Chapitre 3

Les suites réelles

Définition 3.1. Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui associé à tout entier $n \in \mathbb{N}$ un nombre réel $u(n)$, noté aussi u_n. On parle alors de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général u_n, appelé aussi terme de rang n de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Remarque 3.1.

1. On peut aussi que la suite est définie sur une partie infinie $I \subset \mathbb{N}$, et on parle dans ce cas de la suite $(u_n)_{n\in I}$ indexée par I.
2. On peut définir les suites de deux façons différentes.
   $a)$ Soit directement par une formule, en général une fonction f, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$u_n = f(n),$$
   ç'est ce qu'on appelle une formulation explicite de la suite.
   $b)$ Soit en exprimant u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et en définissant une valeur initiale, comme par exemple :
   $$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n), \\ u_0 = \alpha(\text{est un connu}), \end{cases}$$
   ç'est ce qu'on appelle une formulation par récurrence.

Exemples 3.1.

1. Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{2}{n+1}$, donc, les termes premières sont $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = \frac{2}{3}, \ldots$
2. Soit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ telle que $v_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, alors $v_1 = 2, v_2 = \frac{9}{4}, \ldots$
3. On définie par récurrence la suite (w_n) comme suit
   $$\begin{cases} w_{n+1} = w_n^2 + 3, \\ w_0 = 1, \end{cases}$$
   alors on calcule les termes par récurrence, donc $w_1 = w_0^2 + 3 = 4, w_2 = w_1^2 + 3 = 19, \ldots$

3.1 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 3.2. Soit (u_n) une suite, alors

(i) (u_n) est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M$.

(ii) (u_n) est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq m$.

(iii) (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M.$$

3.2 Sens de variation d'une suite

Définition 3.3. Soit (u_n) une suite, alors

1. (u_n) est constante si $u_n = u_0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. (u_n) est stationnaire s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_k$ pour tout $n \geq k$.
3. (u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$.
4. (u_n) est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} > u_n$.
5. (u_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$.
6. (u_n) est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} < u_n$.
7. (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.
8. (u_n) est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemples 3.2.
1. La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$, car $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
2. La suite (n^2) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, car $u_{n+1} - u_n = 2n + 1 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. mais la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{N}^*$, (Disons qu'elle est alternée)

3.3 Deux suites classiques

Définition 3.4. (Suite arithmétique) On appelle suite arithmétique toute suite (u_n) pour laquelle il existe $r \in \mathbb{R}$ appelé raison de cette suite tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Définition 3.5. (Suite géométrique) On appelle suite géométrique toute suite (u_n) pour laquelle il existe $q \in \mathbb{R}$ appelé raison de cette suite tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Il est possible de donner la formulation explicite de chacune de ces suites grâce à la proposition suivante.

3.3.1 Formulation explicite de suites arithmétiques et géométriques

Proposition 3.1.
1. *Le terme général d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 est*

$$u_n = u_0 + nr.$$

2. *Le terme général d'une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 est*

$$u_n = u_0 \times q^n.$$

Proposition 3.2. 1. *Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est*

$$u_n = u_0 + nr.$$

2. *Le terme général d'une suite géométrique (v_n) de raison q et de premier terme v_0 est*

$$v_n = v_0 \times q^n.$$

3. *Pour une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0, on a*

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k = \frac{n}{2}(u_0 + u_n).$$

4. *Pour une suite géométrique (v_n) de raison q et de premier terme v_0, on a*

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} v_k = v_0\Big(\frac{q^n - 1}{q - 1}\Big).$$

3.4 Limite de suites

3.4.1 Suites convergentes

Définition 3.6. On dit qu'une suite (u_n) est convergente vers le réel l (ou converge vers l, ou tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Le nombre l est appelé la limite de la suite (u_n), et on note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

3.4.2 Suites divergentes

Définition 3.7. On dit qu'une suite (u_n) est divergente si tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), i.e.,

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow u_n > A,$$

ou

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow u_n < -A,$$

et on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ (ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

Remarque 3.2. une suite (u_n) est divergente si sa limite tend vers $\pm\infty$ ou elle n'admet pas de limite. Par exemple la suite $((-1)^n)_{n \geq 0}$ n'admet pas de limite, alors, elle est divergente.

3.4.3 Unicité de la limite

Proposition 3.3. *Si une suite est convergente, alors, sa limite est unique.*

Démonstration - On procède par l'absurde. Soit (u_n) une suite convergente ayant deux limites $l \neq l'$. Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \frac{|l-l'|}{2}$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$, il existe N_1 tel que $n \geq N_1$ implique $|u_n - l| < \varepsilon$.
De même $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l'$, il existe N_2 tel que $n \geq N_2$ implique $|u_n - l'| < \varepsilon$.
. Notons $N = \max(N_1, N_2)$, on a alors pour ce N :

$$|u_N - l| < \varepsilon \quad \text{et } |u_N - l'| < \varepsilon.$$

Donc, d'après l'inégalité triangulaire, on en déduire que

$$|l - l'| = |l - u_N + u_N - l'| \leq |l - u_N| + |u_N - l'| < 2\varepsilon < |l - l'| \; (contradiction).$$

Donc $l = l'$. ■

Lemme 3.1.
1. *Toute suite convergente est une suite bornée.*
2. *Toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est minorée.*
3. *Toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée.*

Démonstration -

1. Soit (u_n) une suite convergente de limite l. On peut associer à $\varepsilon = 1$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| < 1$, pour tout $n \geq N$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$, où $M = \max\{|l| + 1, |u_0|, |u_1|, ..., |u_{N-1}|\}$.
2. Supposons que un $u_n \to +\infty$. Soit $\varepsilon = 1 > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \Rightarrow u_n \geq 1.$$

   Donc, la suite est minorée par $M = \inf\{1, |u_0|, |u_1|, ..., |u_{N-1}|\}$.
3. On applique (2) à $-u_n$ pour obtenir (3).

■

Remarque 3.3. Attention, la réciproque de la propriété précédente est fausse, il suffit de considérer la suite définie par $((-1)^n)_{n\geq 0}$ qu'elle bornée par 1 mais n'est pas convergente.

Proposition 3.4.
1. *La suite arithmétiques (u_n) converge si et seulement si sa raison r est nulle.*
2. *La suite géométrique (q^n) converge si et seulement si $|q| < 1$ ou bien $q = 1$.*

3.4.4 Opérations sur les limites

Théorème 3.1. *Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles convergentes de limites respectives l et l', et soit $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. On a alors*

1. *$(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et sa limite est égale à $\lambda l + \mu l'$.*
2. *$(u_n \times v_n)$ est convergente et sa limite est égale à $l \times l'$.*

3. *Si $l' \neq 0$ alors il existe $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n \geq n_0}$ soit définie, et converge vers $\frac{l}{l'}$.*
4. *La suite (u_n) est convergente et sa limite est égale à $|l|$.*

Démonstration -

1. L'assertion (1) découle de la majoration suivante

$$|\lambda u_n + \mu v_n - (\lambda l + \mu l')| \leq \lambda |u_n - l| + \mu |v_n - l'|.$$

2. D'près le lemme 3.1, la suite (u_n) est bornée. Soit $M = \sup_{n \geq 0} |u_n|$. L'assertion (2) découle maintenant de la majoration suivante

$$|u_n \times v_n - l \times l'| = |u_n(v_n - l') + l'(v_n - l')| \leq M|v_n - l'| + |l'||u_n - l|.$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. La suite (v_n) converge vers $l' > 0$. Pour $\varepsilon = \frac{|l'|}{2}$, il existe donc N_1 tel que $|v_n| \geq \frac{|l'|}{2}$ pour tout $n \geq N_1$. Aussi, il existe $N_2 > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon |l'|^2}{2}.$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N} = \max N_1, N2$, l'inégalité triangulaire implique

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'}\right| = \left|\frac{v_n - l'}{v_n l'}\right| \leq \frac{2}{|l'|^2} |v_n - l'| < \varepsilon,$$

ce qui prouve que $\left(\frac{1}{v_n}\right)_{n \geq N_1}$ converge. L'assertion (3) suit maintenant de l'assertion (2).

4. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (u_n) converge vers l, il existe $N > 0$ tel que

$$\forall n \geq N, \quad |u_n - l| < \varepsilon.$$

L'inégalité triangulaire implique donc que pour tout $n \geq N$,

$$\Big||u_n| - |l|\Big| \leq |u_n - l| < \varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve.

■

3.4.5 Suites telles que $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \leq l < 1$

Théorème 3.2. *Soit (u_n) une suite de réels non nuls. On suppose qu'il existe un réel l tel que pour tout entier naturel n (ou seulement à partir d'un certain rang) on ait :*

$$\left|\frac{u_n}{u_n}\right| \leq l < 1.$$

Alors $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$.

3.5 Suites extraites d'une suite

Définition 3.8. Étant donnée une suite (u_n), on dit que (v_n) est une suite extraite ou encore une sous-suite, s'il existe une application $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Lemme 3.2. *Si $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) > n$. En particulier, la suite $(w_n) := \varphi(n)$ a pour limite $+\infty$.*

Démonstration - C'est vrai pour $k = 0$. On raisonne ensuite par récurrence : Si $n_k \geq k$, comme $n_{k+1} > n_k$ cela donne $n_{k+1} > k$ et donc, $n_{k+1} \geq k + 1$. ■

Remarque 3.4. Au lieu de suite extraite, on parle parfois de sous-suite.

Proposition 3.5. *Si (u_n) est une suite ayant pour limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ alors toute sous-suite de (u_n) converge vers la même limite. En particulier, si une suite (u_n) admet des sous-suites ayant des limites différentes alors (u_n) n'admet pas de limite.*

Démonstration - Nous donnons la preuve dans le cas où la limite est $l \in \mathbb{R}$. les autres cas sont laissés comme exercices. Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Soit (u_{n_k}) une sous-suite de (u_n). Soit k_0 tel que $n_{k_0} \geq n_0$, alors pour $k \geq k_0$ on a $n_k \geq n_0$ et donc $|u_{n_k} - l| < \varepsilon$. Ce qui prouve la convergence annoncée.
La deuxième remarque vient juste de la contraposée de la propriété établie ci-dessus. ■

Théorème 3.3. *(Bolzano-Weierstrass) De toute suite réelle bornée on peut en extraite une sous-suite convergente.*

3.6 Suites de Cauchy

Définition 3.9. une suite (u_n) est dite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists n_0 \in \mathbb{N}, \;\; \forall p, q \in \mathbb{N} : \quad p, q \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Exemples 3.3. les suites $\left(\frac{\sin(n)}{2^n}\right)$ et $(\cos(\frac{1}{n}))$ sont de Cauchy.

Lemme 3.3. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Démonstration - Pour $\varepsilon > 0$ fixé, soit n_0 tel que décrit ci-dessus. On a en particulier

$$|u_p - u_{n_0}| < \varepsilon, \text{pour tout } p \geq n_0.$$

Alors la suite (u_n) est bornée à partir de n_0. Elle est donc bornée. ■

Théorème 3.4. *(Critère de de Cauchy) Une suite numérique est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration - Si (u_n) tend vers l, alors (en faisant court, avec les notations habituelles maintenant), on a pour $p, q \geq n_0$

$$|u_p - u_q| \leq |u_p - l| + |u_q - l| < 2\varepsilon.$$

Donc elle est de Cauchy.
Réciproquement si (u_n) est de Cauchy alors elle est bornée d'aprèe le lemme 3.3 ci-dessus. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass elle admet une sous-suite convergente (u_{n_k}), de limite l. Il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $k \geq n_0$ on ait $|u_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$, et tel que pour $p, q \geq n_0$ on ait $|u_p - u_q| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $k \geq n_0$ on a $n_k \geq k$ (d'près lemme 3.2) et

$$|u_k - l| \quad \leq \quad |u_k - u_{n_k}| + |u_{n_k} - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui prouve que (u_n) converge vers l. ■

Théorème 3.5. *(Théorème des gendarmes) Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles, et supposons que à partir d'un certain rang on a*

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

1. *Si les suites (u_n) et (w_n) ont la même limite $l \in \mathbb{R}$, alors $\lim v_n = l$.*
2. *Si la suite (u_n) a pour limite $+\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.*
3. *Si la suite (w_n) a pour limite $-\infty$, alors $\lim v_n = -\infty$.*

Démonstration - Montrons le cas 1, les autres cas sont laissés comme exercices. Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait :

$$u_n \leq v_n \leq w_n, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon, \quad \text{et } |w_n - l| \leq \varepsilon.$$

En particulier on a

$$u_n \leq v_n \leq w_n, \quad l - \varepsilon \leq u_n, \quad \text{et } w_n \leq l + \varepsilon.$$

Ce qui donne $l - \varepsilon \leq v_n \leq l + \varepsilon$, i.e., $|v_n - l| \leq \varepsilon$. ■

Théorème 3.6. *(Théorème de la limite monotone) Toute suite monotone admet une limite. Plus précisément :*

1. *Toute suite (u_n) croissante majorée admet une limite finie, et*

$$\lim u_n = \sup\{u_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

2. *Toute suite (u_n) croissante non majorée tend vers $+\infty$.*
3. *Toute suite (u_n) décroissante minorée admet une limite finie, et*

$$\lim u_n = \inf\{u_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

4. *Toute suite (u_n) décroissante non minorée tend vers $-\infty$.*

3.6.1 Suites adjacentes

Définition 3.10. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si

1. une des suites est croissante, l'autre décroissante.
2. et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème 3.7. *Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont même limite.*

Démonstration - Supposons que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante. Montrons, par absurde, que $u_n \leq v_n$ pour tout n.
Supposons qu'il existe N tel que $\alpha = u_N - v_N > 0$, donc pour $n \geq N$ on a $u_n \geq u_N$ et $v_n \geq v_N$ par suite

$$u_n - v_n \geq u_N - v_N = \alpha > 0$$

pour tout $n \geq N$ ce qui est impossible car $u_n - v_n$ tend vers 0.
Par suite, $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0$, on en déduit que : La suite (u_n) est croissante majorée par v_0 donc convergente vers l.
La suite (v_n) est décroissante minorée par u_0 donc convergente vers l'.
La suite $(u_n - v_n)$ converge vers $l - l' = 0$. donc $l = l'$.

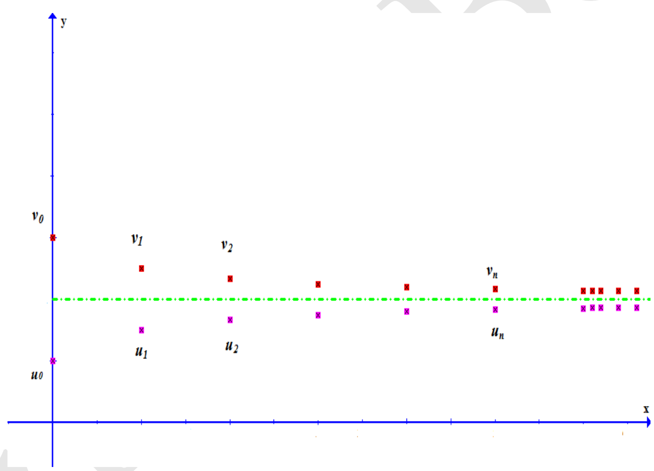

FIGURE 3.1 – Graphe des suites adjacentes.

■

Corollaire 3.1. *Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, de limite commune l telles que (u_n) croissanteet (v_n) décroissante, alors, on a*

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq l \leq v_n.$$

Exemples 3.4. Les suites données par $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$

$$u_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad v_n = 1 + \frac{1}{n}$$

sont adjacentes. En effet La suite $(u_n)_{n\geq1}$ est croissante car : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1)} \geq 0$.
La suite $(v_n)_{n\geq1}$ est croissante car : $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)} \leq 0$.
De plus $u_n - v_n = \frac{-2}{n} \to 0$, quand $n \to +\infty$. Donc $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$ sont adjacentes. On en déduit que $(u_n)_{n\geq1}$ et $(v_n)_{n\geq1}$ sont convergentes vers la même limite 1.

3.6.2 Suites $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 3.11. Soient I un intervalle fermé de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On suppose que $f(I) \subset I$. La suite (u_n) définie par $u_0 \in I$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = f(u_n),$$

est appelée suite récurrente.

Proposition 3.6. *Si f est une fonction continue et la suite récurrente (u_n) converge vers l, alors l est une solution de l'équation*

$$l = f(l).$$

Remarque 3.5. On dit que l est un point fixe de f.

3.6.3 Sens de variation de la suite (u_n)

Théorème 3.8. *Si $f : I \to I$ une fonction continue et croissante, alors quelque soit $u_0 \in I$, la suite récurrente (u_n) est monotone et converge vers $l \in I$ vérifiant $l = f(l)$.*

Remarque 3.6. On peut obtient, sans utiliser le théorème, que (u_n) est croissante, puisqu'on a alors $\forall x \in I : f(x) \geq x$.

Théorème 3.9. *Si $f : I \to I$ une fonction continue et décroissante, alors quelque soit $u_0 \in I$, la suite récurrente (u_n). Alors,*

1. *La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite l vérifiant $f \circ f(l) = l$.*
2. *La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite l' vérifiant $f \circ f(l') = l'$.*

Remarque 3.7. l n'est pas nécessairement égal à l'.

Exemples 3.5. Soient la fonction $f(x) = \sqrt{2x+3}$ définie dans $I = [-\frac{3}{2}, 4]$, et la suite récurrente $u_0 = \sqrt{3},\ u_{n+1} = f(u_n)$.
Alors comme $u_0 \in I$, f est continue et croissante sur I, donc (u_n) converge vers une limite l qui satisfaite $f(l) = l$. C'est à dire $l^2 - 2l - 3 = 0$, d'où $l = 3$. (voir le figure au-dessus)

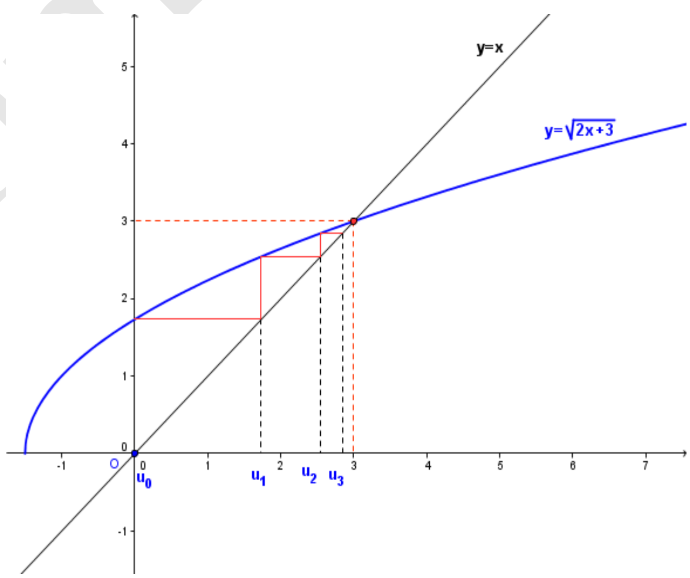

FIGURE 3.2 – Présentation graphique de l.