CHAPITRE 5

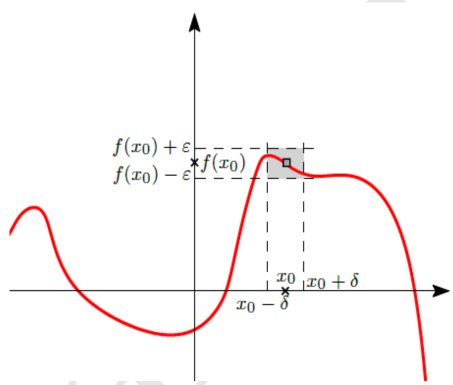
CONTINUITÉ D'UNE FONCTION DE VARIABLE RÉELLE

5.1 Continuité en un point

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Définition 5.1. On dit que f est continue au point x_0 de I si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$, c'est à dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon),\ \forall x \in V(x_0) :\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$



Exemple 5.1. Soit la fonction f définie par

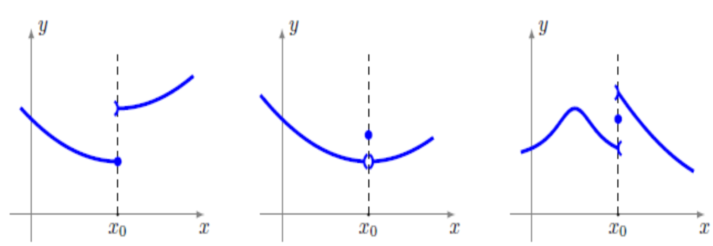
$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x^2}), & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Au point $x_0 = 0$, on a $|f(x) - f(0)| = |x\sin(\frac{1}{x^2})| \leq |x|$.
Étant donné $\varepsilon \in \mathbb{R}$, on choisira $\delta = \varepsilon$. Ainsi

$$|x| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq \varepsilon.$$

Donc f est continue au point $x_0 = 0$.

Remarque 5.1. Une fonction est continue sur un intervalle, si son graphe n'a pas de saut en x_0. Voici quelques fonctions ne pas continues en x_0.



5.1.1 Caractérisation séquentielle de la continuité

Proposition 5.1. *On dit que f est continue au point x_0 de I si et seulement si*

$$\forall (u_n) \subset V(x_0) : \lim_{n\to+\infty} u_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(x_0).$$

Démonstration - " $\Rightarrow$ " Suppose que f est continue en x_0. Soit la suit (u_n) telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en x_0, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in I : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Pour ce δ, comme (u_n) converge vers x_0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow \quad & |u_n - x_0| < \delta \\ \Rightarrow \quad & |f(u_n) - f(x_0)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ce signifie que $f(u_n)$ converge vers $f(x_0)$.
" $\Leftarrow$ " (On va montrer la contraposée). Supposons que f n'est pas continue en x_0 et montrons $\exists (u_n) \subset I$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\to} x_0$, mais $f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\not\to} f(x_0)$.
Par hypothèse, comme f n'est pas continue en x_0

$$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists x_\delta : |x_\delta - x_0| < \delta, \text{ et } |f(x_\delta) - f(x_0)| > \varepsilon_0.$$

On construit la suite (u_n) de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit dans l'assertion précédente $\delta = \frac{1}{n}$ et on obtient qu'il existe u_n (qui est $x_{\frac{1}{n}}$) tel que

$$|u_n - x_0| < \delta, \text{ et } |f(u_n) - f(x_0)| > \varepsilon_0.$$

La suite (u_n) converge vers x_0 alors que la suite $(f(u_n))$ ne peut pas converger vers $f(x_0)$. ■

5.1.2 Continuité à droite et continuité à gauche

Définition 5.2. On dit que la fonction f est continue à droite (resp. à gauche) au point x_0 de I si elle est définie au moins dans un ensemble de la forme $[x_0, x_0 + r[, r > 0$, (resp. de la forme $]x_0 - r, x_0[, r > 0$) et $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$, (resp. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$).

Définition 5.3.
- On dit qu'une application f admet une discontinuité de première espèce en x_0 si et seulement si elle n'est pas continue en x_0 et possède une limite à droite et une limite à gauche en x_0.
- Lorsque f n'est pas continue et n'admet pas de discontinuité de première espèce en x_0, on dit qu'elle admet une discontinuité de seconde espèce en x_0.

Exemples 5.1.
- La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 0, \\ 1, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

  admet une discontinuité de première espèce en 0.

– La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 1, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

admet une discontinuité de première espèce en 0.

Proposition 5.2. *Si une application f est continue en x_0, alors elle est bornée au voisinage de x_0.*

Démonstration - Comme f est continue en x_0, alors il existe $\delta > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \forall x \in V(x_0) : \ |x - x_0| < \delta \ &\Rightarrow \ |f(x) - f(x_0)| \leq 1 \\ &\Rightarrow \ f(x) \leq |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \leq |f(x_0)| + 1. \end{aligned}$$

Donc f est bornée au voisinage de x_0. ■

5.1.3 Prolongement par continuité

Définition 5.4. Soit f une fonction définie sur $I - \{x_0\}$ et admettant une limite finie l en x_0. On appelle prolongement par continuité de f en x_0 la fonction $\tilde{f}$, définie sur I par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq x_0, \\ l, & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

La fonction $\tilde{f}$ est continue en x_0.

Exemple 5.2. La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$ admet un prolongement par continuité en 1, car $\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x^2 + 2x + 1) = 3$. Elle est donc prolongeable par continuité en 1 et son prolongement est la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \neq 1, \\ 3, & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

5.1.4 Opérations algébriques sur les applications continues

Théorème 5.1. *Soient f, g deux fonctions continues en un point x_0 et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors les fonctions $f + g$, $\lambda.f$ et $f.g$ sont continues en x_0.*
Si de plus $g(x_0) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en x_0.

Démonstration - Les preuves sont similaires à celles de le théorème **??** ■

Proposition 5.3. *Si f est définie sur un voisinage V de x_0 et continue en x_0 et si g est définie sur un voisinage W de $y_0 = f(x_0)$ et continue en y_0, alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en x_0.*

Démonstration - La preuve est analogue à celle de la proposition **??** ■

5.2 Continuité sur un intervalle

Définition 5.5.
1. On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle ouvert $]a,b[$ si elle est continue en tout point de l'intervalle $]a,b[$.
2. On dit qu'une fonction est continue sur un intervalle fermé $[a,b]$ si elle est continue sur $]a,b[$ et continue à droite en a et à gauche en b.

Définition 5.6. (Continuité par morceaux) Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est continue par morceaux sur $[a,b]$ si et seulement s'il existe $\{a_0, a_1, ..., a_n\} \subset [a,b]$, $(n \in \mathbb{N}^*)$, tels que $a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$ et, pour tout $i \in \{0, ..., n-1\}$, f est continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ et admet une limite finie à droite en a_i et une limite finie à gauche en a_{i+1}.

Exemple 5.3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - [x]$ est continue par morceaux.

Proposition 5.4. *Si f est continue en x_0 et si $f(x0) \neq 0$, alors $f(x)$ est de même signe que $f(x_0)$ au voisinage de x_0.*

Démonstration - Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f(x_0) > 0$. Puisque f est continue en x_0, on peut associer à $\varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, un voisinage $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $x \in D \cap V \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - f(x_0) < \varepsilon$.
On en déduit que, pour tout $x \in D \cap V \Rightarrow f(x) > f(x_0) - \varepsilon = \frac{f(x_0)}{2} > 0$, donc $f(x) > 0$ pour tout $x \in D \cap V$.

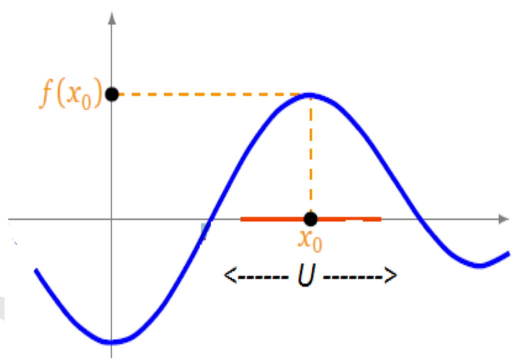


FIGURE 5.1 – ici nommer le figure

■

5.2.1 Continuité uniforme

Définition 5.7. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. f est dite uniformément continue sur I si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon),\ \forall (x, x') \in I^2 :\ |x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon.$$

Remarque 5.2. δ ne dépend que de ε, contrairement à la définition de la continuité où δ dépend aussi de x_0.

Proposition 5.5. *Si f est uniformément continue sur I, alors f est continue sur I.*

Exemple 5.4. La fonction qui à tout réel $x \geq 1$ associe $\sqrt{x}$ est uniformément continue.

Toute fonction lipschitzienne est uniformément continue.

La fonction qui à tout réel x associe x^2 n'est pas uniformément continue.

La fonction qui à tout réel $x \in]0,1]$ associe $\frac{1}{x}$ n'est pas uniformément continue.

Démonstration -

1) On montre que $f(x) = \sqrt{x},\ x \geq 1$ est uniformément continue. En effet

$$\forall (x,x') \in [1,+\infty[^2 :\ |\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq |\frac{|x-x'|}{\sqrt{x}+\sqrt{x'}}| \leq \frac{1}{2}|x-x'|.$$

Prenons $\delta = 2\varepsilon$. alors, pour tout $x, x')$ dans $[1,+\infty[$, tel que $|x-x'| \leq \delta$ nous avons $|\sqrt{x} - \sqrt{x'}| \leq \varepsilon$.

4) Au contraire, la fonction $f(x) = \frac{1}{x}$, où $x \in]0,1]$, n'est pas uniformément continue. Donc montrons que

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta = \delta(\varepsilon),\ \exists (x,x') \in I^2 :\ |x-x'| < \delta \text{ et } |f(x) - f(x')| > \varepsilon.$$

Prenons $\varepsilon = 1$ et $\delta > 0$. On distingue deux cas

Si $\delta \geq 1$. Pour $x = 1$ et $x' = \frac{1}{4}$, nous avons que

$$|x-x'| = |1 - \frac{1}{4}| = \frac{3}{4} < \delta \text{ mais } |f(x) - f(x')| = |1-4| = 3 > \varepsilon.$$

Si $0 < \delta < 1$. Pour $x = \delta$ et $x' = \frac{\delta}{2}$, nous avons que

$$|x-x'| = \frac{\delta}{2} < \delta \text{ mais } |f(x) - f(x')| = \frac{1}{\delta} > 1 = \varepsilon.$$

Par conséquent, f n'est pas uniformément continue sur $x \in]0,1]$. ■ Comme on l'a vu plus haut, il existe des fonctions continues non uniformément continues. Cependant, lorsque I est un segment de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire un intervalle borné et fermé, nous disposons du

Théorème 5.2. *(théorème de Heine) Toute fonction continue sur un segment $[a,b]$ est uniformément continue sur $[a,b]$.*

Démonstration - Raisonnons par l'absurde. Soit f une fonction continue et non uniformément continue sur $[a,b]$. Donc,

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \delta = \delta(\varepsilon),\ \exists (x,x') \in [a,b]^2 :\ |x-x'| < \delta \text{ et } |f(x) - f(x')| > \varepsilon.$$

En particulier, en prenant $\delta = \frac{1}{n}$, il existe $(x_n, x'_n) \in [a,b]^2$, tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* :\ |x_n - x'_n| < \delta \text{ et } |f(x_n) - f(x'_n)| > \varepsilon.$$

La suite $(x_n)_{n\geq 1}$ étant bornée, en vertu du théorème **??**, alors elle admet une sous-suite, notée $(x_{\sigma(n)})_{n\leq 1}$ convergente vers un réel, noté l, appartenant à $[a,b]$. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}^* :\ |x_{\sigma(n)} - x'_{\sigma(n)}| \leq \frac{1}{\sigma(n)} < \delta,$$

on déduit que la suite extraite $(x'_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ converge aussi vers l. L'application f étant continue en l, les suites $(f(x_{\sigma(n)})_{n\geq 1})$ et $(f(x'_{\sigma(n)})_{n\geq 1})$ convergent vers $f(l)$ et, par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} |f(x_{\sigma(n)}) - f(x'_{\sigma(n)})| = 0$ ce qui contredit le fait que $|f(x_{\sigma(n)}) - f(x'_{\sigma(n)})| > \varepsilon$. ■

5.3 Le théorème des valeurs intermédiaires et ses applications

Théorème 5.3. *(Bolzano-Cauchy) Soit f une fonction definie et continue sur le segment $[a, b]$ telle que $f(a)f(b) < 0$ (c'est-a-dire que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires), alors il existe au moins un point $\exists c \in]a, b[$ vérifiant $f(c) = 0$.*

Démonstration - Il suffit de considèrer le cas où $f(a).f(b) < 0$. Quitte à considèrer $-f$, on peut supposer que $f(a) > 0$ et que $f(b) < 0$. Posons

$$D = \{x \in [a, b] : \ f(x) > 0\}.$$

D est une partie de $\mathbb{R}$, non vide ($a \in D$) et majorée par b. Soit $c = \sup D$. On a $a \leq c \leq b$.
Si $f(c) > 0$. alors $c < b$ et puisque f est continue en c, alors il existerait $d \in]c, b]$ tel que $f(d) > 0$ d'après proposition 5.4. On aurait alors $d \in D$ et $d > c = \sup D$. Contradiction.
Si $f(c) < 0$. Alors $a < c$. En utilisant une fois de plus la continuité de f en c et la proposition 5.4, on peut trouver $e \in [a, c[$ tel que $e \leq x \leq c \Rightarrow f(x) < 0$.
D'autre part, puisque $e < c = \sup D$, il existe $x' \in D$, $e < x' \leq c$. On aboutit à la contradiction $f(x') < 0$ et $x' \in D$. En fin de compte, la seule possibilité qui reste est $f(c) = 0$.

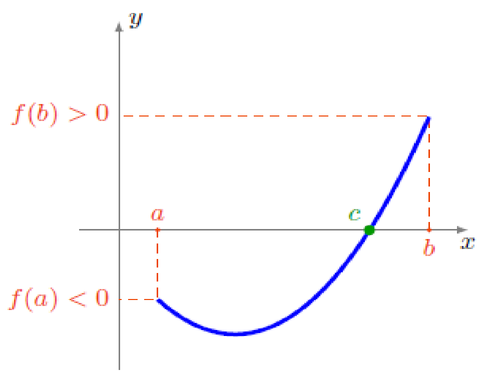


FIGURE 5.2 – Une illustration du théorème de Bolzano-Cauchy.

∎

Corollaire 5.1. *Tout polynôme de degré impair possède au moins une racine réelle.*

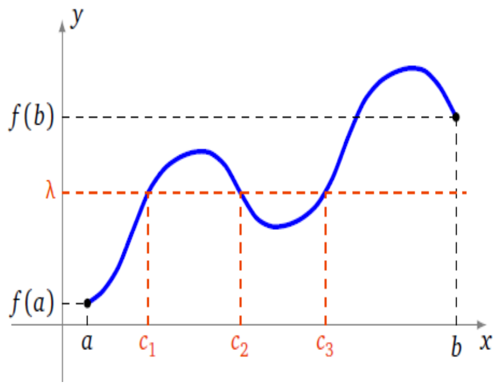
5.3.1 Le théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5.4. *Soit f une fonction definie et continue sur un intervalle I et soient $(a, b) \in I^2$. Alors pour tout nombre λ, compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un nombre $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = \lambda$.*
Et si de plus f est stictement monotone, alors le nombre c est unique.

Démonstration - Supposons que $f(a) < f(b)$. Soit λ un réel où $f(a) < \lambda < f(b)$. Considérons la fonction $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - \lambda$. La fonction g satisfait les conditions de le théorème 5.3, (Bolzano-Cauchy), il y a donc un certain nombre $c \in]a, b[$ telle que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = \lambda$.
Pour montrons l'unicité, s'il existe $\bar{c} > c$ (par exemple et f croissante) est vérifie $f(\bar{c}) = \lambda$, Ensuite, nous aurons

$$\lambda = f(c) < f(\bar{c}) = \lambda.$$

C'est une contradiction.



■

Exemple 5.5. Soit la fonction f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\exp(x) - 1$. On montre que l'équation $f(x) = 0$ a au moins une racine dans $[0, 3]$. En effet, on a f est continue et $f(1) = -1 < 0$ et $f(1) = \exp(1) - 1 \simeq 1,87 > 0$. D'apres le théorème 5.4, il existe $c \in]0, 3[$ telle que $f(c) = 0$.

Corollaire 5.2. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration - Soient y_1 et $y_2 \in f(I)$ où $y_1 < y_2$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, quelque soit $y_1 < y < y_2$, il existe $x \in I$ telle que $y = f(x)$, ce signifie que $y \in f(I)$. par conséquent, $f(I)$ est un intervalle. ■

Proposition 5.6. *Soient A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$, et M sa borne supérieure. Alors il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers M.*

Démonstration - Comme M est la borne supérieure de A, il est le plus petit des majorants de A

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A : \quad M - \varepsilon < x \leq M.$$

En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists x_n \in A : \quad M - \varepsilon < x_n \leq M.$$

On en déduit (théorème des gendarmes) que la suite (x_n) converge vers M.
La preuve dans le cas de la borne inférieure est analogue. ■

Proposition 5.7. *Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ est continue et strictement croissante, alors f est une bijection de $[a, b[$ sur $[f(a), \lim\limits_{\substack{x \to b \\ <}} f(x)[$.*

Exemple 5.6. Soit f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan(x)$. Comme f strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$, $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} f(x) = +\infty$. Alors, on a

$$f([0, \frac{\pi}{2}[) = [f(0), \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ <}} f(x)[= [0, +\infty[.$$

Théorème 5.5. *(Theoreme de Weirstrass) Soit f une fonction definie et continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors f atteint ses bornes superieure et inferieure, c'est-a-dire*

$$\exists (x_1, x_2) \in [a, b]^2 : \ f(x_1) = \sup_{[a,b]} f(x) \ \text{ et } \ f(x_2) = \inf_{[a,b]} f(x).$$

Cela signifie que $f(x_1) = \max\limits_{[a,b]} f(x)$ et $f(x_2) = \min\limits_{[a,b]} f(x)$.

Théorème 5.6. *(Théorème du point fixe) Si f est une fonction continue de $[a, b]$ vers $[a, b]$, alors il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. Le point x_0 est appelle point fixe de f.*

Démonstration - Considérons la fonction $g(x) = f(x) - x$. Cette fonction est continue sur $[a, b]$, et de plus $g(a) \geq 0$ car $f(a) \in [a, b]$ et $g(b) \leq 0$ car $f(b) \in [a, b]$. La fonction g étant continue sur $[a, b]$ et vérifie $g(a) \times g(b) \leq 0$, il résulte de le théorème 5.3 qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0$, donc $f(x_0) = x_0$. ■

5.3.2 Les fonctions monotones et la continuité

Théorème 5.7. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est strictement monotone sur l'intervalle I, alors f est injective sur I.*

Démonstration - Montrons que f est injective. Soient $x_1 \neq x_2$, alors par exemple $x_1 < x_2$ et si f est croissante, alors $f(x_1) < f(x_2)$ d'où $f(x_1) \neq f(x_2)$ donc f injective. ■

Théorème 5.8. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie et monotone sur l'intervalle I. Alors les deux assertions sont equivalentes*

1. *f est continue sur I,*
2. *$f(I)$ est un intervalle.*

Démonstration -

" $\Rightarrow$ " Avec le corollaire 5.2

" $\Leftarrow$ " Intéressons nous à (2) implique (1). Supposons f croissante et $I = [a; b]$ (le cas f décroissante suit les mêmes lignes). Soit $\varepsilon > 0$. Donnons nous $a < x_0 < b$ (les cas $x_0 = a$ et $x_0 = b$ sont traités de la même façon). Comme $f(I)$ est un intervalle et f croissante, il existe $a \leq x < x_0 < y \leq b$ tel que

$$f(x_0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(x_0) \leq f(y) \leq f(x_0) + \varepsilon$$

Posons $\delta = \min\{x_0 - x, y - x_0\}$. Pour tout t tel que $|t - x| < \delta$ on a $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$. C'est-à-dire f est continue en $x_0 \in I$.

■

Théorème 5.9. *(Théorème de la bijection) Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors*

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,*
2. *La fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*

Démonstration - Puisque f est strictement monotone, f est injective et donc bijective de I dans $f(I)$.
Maintenant, $f(I)$ est un intervalle car f est continue (point (2) du théorème 5.8 précédent). Puisque f^{-1} est monotone et $f^{-1}(f(I)) = I$ est un intervalle, le point (1) du théorème 5.8 précédent implique que f^{-1} est continue. ∎

Exemple 5.7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Définissons $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^n$. Comme f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}^+$. Alors elle ademet une fonction réciproque que l'on notera $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ qu'est définue par $f^{-1} = \sqrt[n]{x}$. Cette fonction est continue et strictement croissante (c'est la fonction racine n-ième).
Signalons que les graphes d'une fonction bijective et de sa réciproque sont symétriques par rapport à la première bissectrice (voir figure au-dessous)

Définition 5.8. On dit que $f : I \to J$ est un homéomorphisme si

1. f continue.
2. f bijective.
3. f^{-1} continue.

Les ensembles E et F sont alors dits homéomorphes.

Exemple 5.8. Il peut exister des fonctions bijectives continues, sans que la réciproque soit continue. D'après l'étude précédente, ces fonctions ne sont pas définies sur des intervalles. Par exemple, $f : [0,1[\times\{2\} \to [0,1]$ qu'est définie par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1[, \\ 1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$