CHAPITRE 4

LIMITES D'UNE FONCTION DE VARIABLE RÉELLE

4.1 Généralités sur les aplications et les fonctions

Soient I et $J \subset \mathbb{R}$, et f une relation de I vers J. Alors, on a les concepts suivantes :

Définition 4.1. (Fonction) La fonction f définie par un ensemble de départ $I \subset \mathbb{R}$ et par un ensemble d'arrivée $J \subset \mathbb{R}$ est une relation de I vers J dans laquelle chaque élément de I appelé antécédent possède au plus un élément dans l'ensemble J appelé image. On écrit

$$\begin{aligned} f : I &\rightarrow J \\ x &\rightarrow y, \text{ tel que } y = f(x). \end{aligned}$$

Définition 4.2. (Domaine de définition) L'ensemble des éléments de I qui ont exactement une image dans J par la fonction f est appelé domaine de définition de I. On le note $\mathcal{D}_f$. i.e.,

$$\mathcal{D}_f = \{x \in I : \exists y \in J \text{ et } y = f(x)\}.$$

Définition 4.3. (Graphe d'une application) Le graphe, appelé encore courbe représentative, noté $\mathcal{C}_f$ d'une application $f : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points (x, y) du plan tels que x appartienne à $\mathcal{D}_f$ et $y = f(x)$ appartienne à $J \subset \mathbb{R}$, et on écrit

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) : x \in \mathcal{D}_f\}.$$

Définition 4.4. (Application) L'application f définie par un ensemble de départ I et par un ensemble d'arrivée J est une relation de I vers J dans laquelle chaque élément de I possède une image et une seule dans l'ensemble J.

Remarque 4.1.

1. Une application est donc une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble de départ choisi.
2. En d'autres termes, pour une application de f définie de I dans l'ensemble J, nous avons $\mathcal{D}_f = I$.
3. Une fonction est une application de $\mathcal{D}_f$ dans J.

Définition 4.5. Soit $A \subset I$, l'image directe de A par la fonction f est

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq J.$$

Définition 4.6. Soit $B \subset J$, l'image réciproque de B par la fonction f est

$$f^{-1}(B) = \{x \in B : f(x) \in B\} \subseteq I.$$

Définition 4.7. On appelle restriction de f à $E \subset I$, l'application $f_{|_E} : E \to J$ telle que

$$f_{|_E}(x) = f(x), \quad \forall x \in E.$$

Définition 4.8. On appelle prolongement de f à un ensemble F contenant I, toute application g de F vers J dont la restriction est f.

Exemples 4.1.

(1) Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$.
Alors $f(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$, $f^{-1}(]-4, 4[) =]0, 2[$ et $f^{-1}(]-\infty, 0[) = \emptyset$.

(2) L'application $f_{|_{\mathbb{R}^+}} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$ est une restriction de f à $\mathbb{R}^+$.

Définition 4.9. Soit $f : I \to J$ une fonction. Alors,

$a)$ On dit que f est injective si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in I^2 : \quad f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

$b)$ On dit que f est surjective si et seulement si :

$$\forall y \in J, \ \exists x \in I : \quad f(x) = y.$$

$c)$ On dit que f est bijective (ou f est une bijection de I sur J) si et seulement si : f est à la fois injective et surjective. i.e.,

$$\forall y \in J, \ \exists! x \in I : \ y = f(x).$$

Exemple 4.1. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$. n'est pas injective, car $f(1) = f(-1)$. Elle n'est pas non plus surjective car -1 n'a pas d'antécédent. En revanche la fonction $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ où $g(x) = x^2$ est injective. Enfin la fonction $g : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ définie par $h(x) = x^2$ est bijective.

Définition 4.10. Soit $f : I \to J$ une bijection. On appelle bijection réciproque la fonction, notée f^{-1}, de I dans J définie par : quel que soit $y \in J$, $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent dans I de y par f.

Proposition 4.1. *Soit $f : I \to J$ une bijection. On a*

1. *Pour tout (x, y), $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$*
2. *f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$*

4.1.1 Opérations sur les fonctions réelles

Soient I et $J \subset \mathbb{R}$, et $f, \ g$ deux fonctions de I vers J. Alors, on a

Définition 4.11.
- On dit que f est égale à g et on écrit $f = g$, si $\forall x \in I : f(x) = g(x)$.
- On dit que f est inférieure ou égale à g et on écrit $f \leq g$, si $\forall x \in I : f(x) \leq g(x)$.
- La fonction somme $f + g$ est définie par $\forall x \in I : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
- La fonction produit $f.g$ est définie par $\forall x \in I : (f.g)(x) = f(x)g(x)$.

– La fonction $\lambda.f$ où λ un scalaire, est définie par $\forall x \in I : (\lambda.f)(x) = \lambda.f(x)$.
– La fonction quotient $\frac{f}{g}$ est définie par $\forall x \in I : \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, où $g(x) \neq 0$.

Définition 4.12. Une application $f : I \to \mathbb{R}$ est dite lipshitzienne (ou k-lipshitzienne), s'il existe un réel positif k tel que

$$\forall (x, x') \in I^2 : |f(x) - f(x')| \leq k|x - x_0|.$$

Définition 4.13. (Composition de fonctions) Soient les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. On définit la fonction composée de f et g et on note $g \circ f$ la fonction définie sur I par

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \quad \forall x \in I.$$

Exemple 4.2. Soient $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x^2$, alors $(g \circ f)(x) = x^2 + 2x + 1$, et $(f \circ g)(x) = x^2 + 1$. Il est clair que $g \circ f \neq f \circ g$.

Proposition 4.2. *Soient $f : I \to J$ et $g : J \to L$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

4.1.2 Parité et périodicité d'une fonction

Définition 4.14. Un ensemble $I \subset \mathbb{R}$, est dit symétrique par rapport à l'origine 0 si

$$\forall x : \ x \in I \Rightarrow -x \in I.$$

Définition 4.15. (Fonction paire) La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite paire si

$$\forall x \in I : \ -x \in I, \text{ et } \ f(-x) = f(x).$$

Définition 4.16. (Fonction impaire) La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite impaire si

$$\forall x \in I : \ -x \in I, \text{ et } \ f(-x) = -f(x).$$

Définition 4.17. (Fonction périodique) La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite impaire s'il existe un réel p strictement positif tels que

$$\forall x \in I : \ x + p \in I, \ x - p \in I \text{ et } \ f(x + p) = f(x). \tag{4.1}$$

On appelle période de f le plus petit nombre positif p satisfait (4.1).

Remarque 4.2. Il est évident que $\forall k \in \mathbb{N}^* : \ f(x + kp) = f(x)$.

Exemples 4.2. – La fonction $f(x) = x^2$ définie dans $\mathbb{R}$ est paire,
– La fonction $g(x) = \frac{1}{x}$ définie dans $\mathbb{R}^*$ est impaire,
– La fonction $h(x) = x - [x]$ (la partie entière du réel x), est périodique de période 1. Les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont périodiques de période 2π.

4.1.3 Fonctions monotones et fonctions bornées

Définition 4.18. La fonction f définie sur I est dite :

- Croissante, si $\forall (x, x') \in I^2 : \; x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$,
- Décroissante, si $\forall (x, x') \in I^2 : \; x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$,
- Strictement croissante, si $\forall (x, x') \in I^2 : \; x \leq x' \Rightarrow f(x) < f(x')$,
- Strictement décroissante, si $\forall (x, x') \in I^2 : \; x \leq x' \Rightarrow f(x) > f(x')$,
- Monotone, si elle est croissante ou décroissante,
- Strictement monotone, si elle est strictement croissante ou strictement décroissante,
- Majorée, si $\exists M \in \mathbb{R}, \; \forall x \in I : \; f(x) \leq M$,
- Minorée, si $\exists m \in \mathbb{R}, \; \forall x \in I : \; f(x) \geq m$.

Théorème 4.1. *Toute fonction majoée (resp. minorée) admet une borne supérieure (resp. inférieure), notée* $\sup\limits_I f$ *(resp.* $\inf\limits_I f$*).*

4.1.4 Maximum et minimum d'une fonction

Définition 4.19. On dit que f admet un maximum (resp. minimum) au point $x_0 \in I$ si

$$\forall x \in I : \; f(x) \leq f(x_0) \quad (\text{resp. } \forall x \in I : \; f(x) \geq f(x_0)).$$

4.2 Limite d'une fonction

4.2.1 Notion de voisinage

Définition 4.20. Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il contient un intervalle ouvert $\theta \subset \mathbb{R}$ contenant x_0, i.e.

$$x_0 \in \theta \subset V.$$

Notons par $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages du point x_0. Ainsi, on peut reformuler les termes de la définition précédente de la manière suivante :

$$V \in \mathcal{V}(x_0) \Leftrightarrow \exists r > 0, \text{ telle que } \theta =]x_0 - r, x_0 + r[\subset V \quad .$$

Définition 4.21. Une partie $V \subset \mathbb{R}$ est dite voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$) si elle contient un intervalle ouvert de la forme $]a, +\infty[$ (resp. $]-\infty, a[$), $a \in \mathbb{R}$. Cela signifie que :
V est un voisinage de $+\infty$ (resp. de $-\infty$)$\Leftrightarrow \exists I =]a, +\infty[\subset V (]-\infty, a[\subset V.)$

Exemples 4.3.

1. L'intervalle fermé $[0, 2]$ est un voisinage de 1. En fait $[0, 2]$ est un voisinage de chaque $a \in]0, 2[$, mais il ne peut être ni voisinage de 0 ni de 2.
2. Le singleton $\{x_0\}$ n'est pas un voisinage de x_0.
3. Il est clair, d'après la définition, que si V et V' sont des voisinages de x_0, alors $V \cap V'$ est encore un voisinage de x_0.

4.2.2 Limite finie d'une fonction en un point

Définition 4.22. Soit f une fonction définie dans un voisinage V de x_0, sauf peut-être en x_0. On dit que f admet une limite $l \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in V :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note, dans ce cas $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$.

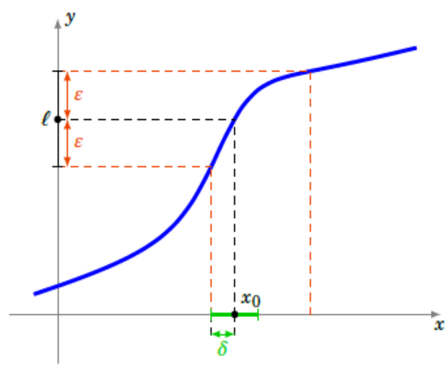

FIGURE 4.1 – Lien entre δ et ε.

Exemple 4.3. On définie la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$.
Au point $x = 1$, on a $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|f(x) - 2| = 3|x - 1| \leq \varepsilon$ si l'on a, à fortiori, $|x.1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Le bon choix sera alors de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Proposition 4.3. *Si f admet une limite au point x_0, cette limite est unique.*

Démonstration - Si f admet deux limites l et l' au point x_0, alors on a, par définition

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0\ :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta' > 0\ :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$, alors

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta'' > 0\ :\ |x - x_0| < \delta'' \Rightarrow |l - l'| < |f(x) - l| + |f(x) - l'| < \varepsilon.$$

Comme ε est quelconque alors, on tend ε vers 0 dans $|l - l'| < \varepsilon$, donc on obtient $l = l'$. ■

Exemple 4.4. On définie la fonction f sur $[0, 2]$ par $f(x) = x^2 + 1$.
Alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$|f(x) - 2| = 3 \Leftrightarrow |x - 1| < \varepsilon,$$

si l'on a, à fortiori, $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{3}$. Le bon choix sera alors de prendre $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Démonstration - Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\delta > 0$ tel que $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$. Or $|f(x) - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x^2 - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < x^2 < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \sqrt{1 - \varepsilon} - 1 < x - 1 < \sqrt{1 + \varepsilon} + 1$. Prenons $\delta = \sqrt{1 + \varepsilon} + 1 > 0$, et on a évidement $|x - 1| < \delta \Rightarrow \sqrt{1 - \varepsilon} - 1 < x - 1 < \sqrt{1 + \varepsilon} + 1$. Ceci donne $|x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 2| < \varepsilon$. ■

4.2.3 Caractérisation séquentielle

Théorème 4.2. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $x_0 \in \mathbb{R}$ (limite d'au moins une suite de points de I) et $l \in \mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ si et seulement si pour toute suite (u_n) d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.*

Démonstration -

" $\Rightarrow$ " Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, soit $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$, tel que

$$\forall x \in I \ : \ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

D'autre part, soit (u_n) une suite d'éléments de I telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N \ : \ |u_n - x_0| < \delta.$$

Comme les (u_n) appartiennent à I, on en déduit que

$$\forall n \geq N \ : \ |f(u_n) - l| < \varepsilon.$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = l$.

" $\Leftarrow$ " si $f(x)$ ne tend pas vers l lorsque x tend vers x_0, alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall \delta > 0, \ \exists u \in I : \ |u - x_0| < \delta \text{ et } |f(u) - l| > \varepsilon.$$

En donnant à δ les valeurs $\frac{1}{n}$, on construirait une suite (u_n) déléments de I telle que

$$\forall n > 1 : \ |u_n - x_0| < \delta \text{ et } |f(u_n) - l| > \varepsilon.$$

Il est clair que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = x_0$, mais la suite $f(u_n)$ ne converge pas vers l.

■

Remarque 4.3. D'après la théorème 4.2 précédente, s'ils existent deux suites (u_n) et (v_n) convergeant vers x_0 telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) \neq \lim\limits_{n\to+\infty} f(v_n)$, alors la limite de f n'existe pas en x_0.

Exemple 4.5. la fonction $f : x \to \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ nadmet pas de limite en 0, car les suites $u_n = \frac{1}{n} \to 0$ et $v_n = \frac{1}{2n+\frac{1}{2}} \to 0$, lorsque $n \to +\infty$, mais

$$f(u_n) = \sin(\pi n) = 0 \to 0, \text{ et } f(v_n) = \sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \to 1, \text{ lorsque } n \to +\infty.$$

4.2.4 Limite d'une fonction finie à droite et à gauche en un point

Définition 4.23. On dit que f admet une limite l à droite (respectivement à gauche) en x_0 si :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in V : \ 0 < x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon,$$

respectivement

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta > 0, \ \forall x \in V : \ 0 < x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

On note dans ce cas $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x) = l$, (resp $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x) = l$).

Théorème 4.3.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{\substack{x\to x_0\\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ <}} f(x) = l.$$

Exemple 4.6. Soit la fonction $f(x) = [x]$ définie sur $\mathbb{R}$. Alors $\lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = 1,\ \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = 0$. Donc n'a pas de limite en 1

4.2.5 Limite à l'infini et limite infinie

Définition 4.24.

1. On dit que f a pour limite l en $+\infty$, et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$, si
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$
2. On dit que f a pour limite l en $-\infty$, et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, si
$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ x < -\delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$
3. On dit que f a pour limite $+\infty$ en x_0, et on note $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, si
$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > A.$$
4. On dit que f a pour limite $-\infty$ en x_0, et on note $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, si
$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < -A.$$
5. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, et on note $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, si
$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ x > \delta \Rightarrow f(x) > A.$$
6. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $-\infty$, et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, si
$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ x < -\delta \Rightarrow f(x) > A.$$
7. On dit que f a pour limite $-\infty$ en $-\infty$, et on note $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, si
$$\forall A > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in V:\ x < -\delta \Rightarrow f(x) < -A.$$

4.2.6 Opérations sur les limites

Théorème 4.4. *Soient $f,\ g$ deux fonctions définies dans un voisinage V de x_0 et telle que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = l' \in \mathbb{R}$, alors nous avons*

1. $\lim_{x\to x_0} (f \pm g)(x) = l \pm l'$,
2. $\lim_{x\to x_0} (f.g)(x) = l.l'$,
3. $\lim_{x\to x_0} (\lambda.f)(x) = \lambda.l$,
4. $\lim_{x\to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'}$, *si* $l' \neq 0$,
5. $\lim_{x\to x_0} (|f(x)|) = |l|$,
6. $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$ *si* $l \geq 0$ *et* $n \in \mathbb{N}$.

De plus, si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ *où* $-\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$

Démonstration - On montre $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) = l + l'$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l$, il existe $\delta > 0$ et $\delta' > 0$ tels que

$$\forall x \in V,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2},\ \text{et } |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |g(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons $\bar{\delta} = \min\{\delta, \delta'\} > 0$, nous avons, $\forall x \in V$

$$\begin{aligned} |x - x_0| &\Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } |g(x) - l'| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Rightarrow |f(x) + g(x) - (l + l')| \leq |f(x) - l| + |g(x) - l'| \leq \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x) = l + l'$.
On montre $\lim\limits_{x\to x_0}(|f|)(x) = |l|$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in V,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$. Comme $\forall x \in V$, $||f(x)| - |l|| \leq |f(x) - l|$, on déduit

$$\forall x \in V,\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow ||f(x)| - |l|| < \varepsilon.$$

Finalement, on a $\lim\limits_{x\to x_0}(|f|)(x) = |l|$. ■

4.2.7 Limite d'une fonction composée

Proposition 4.4. *Soient* $f : I \to \mathbb{R}$ *et* $g : J \to \mathbb{R}$ *deux fonctions tel que* $f(I) \subset J$, $x_0 \in I$ *et* $(l, l') \in \mathbb{R}^2$. *Si* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ *et* $\lim\limits_{x\to l} g(x) = l'$, *alors* $\lim\limits_{x\to x_0}(g \circ f)(x) = l'$.

Démonstration - Soit $\varepsilon > 0$, Puisque $\lim\limits_{y\to l} g(y) = l'$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall y \in J :\ |y - l| < \delta \Rightarrow |g(y) - l'| < \varepsilon.$$

Pour ce $\delta > 0$, et puis, comme $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$, il existe $\delta' > 0$ tel que

$$\forall x \in I :\ |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - l| < \delta.$$

Donc, nous avons que

$$\forall x \in I :\ |x - x_0| < \delta' \Rightarrow |f(x) - l| < \delta \to |g(f(x)) - l'| < \varepsilon.$$

D'où $\lim\limits_{x\to x_0}(g \circ f)(x) = l'$. ■

Remarque 4.4. Lorsque les limites ne sont pas finies, les résultats précédents de le théorème ci-dessus restent valables. Mais il y a des situations où l'on ne peut rien dire sur les limites. Par exemple si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = -\infty$. Dans ces cas où il est impossible de conclure, nous disons que ce sont des formes indéterminées. Ces cas sont les suivants : $+\infty - \infty,\ 0 \times \infty,\ \frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ 1^\infty,\ 0^0$ et ∞^0.

4.2.8 Limites dans les inégalités

Théorème 4.5. *Soient $f,\ g$ et h des fonctions définies dans un voisinage V de x_0 et telle que*

1. *Si $\forall x \in V:\ f(x) \leq g(x),\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$, alors $l \leq l'$*
2. *Si $\forall x \in V:\ f(x) \leq g(x),\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, alors $l \leq l'$*
3. *(Théorème des gendarmes) : Si $\forall x \in V:\ f(x) \leq h(x) \leq g(x),\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$, alors $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$.*

Exemple 4.7. Soit la fonction $f(x) = \frac{\cos(x^2)}{\sqrt{x+1}}$ où $x > -1$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, car

$$\forall x \in]-1, +\infty[:\ -1 \leq \cos(x^2) \leq 1,$$

donc,

$$\forall x \in]-1, +\infty[:\ \frac{-1}{\sqrt{x+1}} \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}}.$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$, alors le théorème des gendarmes donne le reste.