CHAPITRE 7

FONCTIONS CIRCULAIRES INVERSES ET FONCTIONS HYPERBOLIQUES.

7.1 Fonctions circulaires réciproques

7.1.1 Fonction arcsinus

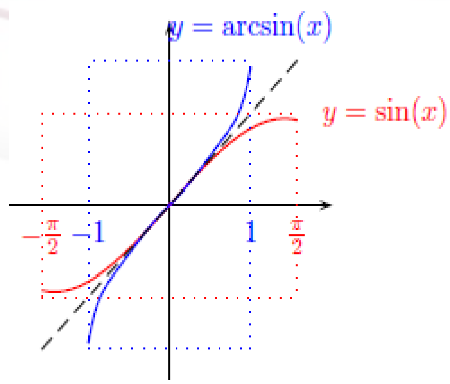
Définition 7.1. La fonction sinus, sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est continue et strictement croissante. Par application du théorème de la bijection **??**, on peut affirmer que la fonction sinus, restreinte à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ définie une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $[-1, 1]$. La bijection réciproque, nommée $\arcsin$, définie par

$$\begin{array}{rcl} \arcsin : [-1, 1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ x & \mapsto & \arcsin x, \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in [-1, 1],\ \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y.$$

Remarque 7.1. (Représentation graphique de $\arcsin$) Comme on le sait, dans un repère orthonormé, la courbe d'une fonction et sa fonction inverse sont symétriques par rapport à la droite d'équation : $y = x$, (voir le figure au-dessus)



Propriétés 7.1. 1. $\forall x \in [-1, 1] : \arcsin(\sin x) = x$, et $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] : \sin(\arcsin x) = x$.

2. La fonction $\arcsin$ est continue, strictement croissante, impaire dérivable sur $[-1,1]$ de dérivée

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. $\forall x \in [-1,1] : \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$.

4. $\forall x \in [-1,1] : \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Démonstration -

2. • Pour tout $x \in]-1,1[$, on a

$$\begin{aligned}(\arcsin x)' &= \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

• La fonction $\arcsin$ est impaire. En effet

$$y = \arcsin(-x) \Leftrightarrow x = \sin(-y) \Leftrightarrow -y = \arcsin x.$$

3. Soit $y = \arcsin x$, comme $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors $\cos y \geq 0$ et d'après la relation $x = \sin y$, on obtient

$$\cos(\arcsin x) = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}.$$

■

7.1.2 Fonction arccosinus

La fonction cosinus est paire 2π périodique, continue et dérivable et si $x \in [0,\pi]$: $\cos' x = -\sin x < 0$. Donc elle est strictement décroissante sur $[0,\pi]$. Elle est donc bijective de $[0,\pi]$ dans $\cos([0,\pi]) = [-1,1]$.

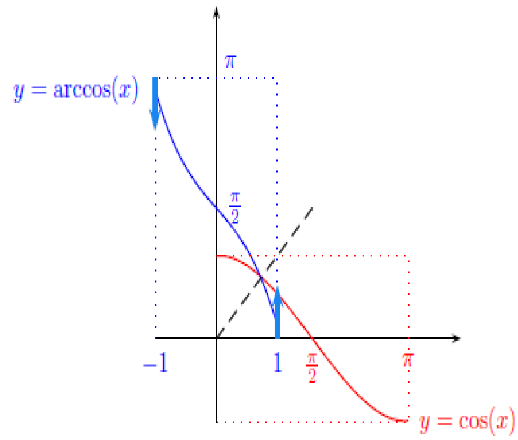
Définition 7.2. La bijection réciproque de $\cos$ est appelée fonction arccosinus et est notée $\arccos$. Ainsi

$$\begin{aligned}\arccos : [-1,1] &\to [0,\pi] \\ x &\mapsto \arccos x,\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in [-1,1],\ \forall y \in [0,\pi] : y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y.$$

Représentation graphique de $\arccos$



Propriétés 7.2.

1. $\forall x \in [-1,1] : \arccos(\cos x) = x$, et $\forall x \in [0,\pi] : \cos(\arccos x) = x$.
2. La fonction $\arcsin$ est continue, strictement décroissante, paire dérivable sur $[-1,1]$ de dérivée
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$
3. $\forall x \in [-1,1] : \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$.
4. $\forall x \in [-1,1] : \tan(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.
5. $\forall x \in [-1,1] : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Démonstration -

2. • Pour tout $x \in]-1,1[$, on a
$$\begin{aligned}(\arccos x)' &= \frac{1}{-\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}\\ &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.\end{aligned}$$

• La fonction $\arccos$ est paire. En effet
$$y = \arccos(-x) \Leftrightarrow x = \cos(-y) \Leftrightarrow y = \arccos x.$$

5. On pose $y = \arccos x$ et $z = \frac{\pi}{2} - y$, donc $x = \sin y$ où $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Par conséquent $x = \sin(\frac{\pi}{2} - z)$, comme $z \in [0,\pi]$ par suite, on a
$$\arccos x = \arccos(\sin(\frac{\pi}{2} - z)) = \arccos(\cos z) = z.$$

Alors,

$$y + z = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

■

7.1.3 Fonction arctangente

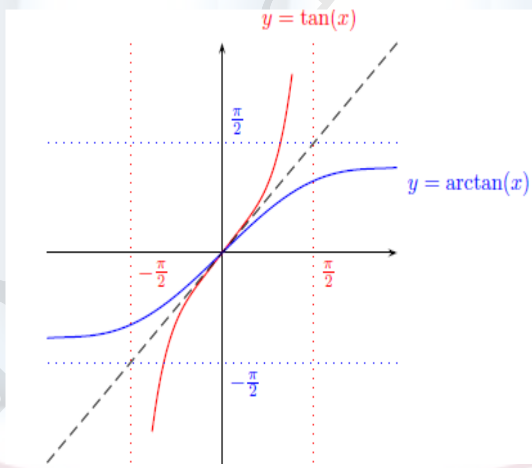
Définition 7.3. La fonction tangente est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée fonction arctangente et est notée $\arctan$, donc

$$\begin{aligned} \arctan : \mathbb{R} &\to \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ x &\mapsto \arctan x, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y.$$

Représentation graphique de $\arctan$



Propriétés 7.3.
1. $\forall x \in \mathbb{R} : \arctan(\tan x) = x$, et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[: \tan(\arctan x) = x$.
2. La fonction $\arctan$ est continue, strictement croissante, impaire dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$
3. $\lim_{x \to +\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$ et $\lim_{x \to -\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2}$.
4. $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & : x > 0; \\ -\frac{\pi}{2} & : x < 0. \end{cases}$

Démonstration -

2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}(\arctan x)' &= \frac{1}{\tan' y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} \\ &= \frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

3. • Pour $x > 0$, on pose $y = \arctan x$ et $z = \frac{\pi}{2} - y$, on a $x = \tan y$ où $y \in]0, \frac{\pi}{2}[$, alors $\frac{1}{x} = \cot y = \tan z$ et comme $z \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on a $z = \arctan \frac{1}{x}$. Donc, pour $x > 0$ on a

$$y + z = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

   • Pour $x > 0$, la fonction $\arctan$ est impaire, donc $\arctan x + \arctan \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}$.

∎

7.2 Fonctions hyperboliques.

7.2.1 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques

Définition 7.4. Les fonctions sinus hyperbolique sh et cosinus hyperbolique ch sont définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par

$$shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Propriétés 7.4. 1. Les fonctions sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$sh'x = chx \quad \text{et} \quad ch'x = shx.$$

2. La fonction sh est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x\to-\infty} chx = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} chx = +\infty.$$

3. La fonction ch est paire, strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et

$$\lim_{x\to-\infty} chx = \lim_{x\to+\infty} chx = +\infty.$$

4. $ch^2x - sh^2x = 1$.

7.2.2 Fonction tangente hyperbolique

Définition 7.5. La fonction tangente hyperbolique est définie par

$$\begin{aligned} th : \mathbb{R} &\to \,]-1, 1[\\ x &\mapsto thx = \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \end{aligned}$$

Propriétés 7.5. 1. Les fonctions th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$

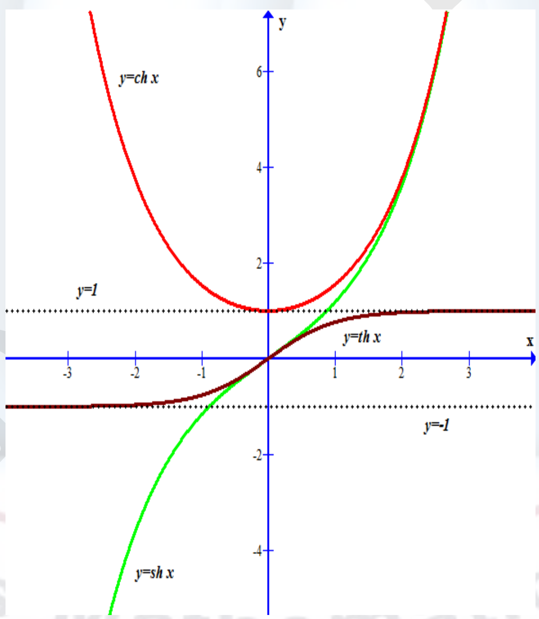
$$th'x = \frac{1}{ch^2}x = 1 - th^2x.$$

2. La fonction th est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et

$$\lim_{x \to -\infty} thx = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} thx = 1.$$

3. $\forall x \in thx = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.

Représentation graphique des fonctions sh, ch et th



Justification du terme hyperbolique.

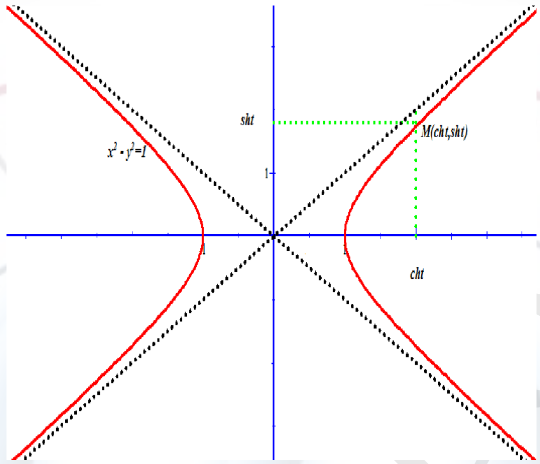
1. Les fonctions $\cos$ et $\sin$ s'appellent des fonctions circulaires parce que le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ peut se paramétre en $\begin{cases} x = \cos t, & (t \in \mathbb{R}) \\ y = \sin t \end{cases}$
2. La branche (droite) de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$ peut quant à elle se paramétrer en $\begin{cases} x = cht, & (t \in \mathbb{R}) \\ y = sht \end{cases}$

   En effet :

– Si le point M de coordonées (cht, sht), $(t \in \mathbb{R})$, comme on a $cht > 0$ et $ch^2t - sh^2t = 1$, M appartient donc bien à la branche droite de l'hyperbole.

– Réciproquement. Si $M(x, y)$ appartient à cette branche droite, alors :

Soit $(t \in \mathbb{R})$ tel que $y = sht$ (il en existe un, et même un seul). Mais comme $ch^2t - sh^2t = 1$ et $x^2 - y^2 = 1$, on a alors $x^2 = ch^2t$, et comme $x > 0$ on obtient $x = cht$.



7.2.3 Formulaire de trigonométrie hyperbolique

Propriétés 7.6. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, nous avons que

$$\begin{aligned}
sh(a+b) &= sha.chb + cha.shb \\
sh(a-b) &= sha.chb - cha.shb \\
ch(a+b) &= cha.chb + sha.shb \\
ch(a-b) &= cha.chb - sha.shb \\
ch(2a) &= ch^2a + sh^2a = 2ch^2a - 1 = 1 + 2sh^2a \\
sh(2a) &= 2cha + sha \\
th(a+b) &= \frac{tha + thb}{1 + tha.thb} \\
th(a-b) &= \frac{tha + thb}{1 - tha.thb} \\
th(2a) &= \frac{2tha}{1 + th^2a} \\
sha + shb &= 2sh\frac{a+b}{2}.ch\frac{a-b}{2} \\
sha - shb &= 2sh\frac{a-b}{2}.ch\frac{a+b}{2} \\
cha + chb &= 2ch\frac{a+b}{2}.ch\frac{a-b}{2} \\
cha - chb &= 2sh\frac{a-b}{2}.sh\frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$

7.3 Fonctions hyperboliques inverses.

7.3.1 Fonction argument sinus hyperbolique.

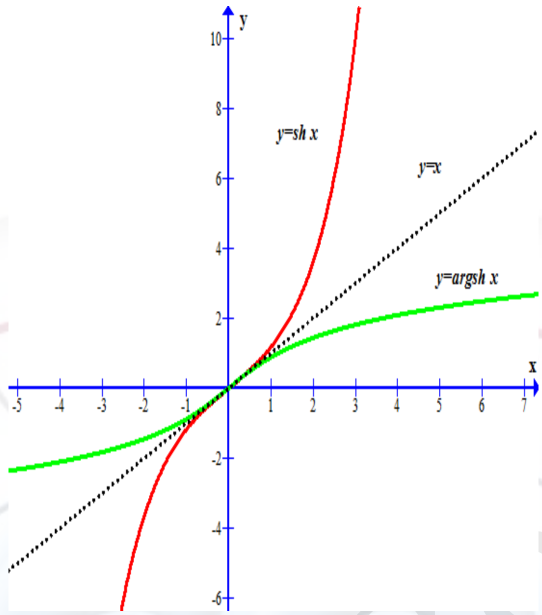
Définition 7.6. La fonction sinus hyperbolique définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}$. L'application réciproque est appelée fonction argument sinus hyperbolique et notée $argsh$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
argsh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto argshx,
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R} : y = argshx \Leftrightarrow x = shy.$$

Représentation graphique de $argsh$



Propriétés 7.7. 1. $\forall x \in \mathbb{R} : argsh(shx) = x$, et $\forall x \in [0, \pi] : sh(argshx) = x$.

2. La fonction $argsh$ est continue, strictement croissante, impaire dérivable sur $[-1, 1]$ de dérivée

$$(argshx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

3. $\forall x \in \mathbb{R} : argshx = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Démonstration -

2. On calcule la dérivée de $argsh$.

$$(argshx)' = \frac{1}{sh'y} = \frac{1}{ch(argshx)} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}},$$

Car $ch(argshx) = \sqrt{1 + sh^2(argshx)} = \sqrt{1 + x^2}$.

3. Comme $\ln'(x + \sqrt{x^2 + 1}) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, d'où le resultat.

■

7.3.2 Fonction argument cosinus hyperbolique.

Définition 7.7. La fonction cosinus hyperbolique définie une bijection de $[0, +\infty[$ sur son image $[1, +\infty[$. L'application réciproque est appelée fonction argument cosinus hyperbolique et notée

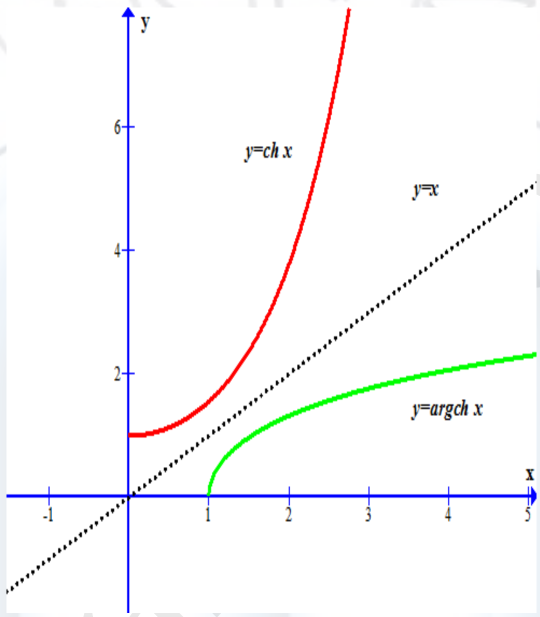
$argch$, c'est-à-dire

$$\begin{array}{rcl} argch : [1,+\infty[& \to & [0,+\infty[\\ x & \mapsto & argchx, \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ \forall y \in [0,+\infty[: y = argchx \Leftrightarrow x = chy.$$

Représentation graphique de $argch$



Propriétés 7.8. 1. $\forall x \in [0,+\infty[: argch(chx) = x$, et $\forall x \in [1,+\infty[: ch(argchx) = x$.

2. La fonction $argch$ est continue, strictement croissante, dérivable sur $]1,+\infty[$ de dérivée

$$(argchx)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

3. $\forall x \in [1,+\infty[: argchx = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$.

Démonstration -

2. On calcule la dérivée de $argch$.

$$(argchx)' = \frac{1}{ch'y} = \frac{1}{sh(argchx)} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

Car $sh(argchx) = \sqrt{ch^2(argchx)-1} = \sqrt{x^2-1}$.

3. Comme $\ln'(x+\sqrt{x^2-1}) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, d'où le resultat.

∎

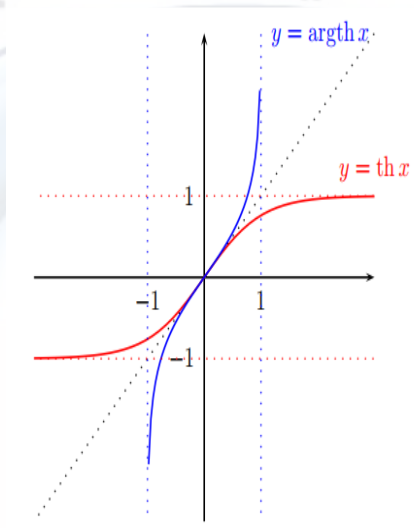
7.3.3 Fonction argument tangente hyperbolique.

Définition 7.8. La fonction tangente hyperbolique définie une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image $]-1,1$. L'application réciproque est appelée fonction argument tangente hyperbolique et notée $argth$, c'est-à-dire

$$argch :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto argthx,$$

c'est-à-dire, $\forall x \in]-1,1[, \ \forall y \in \mathbb{R} : y = argthx \Leftrightarrow x = thy.$

Représentation graphique de $argth$



Propriétés 7.9.

1. $\forall x \in \mathbb{R} : argth(thx) = x$, et $\forall x \in]-1,1[: th(argthx) = x.$
2. La fonction $argth$ est continue, strictement croissante, impaire, dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée
$$(argthx)' = \frac{1}{1-x^2}.$$
3. $\forall x \in]-1,1[: argthx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$