DÉRIVABILITÉ DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE.

6.1 La dérivée en un point

Définition 6.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de I. On dit que f est dérivable en x_0 si la limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe et est finie. Cette limite est appelée derivée de f au point x_0 et on la note $f'(x_0)$.

Remarque 6.1. (Autres ecritures de la dérivée) En posant $h = x - x_0$ appelée accroissement de la variable x en x_0, on obtient $x = x_0 + h$ et la derivée s'écrit alors

1)− $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, où

2)− $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(x_0)h + h.\varepsilon(x)$, et $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(x) = 0$

Donc si $f'(x_0) \neq 0$, le nombre $f'(x_0).h$, est une valeur approchée de $f(x_0 + h) - f(x_0)$ et on peut écrire (si h assez petit)

$$f(x_0 + h) - f(x_0) \approx f'(x_0)h.$$

Exemple 6.1. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^3$. Alors f est dérivable au point 1, car

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1} (x^2 + x + 1) = 3.$$

Définition 6.2. (Dérivée à droite et à gauche) Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit x_0 un point de I. (ou bien une extrémité de I).

1. On dit que f est dérivable à droite en x_0 si la limite suivante existe

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

et on la note $f'_d(x_0)$.

2. On dit que f est dérivable à gauche en x_0 si la limite suivante existe

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

et on la note $f'_g(x_0)$.

Proposition 6.1. *Une fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à droite et à gauche en x_0 et $f'_d(0) = f'_g(0)$.*

Exemple 6.2. La fonction f definie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$, possede une derivée à droite $f'_d(0) = 1$ et une derivée à gauche $f'_g(0) = -1$ au point 0. En effet

$$f'_d(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{x}{x} = 1 \text{ et } f'_g(0) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{|x|}{x} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \frac{-x}{x} = -1.$$

Puisque $f'_d(0) \neq f'_g(0)$, alors la fonction f n'est pas derivable au point 0.

6.1.1 Interprétation géométrique de la dérivée

Soit f une fonction dérivable en x_0 et (C_f) la courbe représentative de f. L'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point $M_0(x_0, f(x_0))$ est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

$f'(x_0)$ représente la pente de la droite tengente à la courbe (C_f) au point $M_0(x_0, f(x_0))$.

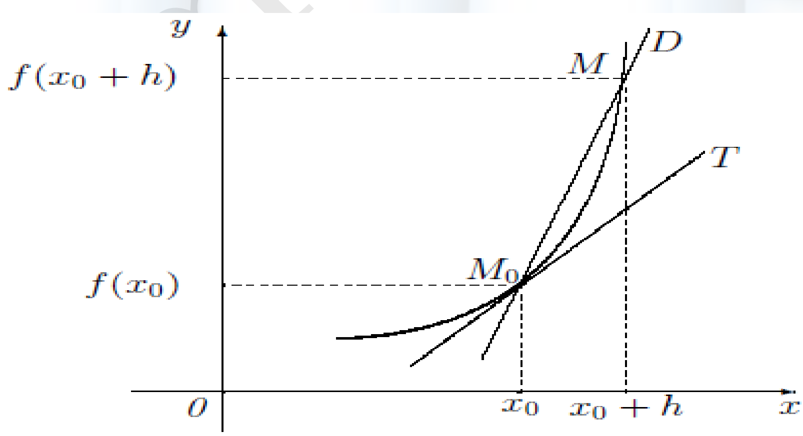


FIGURE 6.1 – la tangente (T) de (C_f) en M_0

6.1.2 Dérivabilité et continuité

Proposition 6.2. *Une fonction f dérivable en x_0 est forcement continue en x_0.*

Démonstration - En effet, d'après la remarque 6.1, on a

$$f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \varepsilon(h), \quad \text{où} \quad \lim_{h\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Donc, $\lim_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$. ■

Remarque 6.2. La réciproque est fausse, pour plus détail voir l'exemple 6.2.

6.1.3 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 6.3. On dit qu'une fonction f est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$. On définit alors la fonction dérivée

$$\begin{aligned} f' : I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x). \end{aligned}$$

Exemple 6.3. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2$. Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} (x + x_0) = 2x_0(finis).$$

Donc,

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x. \end{aligned}$$

6.1.4 Dérivée de fonctions usuelles

6.2 Opération sur les dérivées

Proposition 6.3. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, on a*

1. $(f+g)' = f' + g'$,
2. $(\lambda.f)' = \lambda.f'$,
3. $(f.g)' = f'.g + f.g'$,

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{Z}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad x > 0$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}, \quad x \in]0, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,\ x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1),\ (k \in \mathbb{Z})$

4. $\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2}$ *où* $f \neq 0$,
5. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'.sg-g'.f}{g^2}$, *où* $g \neq 0$.

Démonstration -

1) On a

$$\frac{(g+f)(x)-(g+f)(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0) + g'(x_0).$$

2) On a

$$\frac{(\lambda.f)(x)-(\lambda.f)(x_0)}{x-x_0} = \lambda.\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} \lambda.f'(x_0).$$

3) Puisque f est dérivable en x_0, alors continue en x_0, donc $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{(g.f)(x)-(g.f)(x_0)}{x-x_0} &= g(a).\left[\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right] + f(x).\left[\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right] \\ &\underset{x \to x_0}{\longrightarrow} f'(x_0).g(x_0) + f(x_0).g'(x_0). \end{aligned}$$

■

6.2.1 Dérivée d'une fonction composée

Proposition 6.4. *Si* f*est dérivable en* x_0 *et* g *est dérivable en* $f(x_0)$ *alors* $g \circ f$ *est dérivable en* x_0 *et de dérivée*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)).f'(x_0)$$

Démonstration - La preuve est basé à ce propierité

$$\frac{(g \circ f)(x)-(g \circ f)(x_0)}{x-x_0} = \frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)} \times \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \underset{x \to x_0}{\longrightarrow} g'(f(x_0)).f'(x_0).$$

■

Exemple 6.4. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin(x^3)$. Alors, on a

$$f'(x) = (x^3)'.\sin'(x^3) = 3x^2.\cos(x^3).$$

6.2.2 Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 6.1. *Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque. Si f^{-1} ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$*

$$f^{-1}(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Démonstration - On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x_0)) &= f^{-1}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0}{y - y_0} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}} \\ &= \lim_{y \to y_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

■

Exemple 6.5. Soit $f(x) = \ln(x), \quad x > 0$ on a $f^{-1}(x) = e^x, \quad x \in\in \mathbb{R}$, alors

$$f^{-1}(y_0) = f^{-1}(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\frac{1}{x_0}} = x_0 = e^{y_0}.$$

6.2.3 Dérivées successives

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et soit f' sa dérivée. Si la fonction $f' : I \to \mathbb{R}$ est aussi dérivable on note $(f')' = f''$ la dérivée seconde de f. Plus généralement on note

$$f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f'', ..., f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$$

Si la dérivée $n-$ ième $f^{(n)}$ existe on dit que f est n fois dérivable.

Théorème 6.2. *(Formule de Leibniz) Soient f, g deux fonctions n fois dérivables. Alors,*

$$(f.g)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^{n-i} f^{(n-i)} g^{(i)}.$$

6.2.4 Fonction de classe C^∞

Définition 6.4. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, soit n un entier tel que $n \geq 1$.

- Si les dérivées $f', f'', ..., f^{(n)}$ existent et si $f^{(n)}$ est continue sur I, on dit que f est de classe C^n sur I.
- On dit que f est de classe C^∞ sur I si toutes les dérivées $f^{(n)}$ existent et sont continues sur I.

Exemple 6.6. 1. Soit la fonction $f = \frac{1}{x},\ x \neq 0$. Alors on peut montre par recécurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n.n!}{x^{n+1}}.$$

2. Les fonctions sinus et cosinus sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et l'on a :

$$\sin^{(n)} x = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), \quad \text{et } \cos^{(n)} x = \cos(x + n\frac{\pi}{2}).$$

3. La fonction $x \mapsto e^x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
4. La fonction $x \mapsto \ln x$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

6.3 Extremum local, théorème de Rolle

6.3.1 Extremum local

Définition 6.5. Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- On dit que x_0 est un point critique de f si $f'(x_0) = 0$.
- On dit que f admet un maximum local en x_0 (resp. un minimum local en x_0) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\forall x \in I \cap J : \ f(x) \leq f(x_0) \quad \text{(resp. } f(x) \geq f(x_0)).$$

- On dit que f admet un extremum local en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.
- On dit que f admet un maximum global en x_0 si

$$\forall x \in I : \ f(x) \leq f(x_0).$$

Théorème 6.3. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

Remarque 6.3. La réciproque du théorème 6.3 est fausse. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $x_0 = 0$ n'est ni maximum local ni un minimum local.

Démonstration - Supposons que f admette un maximum local en x_0. Alors

$$\begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0, & \text{si } x \in]x_0 - \varepsilon, x_0] \\ \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leq 0, & \text{si } x \in [x_0, x_0 + \varepsilon[\end{cases}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Donc $f'(x_0) = f'_g(x_0) \geq 0$ et $f'(x_0) = f'_d(x_0) \leq 0$, donc $f'(x_0) = 0$. ∎

Méthode de la dérivée seconde

Théorème 6.4. *Soit I un intervalle ouvert, x_0 et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois telle que*

$-1)$ $f'(x_0) = 0$ (est un point stationnaire),

$-2)$ $f''(x_0)$ existe.

Alors

$-i)$ Si $f''(x_0) > 0$, f admet un minimum local en x_0,

$-ii)$ Si $f''(x_0) < 0$, f admet un maximum local en x_0,

$-iii)$ Si $f''(x_0) = 0$ ou devient infinie, on ne peut rien dire.

Exemple 6.7. Déterminer les extrémums de $f(x) = x(3 - x)^2$ sur $]-1, 4[$.
On a $f'(x) = (3 - x)(3 - 5x)$ et $f''(x) = 10x - 18$. Comme

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{3}{5},$$

donc $f''(3) = 14 > 0$ est un minimum. $f''(\frac{3}{5}) = -12 < 0$ est un maximum.

Remarque 6.4. Si $f''(x_0) = 0$, il faut pousser l'étude de f à l'aide de la formule de Taylor. Telle que f admet des dérivées d'ordre ≥ 3, nous verrons cela dans analyse 2.

6.3.2 Théorème de Rolle

Théorème 6.5. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que*

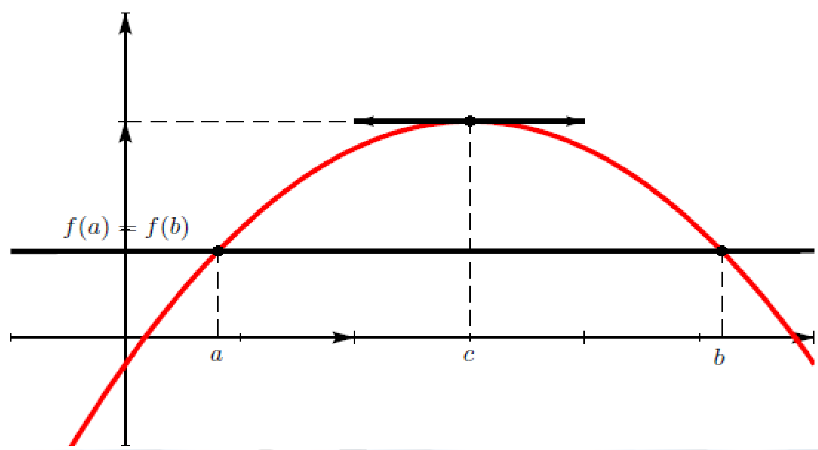
– *f est continue sur $[a, b]$,*

– *f est dérivable sur $]a, b[$,*

– *$f(a) = f(b)$.*

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 6.5. (Interprétation géométrique) il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale (voir le figure au-dessous).



Démonstration - Si f est constante sur $[a, b]$, le résultat est trivial, car alors $f'(x) = 0$, pour tout $x \in]a, b[$. Supposons donc f non constante. Etant continue sur $[a, b]$, f est bornée et atteint ses bornes, et l'on peut supposer que l'une au moins de ces bornes, la borne supérieure M par exemple, est différente de $f(a) = f(b)$. Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = M$. Comme c est alors un maximum (absolu) de f. Puisque f est dérivable en c, on a $f'(c) = 0$. ∎

Exemple 6.8. Soient $f(x) = |x|$. Le théorème de Rolle ne s'applique à f sur $[-1, 1]$, malgré elle est continue sur $[-1, 1]$, vérifiant $f(-1) = f(1)$. Car elle n'est pas dérivable sur $]-1, 1[$. Il n'existe pas de point $c \in]-1, 1[$, en lequel $f'(c) = 0$.

6.3.3 Théorème de Lagrange ou des accroissements finis

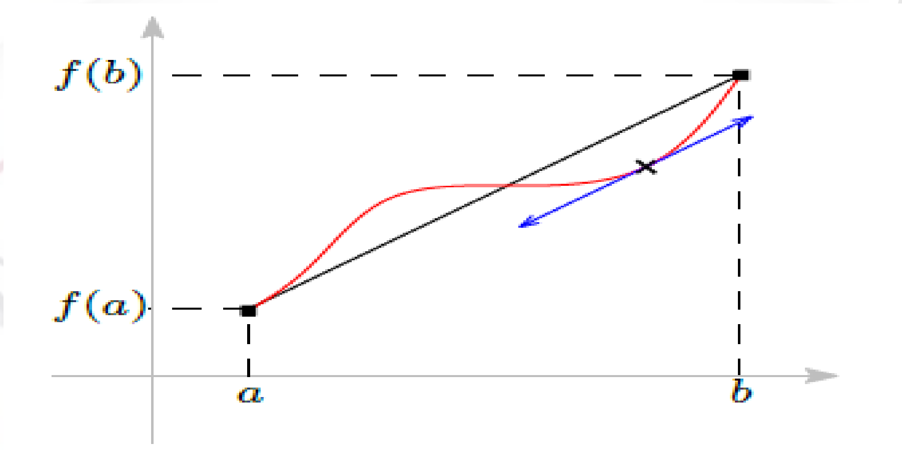
Théorème 6.6. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant*

– *f est continue sur $[a, b]$,*

– *f est dérivable sur* $]a, b[$,

Alors $\exists c \in]a, b[: \ f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Remarque 6.6. (Interprétation géométrique) il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. (voir le figure au-dessous).



Démonstration - Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à la fonction auxillaire $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

■

Corollaire 6.1. *Soit* $(a, b) \in \mathbb{R}^2$*, tel que* $a < b$*. Si* f *est une fonction continue sur* $[a, b]$*, dérivable sur* $]a, b[$ *et qu'il existe un réel* $M > 0$ *tel que*

$$x \in]a, b[: \quad |f'(x)| \leq M,$$

alors on a

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Exemple 6.9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin x| \leq |x|$. En effet :

Pour tout $x \neq 0$, il existe $(c \in I =]0, x[, \text{ou}]x, 0[)$ tel que $\frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \cos c \leq \sup_{t \in I} \cos t \leq 1$.

6.3.4 Théorème des accroissements finis généralisé

Théorème 6.7. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, dérivables sur $]a,b[$. Supposons que $g'(x) \neq 0$ sur $]a,b[$. Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Démonstration - On applique le théorème de Rolle à la fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - (g(x) - g(a)\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

■

6.3.5 Sens de variation d'une fonction dérivable

Les résultats précédents permettent d'établir un lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée. Nous avons le théorème suivant

Théorème 6.8. *Soit $(a,b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, tel que $a < b$. Si f est une fonction dérivable sur $]a,b[$. Alors*

(1) *est constante sur $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[$: $f'(x) = 0$,*

(2) *est croissante $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[$: $f'(x) \geq 0$,*

(3) *est décroissante $[a,b]$ si et seulement si $\forall x \in]a,b[$: $f'(x) \leq 0$,*

(4) *si $\forall x \in]a,b[$: $f'(x) > 0$, on a f est strictement décroissante sur $[a,b]$,*

(5) *si $\forall x \in]a,b[$: $f'(x) < 0$, on a f est strictement décroissante sur $[a,b]$.*

Remarque 6.7. La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse. Par exemple la fonction $x \to x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Démonstration - Prouvons par exemple (2).
Soient a et b deux points de I tels que : $a < b$, d'après le $T.A.F$, il existe $c \in]a,b[$ tel que : $f(a) - f(b) = (a-b)f'(c)$. Comme $f'(c) \geq 0$, Alors $f(a) \leq f(b)$ par suite f est croissante sur I.
Réciproquememt, si f est croissante sur $[a,b]$. Soit $x_0 \in I$, alors pour tout $x \in I - \{x_0\}$, on a

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0,$$

par passage à la limite on obtient $f'(x_0) \geq 0$. Ce qui prouve (2). Les autres propriétes se démontre de la même manière. ■

6.3.6 Théorème du prolongement dérivable

Théorème 6.9. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant*

1. *f est continue sur $[a, b]$,*
2. *f est dérivable sur $]a, b]$,*
3. *$f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ où $l \in \mathbb{R}$.*

Alors la fonction f est dérivable au point a et $f'(a) = l$.

Exemple 6.10. Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$. Alors f est prolongeable par dérivabilité en 0.

6.4 Règle de l'Hospital

6.4.1 Première règle de l'Hospital

Théorème 6.10. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que*

(1) $f(x_0) = g(x_0) = 0$,

(2) $\forall x \in I - \{x_0\} : \quad g'(x) \neq 0$.

Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, $(l \in \mathbb{R})$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l$.

Démonstration - Fixons $a \in I - \{x_0\}$ avec par exemple $a < x_0$. Soit $h : I \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = g(a)f(x) - f(a)g(x).$$

Alors, h vérifiant les conditions du théorème 6.3.2, (Théorème de Rolle), donc, il existe $c_a \in]a, x_0[$ tel que $h'(a) = 0$. Par conséquant $g(a)f'(c_a) - f(a)g'(c_a) = 0$. Comme g' ne s'annule pas sur $I - \{x_0\}$ cela conduit à $\frac{f(a)}{g(a)} = \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)}$. Comme $a < c_a < x_0$ lorsque l'on fait tendre a vers x_0 on obtient $c_a \to x_0$. Cela implique

$$\lim_{a \to x_0} \frac{f(a)}{g(a)} = \lim_{a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = \lim_{c_a \to x_0} \frac{f'(c_a)}{g'(c_a)} = l.$$

■

Exemple 6.11. $-1)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$.

$-2)$ $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$.

Remarque 6.8. La réciproque est en général fausse. En effet :
Soit $f(x) = x^2 \cos(\frac{1}{x})$ et $g(x) = x$. Alors, on a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$. Tandis que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim\limits_{x\to 0}[2x\cos(\frac{1}{x}) + \sin(\frac{1}{x})]$, n'existe pas car $\lim\limits_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

6.4.2 Deuxième règle de l'Hospital

Théorème 6.11. *Soient f, g deux fonctions definies et derivables dans un voisinage épointé I de x_0 fini ou infini) telles que*

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ *et* $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$

(2) $\forall x \in I : \quad g'(x) \neq 0.$

Si $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l$, *existe, finie ou infinie, alors*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l.$$

Exemple 6.12. (1) $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0.\infty$. (F.I.). Cependant, on peut ecrire $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{\infty}{\infty}$. En appliquant la deuxième règle de L'Hospital pour $f(x) = \ln x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$, alors, on obtient

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0.$$

Donc, $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x = 0$

(2) $\forall n \in \mathbb{N}^* : \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^n}{e^x} = \frac{\infty}{\infty}$. (F.I.). En repetant $n-$ fois la règle de L'Hospital, on obtient

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{n.x^{n-1}}{e^x} = ... = \lim_{x\to 0^+} \frac{n!}{e^x} = 0.$$

6.5 Fonctions convexes

Définition 6.6. Une fonction f définie sur un intervalle I est dite Convexe si pour tous $x_1, x_2 \in I$ et $t \in [0, 1]$,

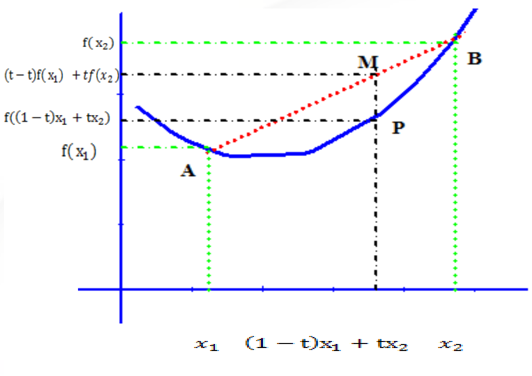
$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

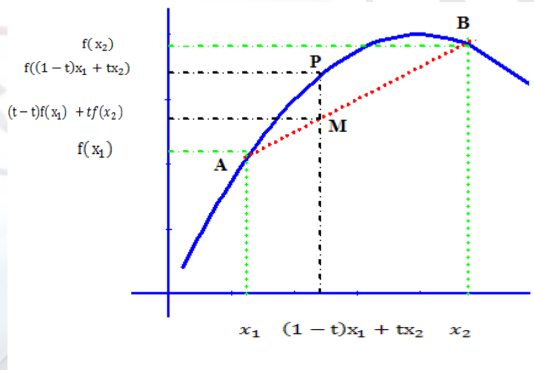
Concave si pour tous $x_1, x_2 \in I$ et $t \in [0, 1]$,

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Si les inégalités $\leq$. (resp. $\geq$) sont strictes on dit que f est strictement convexe (resp. strictement concave).

Remarque 6.9. (Interprétation graphique) Soient A et B deux points du graphe de f d'abscisses respectives x_2 et x_2. Alors un point quelconque M du segment $[A, B]$ a pour abscisse $(1-t)x_2 + tx_2$ avec $t \in [0, 1]$ et pour ordonnée $(1-t)f(x_2) + tf(x_2)$ et le point P du graphe de f d'abscisse $(1-t)x_2 + tx_2$ a pour ordonnée $f((1-t)x_2 + tx_2)$. Dire que f est convexe signifie donc que l'ordonnée de M est supérieure à l'ordonnée de P. On dit que la courbe est (au-dessous) de ses cordes.





Proposition 6.5. *Si f est une fonction continue deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I. Alors*

(1) *f est concave sur I si et seulement si $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$.*

(2) *f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$.*

Exemple 6.13. La fonction $x \mapsto |x|$ est convexe sur $\mathbb{R}$ puisque,

$$|tx_1 + (1-t)x_2| \leq t|x_1| + (1-t)|x_2|.$$

La fonction $x \mapsto \ln x$ est concave sur $]0, +\infty[$. En effet, sa dérivée seconde est négative sur $]0, +\infty[$.

Théorème 6.12. *(Caractérisation des fonctions convexes dérivables)*

(1) *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable, alors,*

$$(f \text{ convexe}) \Leftrightarrow (f' \text{ croissante sur } I).$$

(2) *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable, alors,*

$$(f \text{ convexe}) \Leftrightarrow (f'' \geq 0 \text{ sur } I).$$