, ...\Big\}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
3. L'ensemble des nombres décimaux est $\mathbb{D} = \Big\{\dfrac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z},\ \ n \in \mathbb{N}\Big\}$.
4. L'ensemble des nombres rationnels est $\mathbb{Q} = \Big\{\dfrac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ \ q \in \mathbb{N}\Big\}$.

**Proposition 1.1.** *Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale périodique ou finie.*

**Exemple 1.1.** $\dfrac{3}{4} = 0,75$ $\dfrac{11}{7} = 1,571428571428...$ et note aussi $\dfrac{11}{7} = 1,\underline{571428}$.

**Remarque 1.1.** $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \{0\}$ et $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

**Proposition 1.2.** *Le nombre $\sqrt{2}$ ne peut s'écrire comme quotient de deux entiers.*

**Démonstration -** On utilisant raisonnement par l'absurde.
Remarquons tout d'abord que le carré d'un nombre pair est un nombre pair. De même, le carré d'un nombre impair est un nombre impair. Autrement dit, un nombre entier est pair si et seulement si son carré est pair.
Supposons qu'il existe deux entiers non nuls $p$ et $q$ tels que $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$. On peut supposer que la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible. On a donc $2 = \dfrac{p^2}{q^2}$ ou encore $p^2 = 2q^2$. Nécessairement $2$ divise $p^2$. Ceci n'est possible, d'après ce qu'on vient d'expliquer, que si 2 divise $p$. Il existe donc $p^{'} \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2p^{'}$ et alors $4p^{'2} = 2q^2$ ou encore $2p^{'2} = q^2$. On peut alors affirmer de la même façon que précédemment que $2$ divise $q^2$ et donc que $2$ divise $q$. L'entier $2$ est donc un diviseur commun à $p$ et $q$ ce qui vient contredire le fait que la fraction $\dfrac{p}{q}$ est irréductible. ∎

**Remarque 1.2.** $a-$ Il existe donc des nombres irrationnels. L'ensemble $\mathbb{Q}$ ne contient pas tous les nombres, d'où la nécessité d'introduire un nouvel ensemble $\mathbb{R}$ de nombres réels.

$b-$ Il existe d'autres méthodes pour définir l'ensemble des nombres réels à partir de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$, à savoir la méthode des coupures ou sections de Dedekind, ainsi que la méthode des suites fondamentales dans $\mathbb{Q}$. On montre que ces définitions aboutissent au même ensemble formel des nombres réels.

$c-$ Les rationnels et les irrationnels forment l'ensemble $\mathbb{R}$ et on a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

.

## 1.2 L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

**Définition 1.1.** L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est l'ensemble des abscisses des points dans un repère linéaire $(O, \vec{i})$.
les nombres réels positifs sont les abscisses des points à droite de $O$, et on note $\mathbb{R}_+$
les nombres réels négatifs sont les abscisses des points à gauche de $O$, et on note $\mathbb{R}_-$.

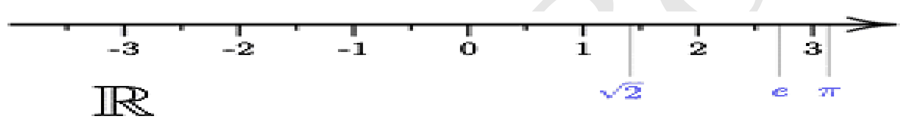


FIGURE 1.1 – Présentation des nombres réels.

## 1.3 Définition axiomatique des nombres réels.

### 1.3.1 Relations d'ordre et loi de composition interne

**Définition 1.2.** Soient $E,\ F$ deux ensembles non vides. Une relation binaire $\mathcal{R}$ de $E$ vers $F$ est définie par une partie $\mathcal{G}$ de $E \times F$ (appelée graphe de la relation). Si $(x, y) \in \mathcal{G}$, on dit que $x$ est en relation avec $y$ et on note $x\mathcal{R}y$.

**Définition 1.3.** Soit $E$ un ensemble non vide. Une relation binaire $\mathcal{R}$ de $E$ vers $E$ est dite :

1. Réflexive si $\forall x \in E :\ x\mathcal{R}x$,
2. Symétrique si $\forall x,\ y \in E :\ (x\mathcal{R}y) \Rightarrow (y\mathcal{R}x))$,
3. Antisymétrique si $\forall x,\ y \in E :\ (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x)) \Rightarrow x = y$,
4. Transitive si $\forall x, y, z \in E :\ (x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

**Définition 1.4.** Une relation d'ordre sur un ensemble non vide $E$ est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive. Lorsque $E$ est munie d'une relation d'ordre $\mathcal{R}$, on dit que $(E; \mathcal{R})$ est un ensemble ordonné.

**Exemples 1.1.**
- Si $E = \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ la relation $\leq$ est une relation d'ordre.
- Soit $E$ un ensemble non vide. La relation $\subset$ est une relation d'ordre sur les sous-ensembles de $E$.

**Définition 1.5.** Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. Si pour tous $x$ et $y$ dans $E$, on a $x\mathcal{R}y$ ou $y\mathcal{R}x$, on dit que $(E, \mathcal{R})$ est totalement ordonné.

**Exemple 1.2.** $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ muni de $\leq$ sont totalements ordonnés.

**Définition 1.6.** Soit $E$ un ensemble. On appelle loi de composition interne une application $\star$ de $E \times E$ dans $E$ :

$$\begin{cases} E \times E \to E, \\ (x, y) \mapsto x \star y, \end{cases}$$

**Exemple 1.3.** Si $E = \mathbb{N}$, la multiplication $\times$ ou l'addition $+$ des entiers forme une loi de composition interne. Ce n'est pas le cas de la soustraction $-$, car la différence de deux entiers positifs n'est pas toujours un entier positif.

### 1.3.2 Le corps commutatif $(\mathbb{R}, +, \times)$.

Nous acceptons qu'il existe un ensemble, noté $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$ et qui est muni de deux lois de composition internes, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ et qui vérifient les propriétés suivantes :

$(A_1)$ $\forall x,\ y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ (Commutativité de $+$).

$(A_2)$ $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$ (Associativité de $+$).

$(A_3)$ $\forall x \in \mathbb{R} : x + 0 = 0 + x = x$ (On dit que $0$ est l'élément neutre de $+$).

$(A_4)$ $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists(-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$ (tout réel $x$ admet un opposé, noté $-x$).

$(A_5)$ $\forall x,\ y \in \mathbb{R} : x \times y = y \times x$ (Commutativité de $\times$).

$(A_6)$ $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R} : x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ (Associativité de $\times$).

$(A_7)$ $\forall x \in \mathbb{R} : x \times 1 = x$ (On dit que $1$ est l'élément neutre de $\times$).

$(A_8)$ $\forall x,\ y \in \mathbb{R} : x \times (y + z) = x \times y + x \times z$ (Distributivité de $\times$ par rapport à $+$).

$(A_9)$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists(x^{-1}) \in \mathbb{R} : x \times x^{-1} = 1$ (tout réel non nul admet un inverse).

**Remarque 1.3.**
1. On résume les propriétés $(A_1)$–$(A_4)$ en disant que $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe commutatif.
2. On résume les propriétés $(A_1)$–$(A_8)$, en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau commutatif unitaire.
3. On résume les propriétés $(A_1)$–$(A_9)$, en disant que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

### 1.3.3 $\mathbb{R}$ est totalement ordonné.

D'après l'exemple 1.1, l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation binaire $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ (autrement dit $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble ordonné).
Si on remarque l'exemple 1.2 en disant que $\leq$ est une relation d'ordre total (ou encore que $(\mathbb{R}, \leq)$ est totalement ordonné). Ensuite, nous concluons que $(\mathbb{R}, +, \times, \leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné.

## 1.4 Majorants, Minorants, Bornes supérieure et inférieure.

### 1.4.1 Majorants, Maximum et Bornes supérieure

**Définition 1.7.** Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $A$ une partie non vide de $E$ et $M \in E$. On dit que :

1. $M$ est un majorant de $A$ (ou encore que $M$ majore $A$) si
$$\forall x \in A : \ x \leq M.$$
2. $M$ est le plus grand élément (ou le maximum) de $A$ si $M \in A$ et $M$ majore $A$, c'est-à-dire
$$M = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in A, \\ \forall x \in A : \quad x \leq M. \end{cases}$$
3. $M$ est la borne supérieure de $A$ si $M$ est le plus petit des majorants de $A$, c'est-à-dire
$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \ \forall x \in A : \ x \leq M, \\ (ii) \ \forall y \in E, \ (y < M) \Rightarrow \quad \exists x \in A : y < x \leq M. \end{cases}$$

### 1.4.2 Minorants, Minimum et Bornes inférieure

**Définition 1.8.** Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $A$ une partie non vide de $E$ et $m \in E$. On dit que :

1. $m$ est un minorant de $A$ (ou encore que $m$ minore $A$) si
$$\forall x \in A : \ m \leq x.$$
2. $m$ est le plus petit élément (ou le minimum) de $A$ si $m \in A$ et $m$ minore $A$, c'est-à-dire
$$m = \min A \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A, \\ \forall x \in A : \ m \leq x. \end{cases}$$
3. $m$ est la borne inférieure de $A$ si $m$ est le plus grand des minorants de $A$, c'est-à-dire
$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \ \forall x \in A : \ m \leq x, \\ (ii) \ \forall y \in E, \ (m < y) \Rightarrow \quad \exists x \in A : m \leq x < y. \end{cases}$$
4. L'ensemble $A$ est dit majoré (resp. minoré) s'il admet des majorants (resp. des minorants). $A$ est dit borné s'il est à la fois majoré et minoré.

### 1.4.3 Caractérisation des bornes sup et inf

**Proposition 1.3.** *Toute partie $A$ non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et on a :*
$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \ \forall x \in A : \ x \leq M, \\ (ii) \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A : \quad M - \varepsilon < a \leq M. \end{cases}$$
*Toute partie $A$ non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure et on a :*
$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} (i) \ \forall x \in A : \ m \leq x, \\ (ii) \ \forall \varepsilon > 0, \ \exists a \in A : \quad m \leq a < m + \varepsilon. \end{cases}$$

**Proposition 1.4.** *Le borne supérieure (inférieure) s'il existe est unique.*

**Remarque 1.4.** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors,

1. Si $M$ est un majorant de $A$ et $M \in A$, on a $\sup A = M$.
2. Si $m$ est un minorant de $A$ et $m \in A$, on a $\inf A = m$.
3. Si $A$ n'est pas majorante, on écrit par convention $\sup A = +\infty$.
4. Si $A$ n'est pas minorante, on écrit par convention $\inf A = -\infty$.

**Proposition 1.5.** *Soient $A$ et $B$ deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Alons nous avons que*

1. $\sup(-A) = \inf(A)$ *et* $\inf(-A) = -\sup(A)$.
2. *Si $A \subset B$, alors* $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq\leq \sup B$.
3. *Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cap B$ est bornée et que*
$$\max\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$
4. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ *et* $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

### 1.4.4 $\mathbb{R}$ est Archimédien.

**Théorème 1.1.** $\mathbb{R}$ *est Archimédien, c'est-à-dire que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x. \tag{1.1}$$

**Démonstration -** Si $x \leq 0$ on prend $n = 1$.
Supposons que $x > 0$. L'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N} : k \leq x\}$ est majoré par $x$ et contient $0$. Nous pouvons donc considérer sa borne supérieure $M = \sup A$. Prenons $\varepsilon = \frac{1}{2}$. D'aprés la proposition 1.3 il existe $k \in A$ tel que $M - \frac{1}{2} < k \leq M$ de sorte que $M < M + \frac{1}{2} < k + 1$ et que $k + 1 \notin A$ (sans quoi $M$ ne serait pas le supremum de $A$). Ainsi, $k + 1 > x$ et on prend $n = k + 1$. ∎

**Remarque 1.5.** La propriété affichée dans l'équation (1.1) peut être s'écrit aussi comme suit :

$$\forall \ell > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n\ell > x. \tag{1.2}$$

### 1.4.5 La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

**Définition 1.9.** On appelle droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, i.e.,

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

**Corollaire 1.1.** *Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

**Exemple 1.4.** Soit $A = \{\frac{n-1}{n+2} : n \in \mathbb{N}^*\}$. On a, pour tout $n \geq 1$, $\frac{n-1}{n+2} \geq 0$. Comme $0 \in A$, on en déduit que $0 = \min A = \inf A$.

Maintenant, montrons que $\sup A = 1$. Comme $\forall n \geq 1 : n-1 < n+2$, alors $\dfrac{n-1}{n+2} < 1$, c'est-à-dire 1 majore $A$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors nous avons que

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+2} \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < 1 - \frac{-3}{n+2} \Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 2.$$

Un tel $n$ existe par la propriété d'Archimède. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_n = \dfrac{n-1}{n+2} \in A$ où $n > \dfrac{3}{\varepsilon} - 2$ tel que $1 - \varepsilon < a_n < 1$. Donc $\sup A = 1$.

### 1.4.6 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**Théorème 1.2.** *Pour tous réels $x < y$, il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ (et donc une infinité) tel que $x < r < y$.*

On exprime cette propriété en disant que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

**Démonstration -** D'après le théorème 1.1, il existe un entier $q > 0$ tel que $\dfrac{1}{y-x} < q$ ainsi qu'un entier $n > 0$ tel que $qx < n$. L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}^* : qx < n\}$ est minorée par 1 et non vide. Admettons que tout ensemble non vide d'entiers, ici $A \subset \mathbb{N}$, possède un minimum. Notons $p = \min A$. On a donc $p - 1 \leq qx < p$ de sorte que $qx < p \leq qx + 1$ et $x < \dfrac{p}{q} \leq x + \dfrac{1}{q} < y$ par la première inégalité. ∎

**Lemme 1.1.** *Pour tous nombres réels $a, b$ $(a \leq b)$, il existe un nombre irrationnel $x$ tel que $a < x < b$ et on dit $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$.*

### 1.4.7 La partie entière.

**Définition 1.10.** Soit $x \in \mathbb{R}$, l'entier relative $n$ qui vérifie $n \leq x < n+1$ est dite la partie entière de $x$, et on le note par $[x]$ (ou $E(x)$), c'est-à-dire $[x] \leq x < [x] + 1$.

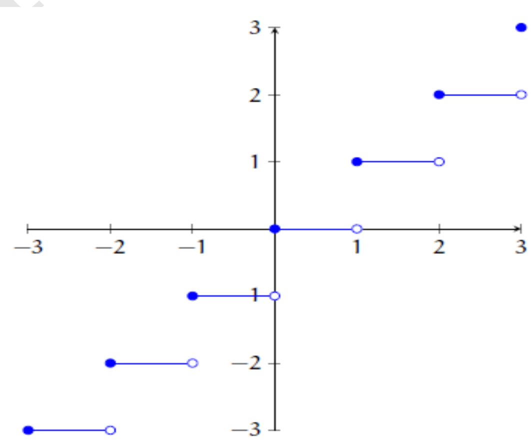


FIGURE 1.2 – Graphe de la fonction $x \mapsto E(x)$ dans l'intervalle $[-3, 3]$.

### 1.4.8 Valeur absolue.

**Définition 1.11.** Soit $x$ un nombre réel, on définit la valeur absolue de $x$ par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } \ x \geq 0\,; \\ -x & \text{si } \ x < 0. \end{cases}$$

**Proposition 1.6.** *Soit $x,\ y \in \mathbb{R}$, la valeur absolue vérifie les propriétés suivantes*

1. $|x| \geq 0; \quad |-x| = |x|; \quad |x| > 0 \Leftrightarrow x \neq 0.$
2. $\sqrt{x^2} = |x|.$
3. $|x| = \max\{-x, x\}.$
4. $|xy| = |x||y|.$
5. $|x+y| \leq |x| + |y|$ *(inégalité triangulaire).*
6. $||x| - |y|| \leq |x \pm y| \leq |x| + |y|.$
7. *Soit $a > 0$, alors,* $\begin{cases} (i) & |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a, \\ (ii) & |x| > a \Leftrightarrow x < -a \vee x > a. \end{cases}$

## 1.5 Les intervalles.

### 1.5.1 Propriété caractéristique.

**Définition 1.12.** Une partie $I$ de $\mathbb{R}$ est un intervalle si

$$\forall a \in I,\ \forall b \in I,\ \ \forall x \in \mathbb{R} : (a \leq x \leq b) \Rightarrow x \in I).$$

Soient deux réels $a$ et $b$ tels que $a \leq b$. Alors le tableau ci-dessous résume les types d'intervalles bornés ou non bornés.

| Intervalle | Ensemble des réels $x$ tels que... | Représentation graphique |
|---|---|---|
| $[a, b]$ fermé | $a \leq x \leq b$ |  |
| $[a, b[$ fermé à gauche, ouvert à droite | $a \leq x < b$ |  |
| $]a, b]$ ouvert à gauche, fermé à droite | $a < x \leq b$ |  |
| $]a, b[$ ouvert à gauche, ouvert à droite | $a < x < b$ |  |
| $[a, +\infty[$ fermé et non majoré | $x \geq a$ |  |
| $]a, +\infty[$ ouvert et non majoré | $x > a$ |  |
| $]-\infty, b]$ fermé et non minoré | $x \leq b$ |  |
| $]-\infty, b[$ ouvert et non minoré | $x < b$ |  |

# Bibliographie


[1] Jacques Dixmier. *Cours de mathématiques du premier cycle, première année*. Gauthier-Villars. **1986**.

[2] J. Quinet. *Cours élémentaires de mathématiques supérieurs, Tomes 1, 2, 3*. Dunod. Moscou. **1968**.

[3] J. M. Monier. *Analyse PCSI-PTSI*. Dunod, Paris 2003.

[4] Kada Allab. *élément d'analyse*. OPU. Alger. **1984**.

[5] N. Pisconov. *Calcul différentiel et intégral*. OPU. Alger. **1984.**

[6] S. Balac, F. sturm. *Algèbre et Analyse, cours de mathématiques de première année avec axercices corrigés*. Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne. **2003**.

[7] Jacques Dixmier. *Cours de mathématiques du premier cycle, première année*. Gauthier-Villars. **1986**.

[8] J. Quinet. *Cours élémentaires de mathématiques supérieurs, Tomes 1, 2, 3*. Dunod. Moscou. **1968**.

[9] J. M. Monier. *Analyse PCSI-PTSI*. Dunod, Paris 2003.

[10] Kada Allab. *élément d'analyse*. OPU. Alger. **1984**.

[11] N. Pisconov. *Calcul différentiel et intégral*. OPU. Alger. **1984.**

[12] S. Balac, F. sturm. *Algèbre et Analyse, cours de mathématiques de première année avec axercices corrigés*. Presses polytechniques et universitaires romandes, CH-1015 Lausanne. **2003**.

[7]

د. كوتي، ج. إِزرَا . اَلتحليل الريَاضي، اَلجزء الأَول. ترجمة يوسف عتيق. ديوَان المطبوعَات الجَامعية. اَلجزَائِر. 1987.

[8]

علي حميدة، عبد الوَهَاب بيبي . اَلتحليل الريَاضي، دروس و تمَارين محلولة. اَلجزء الثَاني. ديوَان المطبوعَات اَلجَامعية. اَلجزَائِر. 1988.