Chapitre 2

Les nombres complexes.

2.1 Construction des nombres complexes

Définition 2.1. On définit les lois suivantes sur $\mathbb{R}^2$

$-1)$ $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$.

$-2)$ $(x, y) \times (x', y') = (xx' - yy', xy' + x'y)$.

On vérifie que $\mathbb{R}^2$ muni de ces deux lois est un corps commutatif noté $\mathbb{C}$.
Si $x \in \mathbb{R}$, on (identifie) x avec le complexe $(x, 0)$.
En notant $i = (0, 1)$, on vérifie que

$-1)$ $i^2 = (-1, 0) = -1$.

$-2)$ $i \times (x, 0) = (0, x)$.

On adopte alors les notations définitives

$-a)$ $(x, y) = (x, 0) + i \times (0, y) = x + iy$.

$-b)$ $\mathbb{C} = \{x + iy : \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } \quad i^2 = -1\}$.

2.1.1 Partie réelle, partie imaginaire d'un nombre complexe

Définition 2.2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$.

- Le réel x s'appelle la partie réelle, on note par $Re(z)$.
- Le réel y s'appelle la partie imaginaire, on note par $Im(z)$.
- $x + iy$ est la forme algébrique de z.

Proposition 2.1. *Soit $z, z' \in \mathbb{C}^2$ tels que $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Alors*

- *Le nombre complexe z est réel si et seulement si $Im(z) = 0$.*
- *Le nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $Re(z) = 0$.*
- *$z = z'$ si et seulement si $x = x'$ et $y = y'$.*
- *$z + z' = x + x' + i(y + y')$ et $z \times z' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.*
- *$-z = -x - iy$ est le symétrique de z pour la loi $+$.*
- *Si $(x, y) \neq (0, 0)$, le symétrique de z pour la loi $\times$ est $z^{-1} = -\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{1}{x^2+y^2}$.*

Remarque 2.1. Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, le nombre complexe $z = x + iy$ est représenté par un point $M(x, y)$, et on dit que z est l'affixe de M.
Les axes $(O, \vec{i})$ et $(O, \vec{j})$ sont appelés respectivement axe des réels et axe des imaginaires.

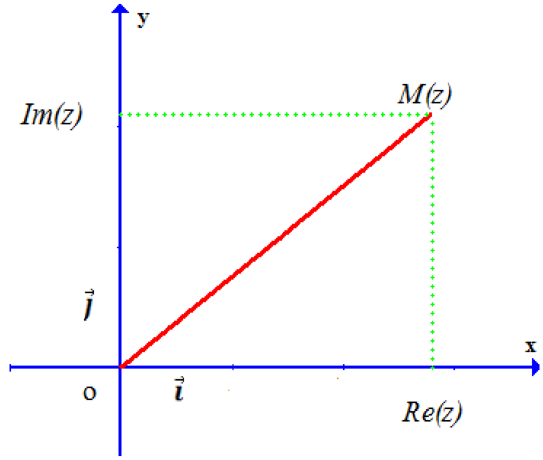

FIGURE 2.1 – Présentation d'Argand.

Exemple 2.1. Soit $z = 2 + 3i$ et $z' = 1 - 2i$. Alors, $z + z' = 3 + i$, $z \times z' = 5 - i$, $2z + z' = 5 - 4i$, $z^2 = -5 + 12i$, et $z^{-1} = \frac{2}{\sqrt{13}} - i\frac{3}{\sqrt{13}}$.

2.1.2 Conjugué, module d'un nombre complexe

Définition 2.3. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z = x + iy$.

- Le conjugué de z est le nombre comlexe noté $\overline{z} = x - iy$.
- Le module de z est le nombre réel positif noté $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

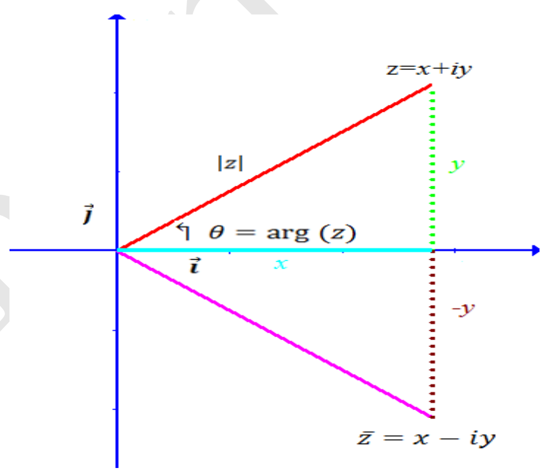

FIGURE 2.2 – Présentation géométrique de module, conjugué et argument de z.

Exemple 2.2. Soit $z = 2 + 3i$. Alors, $\overline{z} = 3 - i$ et $|z| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$.

Propriétés 2.1. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors,

1. $\overline{(z + z')} = \overline{z} + \overline{z'}$, $\quad \overline{(zz')} = \overline{z}\,\overline{z'}$ et $\overline{\overline{z}} = z$.
2. $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
3. $z + \overline{z'} = 2Re(z)$ et $z - \overline{z'} = 2iIm(z)$.

4. Si de plus $z' \neq 0$ on a $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$
5. $|z|^2 = z \times \overline{z} = x^2 + y^2$, $|\overline{z}| = |z| = |-z|$ et $|zz'| = |z||z'|$.
6. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
7. $Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|$ et $Im(z) \leq |Im(z)| \leq |z|$.
8. Si de plus $z' \neq 0$ on a : $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Démonstration - Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. Alors,

1. $\overline{(z + z')} = \overline{\left(x + x' + i(y + y')\right)} = x + x' - i(y + y') = (x - iy) + (x' - iy') = \overline{z} + \overline{z'}$.
2. $z = \overline{z} \Leftrightarrow 2iy = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$..
6. Si $|z| = 0$ alors $x^2 + y^2 = 0$ ce qui n'est possible que si $x = y = 0$. Réciproquement, si $z = 0$ alors $|z| = 0$.
7. Si $z = x + iy$ alors $Re(z) = x \leq |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.
8. Si $z' \neq 0$, alors $\frac{1}{z'} \times z' = 1$, d'après 5, on a donc $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$.

■

Théorème 2.1. *(L'inégalité triangulaire) Soient* $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. *Alors,*

1. $||z| - |z'|| \leq |z + z'| \leq |z| + |z'|$.
2. *Pour n complexes* $z_1, ..., z_n$, *on a*

$$|z_1 + z_2 + ... + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|.$$

Démonstration -

1. • Montrons que $|z + z'| \leq |z| + |z'|$. Nous avons,

$$\begin{aligned} |z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} = (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) \\ &= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} = |z|^2 + 2Re(zz') + |z'|^2. \end{aligned}$$

   Comme $Re(zz') \leq |zz'$, on a donc,
   $|z|^2 + 2Re(zz') + |z'|^2 \leq |z|^2 + 2|zz'| + |z'|^2 = (|z| + |z'|)^2$.
   D'où $|z + z'| \leq |z| + |z'|$, les deux quantites etant positives.

   • Montrons $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$.
   En appliquant ce qui précède à $|z| = |(z + z') - z'|$, on obtient

$$|z| = |(z + z') - z'| \leq |z + z'| + |-z'| = |z + z'| + |z'|.$$

   Donc, $|z| - |z'| \leq |z + z'|$.
   De même $|z'| - |z| \leq |z' + z| = |z + z'|$, d'où $||z| - |z'|| \leq |z + z'|$.

2. Par récurrence.

■

2.2 Forme trigonométrique d'un complexe

2.2.1 Argument d'un nombre complexe

Définition 2.4. Soient $z = x + iy$ un nombre complexe non nul et $M(x, y)$ sa image dans le plan muni du repère orthonorme $(O, \vec{i}, \vec{j})$, On appelle argument du complexe z, et on note $arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

Remarque 2.2. ◦ Si $\theta \in]-\pi, \pi]$ (l'argument principal) de z, alors $arg(z) = \theta + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

◦ Le module de z est la longueur OM, voir la figure 2.2.

Proposition 2.2. *Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul, et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors θ est un argument de z si et seulement si*

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad et \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

En particulier, on a $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, cette écriture s'appelle forme trigonométrique.

Démonstration - Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors, on a

◦ $z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$. Comme $\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 = 1$, donc il existe un point $M(\cos\theta, \sin\theta)$ sur le cercle trigonométrique $C(O, 1)$ d'équation $x^2+y^2 = 1$, où θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$, tels que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

◦ La réciproque est évidente.

■

Exemple 2.3. Soit $z = \sqrt{3} + i$, alors $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, et $\sin\theta = \frac{1}{2}$. Donc $arg(z) = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

2.2.2 Notation exponentielle. Forme trigonométrique

Exponentielle complexe

Définition 2.5. Soit θ un réel. On note : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.
e^{θ} est un complexe de module 1 et θ en est un argument.

Exemples 2.1. $-1)$ $1 = e^{i0}$, $\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

$-2)$ $\forall\theta \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z} : e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$.

$-2)$ Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $r = |z| \neq 1$, alors, $\exists\theta \in \mathbb{R} : \quad z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$.

Proposition 2.3. $-i)$ *Tout complexe de module 1 et d'argument θ peut se mettre à la forme $z = e^{i\theta}$.*

$-ii)$ *Pour tous θ et θ' réels, on a $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.*

Démonstration - On montre (ii). Pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$, par la définition 2.5 et les formules d'addition, on a

$$\begin{aligned} e^{i(\theta+\theta')} &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta'), \\ &= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta'). \end{aligned}$$

D'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned} e^{i\theta}.e^{i\theta'} &= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta'), \\ &= (\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta') = e^{i(\theta+\theta')}. \end{aligned}$$

Donc, $e^{i\theta}.e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$. ■

Corollaire 2.1. *Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, on a*

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}$$

Démonstration - Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, d'après la proposition 2.3, on a

$$e^{i\theta}e^{-i\theta} = e^{i(\theta-\theta)} = e^{i0} = 1.$$

Par conséquent, l'inverse du nombre complexe $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$.
Comme,

$$\begin{aligned} \overline{e^{i\theta}} &= \overline{(\cos\theta + i\sin\theta)} = (\cos\theta - i\sin\theta), \\ &= \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = e^{-i\theta}. \end{aligned}$$

D'où le résultat $e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = \overline{e^{i\theta}}$. ■

Proposition 2.4. *Soient θ et θ' deux réels, on a*

$$e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \ \theta = \theta' + 2k\pi.$$

Démonstration - Si $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ alors $e^{i(\theta-\theta')} = 0$ et $\theta - \theta' = 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent $\theta = \theta' + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. La réciproque est évidente. ■

2.2.3 Formule de Moivre.

Théorème 2.2. *(Formule de Moivre) Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :*

- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$,
- *c'est-a-dire :* $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = (\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

Démonstration - Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Montrons d'abord par récurrence la propriété pour $n \in \mathbb{N}$.

$-1)$ Si $n = O$, on a $e^{i0\theta} = e^{i0} = 1 = \left(e^{i\theta}\right)^0$. L'égalité est donc vraie au rang 0.

−2) Supposons l'égalité vraie au rang n et démontrons-la au rang $n+1$. D'après la proposition 2.3, on a

$$\begin{aligned} e^{i(n+1)\theta} &= e^{i(n\theta+\theta} = e^{in\theta}e^{\theta}, \\ &= e^{\theta}\left(e^{i\theta}\right)^{n}, \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \left(e^{i\theta}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

−3) Démontrons maintenant la propriété pour $n \in \mathbb{Z}_-$. On a alors $-n \in \mathbb{N}$ et on peut appliquer la relation que nous venons de prouver à l'entier $-n$. Cela donne $e^{i(-n)\theta} = \left(e^{i-\theta}\right)^{n}$. Mais d'après la proposition 2.4, on a $e^{i(-n)\theta} = e^{-in\theta} = \frac{1}{e^{in\theta}}$ et $\left(e^{-i\theta}\right)^{n} = \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{n}$, donc $\frac{1}{e^{in\theta}} = \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{n}$, et l'on a bien $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{n}$. La relation est alors démontrée pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

■

Remarque 2.3. Cette formule permet de calculer $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exemple 2.4. Calculer $\cos 3\theta \sin 3\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
D'après la formule de Moivre, on a

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i\sin 3\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta - 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta. \end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on aura D'après la formule de Moivre, on a

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \\ &= \cos^3\theta - 3\cos\theta(1-\cos^2\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= -\sin^3\theta - 3\cos^2\theta\sin\theta = -\sin^3\theta - 3(1-\sin^2\theta)\sin\theta \\ &= -2\sin^3\theta - 3\sin\theta. \end{aligned}$$

2.2.4 Formule de Euler.

Théorème 2.3. *Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}.$$

Démonstration - Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} e^{i\theta}+e^{-i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= 2\cos\theta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e^{i\theta}-e^{-i\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta + \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) \\ &= 2i\sin\theta. \end{aligned}$$

D'où les deux formules d'Euler. ■

Remarque 2.4. Linéariser une expression trigonométrique, c'est l'exprimer comme combinaison linéaire de $\sin(\theta), \sin(2\theta), \sin(3\theta), ..., 1, \cos(\theta), \cos(2\theta), \cos(3\theta), ...$

Exemple 2.5. Linéariser $\cos^3\theta \sin^3\theta$. On a, donc

$$\begin{aligned}\cos^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}[e^{i3\theta}+e^{-i3\theta}+3(e^{i\theta}+e^{-i\theta})] \\ &= \frac{1}{8}[2\cos 3\theta + 6\cos\theta] = \frac{1}{4}\cos 3\theta + \frac{3}{4}\cos\theta.\end{aligned}$$

Pour linéariser l'expression $\sin^3$, on utilisant $\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}\right)^3$.

2.3 Equations dans $\mathbb{C}$

2.3.1 Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 2.6. Soit z un nombre complexe non nul, et n un entier, ($n \geq 1$). On appelle racine n-ièmes de z, tout complexe ω vérifiant

$$\omega^n = z.$$

Exemple 2.6.
1. $1, \ -1$ sont Les racines deuxièmes de l'unité, car $(1)^2 = (-1)^2 = 1$.
2. $1, e^{\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{\frac{4\pi}{3}}$ sont Les racines deuxièmes de l'unité, car $1^3 = \left(e^{\frac{2\pi}{3}}\right)^3 = \left(e^{\frac{4\pi}{3}}\right)^3 = 1$.

Théorème 2.4. *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z \in \mathbb{C}^*$ ecrit sous la forme trigonometrique $z = re^{i\theta}$. Alors z admet n racines n-iemes distinctes, ce sont les complexes de la forme*

$$z_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})},$$

où $k \in \{0, 1, ..., (n-1)\}$.
En particulier, un nombre complexe non nul $z = re^{i\theta}$, admet deux racines carrées distinctes : $\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{\frac{i\theta}{2}}$.

Démonstration - Soit ω un racine n-ièmes de $z = r.e^{\theta}$. Posons $\omega = \rho.e^{i\alpha}$, alors, on a

$$\begin{aligned}\omega^n = z &\Leftrightarrow \left(\rho.e^{i\alpha}\right)^n = r.e^{i\theta} \\ &\Leftrightarrow \rho^n.e^{in\alpha} = r.e^{i\theta}.\end{aligned}$$

Par identification $\begin{cases} \rho^n = r \\ n\alpha = \theta + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt[n]{r} \\ \alpha = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}, k = 0, 1, ..., (n-1).$ Donc, les racines n-ièmes sont $\omega_k = \sqrt[n]{r}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$, où $k \in \{0, 1, ..., (n-1)\}$. ∎

Exemple 2.7. Déterminons les racines carrée de $z = \sqrt{3} + i$. Posons $Arg(z) = \theta$, alors, on a $|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$, et $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\sin\theta = \frac{\sqrt{1}}{2}$, c'est-à-dire $\theta = Arg(z) = \frac{\pi}{6}$. Donc, les racines carrée de z sont $z_0 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$ et $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}+\pi} = -z_0$.

Remarque 2.5. Soit $z = x + iy$. On peut chercher la racine par utilisation la forme algébrique de z, i.e., trouver $\omega = \alpha + i\beta$ tel que $\omega^2 = z$. On obtient, donc

$$\begin{aligned} \alpha^2 - \beta^2 &= x \\ 2\alpha\beta &= y \\ \alpha^2 + \beta^2 &= \sqrt{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Si on prend $z = \sqrt{3} + i$ comme l'exemple précédent, alors

$$\alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{3} \tag{2.1}$$
$$2\alpha\beta = 1 \tag{2.2}$$
$$\alpha^2 + \beta^2 = 2. \tag{2.3}$$

Par addition (2.1) et (2.3) et puis on compenser dans (2.2). Ce qui implique que

$$\begin{cases} \alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} \\ \beta = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{3}+2}} \end{cases} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \alpha = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} \\ \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{\sqrt{3}+2}} \end{cases}$$

2.3.2 Equations du second degré

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq 0$. On considere l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$ et on cherche ses eventuelles solutions complexes. On pose $\triangle = b^2 - 4ac$, $\triangle$ est appelé discriminant de l'équation. On a donc $\triangle \in \mathbb{C}$.

Théorème 2.5.
- *Si $\triangle = 0$, (E) admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$ et alors, on a*

$$az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2.$$

- *Si $\triangle \neq 0$, (E) admet deux solutions distinctes $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$, $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$ ou δ est un racines carrée de $\triangle$ (c'est-à-dire, $\delta^2 = \triangle$). On a, alors*

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Exemple 2.8. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^2 + 3(1 + i)z + 5i = 0$.
On a $\triangle = [3(1 + i)]^2 - 4 \times 5i = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$, donc $\delta = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 1 - i$, et donc les solutions de l'équation (E) sont

$$z_1 = \frac{-3(1 + i) - (1 - i)}{2} = -2 - i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-3(1 + i) + (1 - i)}{2} = -1 - 2i.$$