CHAPITRE 1

LES NOMBRES RÉELS.

1.1 Propriétés des nombres réels

1.1.1 les sous-ensembles usuelles de $\mathbb{R}$

Dans la suite, on note

1. L'ensemble des nombres entiers naturels est $\mathbb{N} = \left\{0, 1, 2, 3, \dots\right\}$.
2. L'ensemble des nombres entiers relatifs est $\mathbb{Z} = \left\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\right\}$.
   On note aussi $\mathbb{Z}^+ = \left\{0, 1, 2, 3, \dots\right\} = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}^- = \left\{0, -1, -2, -3, \dots\right\}$ et $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
3. L'ensemble des nombres décimaux est $\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n} : a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$.
4. L'ensemble des nombres rationnels est $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Proposition 1.1. *Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale périodique ou finie.*

Exemple 1.1. $\frac{3}{4} = 0,75$ $\frac{11}{7} = 1,571428571428\dots$ et note aussi $\frac{11}{7} = 1,\underline{571428}$.

Remarque 1.1. $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^-$, $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cap \mathbb{Z}^- = \{0\}$ et $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Proposition 1.2. *Le nombre* $\sqrt{2}$ *ne peut s'écrire comme quotient de deux entiers.*

Remarque 1.2. *a*— Il existe donc des nombres irrationnels. L'ensemble $\mathbb{Q}$ ne contient pas tous les nombres, d'où la nécessité d'introduire un nouvel ensemble $\mathbb{R}$ de nombres réels.

b— Il existe d'autres méthodes pour définir l'ensemble des nombres réels à partir de l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$, à savoir la méthode des coupures ou sections de Dedekind, ainsi que la méthode des suites fondamentales dans $\mathbb{Q}$. On montre que ces définitions aboutissent au même ensemble formel des nombres réels.

c— Les rationnels et les irrationnels forment l'ensemble $\mathbb{R}$ et on a

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

.

1.2 L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$

Définition 1.1. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est l'ensemble des abscisses des points dans un repère linéaire $(O, \vec{i})$.
les nombres réels positifs sont les abscisses des points à droite de O, et on note $\mathbb{R}_+$
les nombres réels négatifs sont les abscisses des points à gauche de O, et on note $\mathbb{R}_-$.

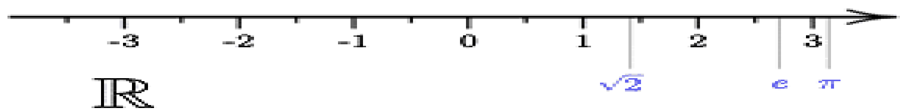


FIGURE 1.1 – Présentation des nombres réels.

1.3 Définition axiomatique des nombres réels.

1.3.1 Relations d'ordre et loi de composition interne

Définition 1.2. Soient E, F deux ensembles non vides. Une relation binaire R de E vers F est définie par une partie G de $E \times F$ (appelée graphe de la relation). Si $(x, y) \in G$, on dit que x est en relation avec y et on note xRy.

Définition 1.3. Soit E un ensemble non vide. Une relation binaire R de E vers E est dite :

1. Réflexive si $\forall x \in E : \ xRx$,
2. Symétrique si $\forall x, \ y \in E : \ (xRy) \Rightarrow (yRx)$),
3. Antisymétrique si $\forall x, \ y \in E : \ (xRy$ et $yRx)) \Rightarrow x = y$,
4. Transitive si $\forall x, y, z \in E : \ (xRy$ et $yRz) \Rightarrow xRz$.

Définition 1.4. Une relation d'ordre sur un ensemble non vide E est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive. Lorsque E est munie d'une relation d'ordre R, on dit que $(E; R)$ est un ensemble ordonné.

Exemples 1.1. — Si $E = \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Q}$ la relation $\leq$ est une relation d'ordre.

— Soit E un ensemble non vide. La relation $\subset$ est une relation d'ordre sur les sous-ensembles de E.

Définition 1.5. Soit (E, R) un ensemble ordonné. Si pour tous x et y dans E, on a xRy ou yRx, on dit que (E, R) est totalement ordonné.

Exemple 1.2. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ muni de $\leq$ sont totalements ordonnés.

Définition 1.6. Soit E un ensemble. On appelle loi de composition interne une application $\star$ de $E \times E$ dans E :

$$\begin{cases} E \times E \rightarrow E, \\ (x, y) \mapsto x \star y, \end{cases}$$

Exemple 1.3. Si $E = \mathbb{N}$, la multiplication $\times$ ou l'addition $+$ des entiers forme une loi de composition interne. Ce n'est pas le cas de la soustraction $-$, car la différence de deux entiers positifs n'est pas toujours un entier positif.

1.3.2 Le corps commutatif $(\mathbb{R},+,\times)$.

Nous acceptons qu'il existe un ensemble, noté $\mathbb{R}$, contenant $\mathbb{Q}$ et qui est muni de deux lois de composition internes, l'addition $+$ et la multiplication $\times$ et qui vérifient les propriétés suivantes :

(A_1) $\forall x,\ y \in \mathbb{R} : x+y = y+x$ (Commutativité de $+$).

(A_2) $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R} : x+(y+z) = (x+y)+z$ (Associativité de $+$).

(A_3) $\forall x \in \mathbb{R} : x+0 = 0+x = x$ (On dit que 0 est l'élément neutre de $+$).

(A_4) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists(-x) \in \mathbb{R} : x+(-x) = 0$ (tout réel x admet un opposé, noté $-x$).

(A_5) $\forall x,\ y \in \mathbb{R} : x \times y = y \times x$ (Commutativité de $\times$).

(A_6) $\forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R} : x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$ (Associativité de $\times$).

(A_7) $\forall x \in \mathbb{R} : x \times 1 = x$ (On dit que 1 est l'élément neutre de $\times$).

(A_8) $\forall x,\ y \in \mathbb{R} : x \times (y+z) = x \times y + x \times z$ (Distributivité de $\times$ par rapport à $+$).

(A_9) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},\ \exists(x^{-1}) \in \mathbb{R} : x \times x^{-1} = 1$ (tout réel non nul admet un inverse).

Remarque 1.3.
1. On résume les propriétés (A_1)–(A_4) en disant que $(\mathbb{R},+)$ est un groupe commutatif.
2. On résume les propriétés (A_1)–(A_8), en disant que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un anneau commutatif unitaire.
3. On résume les propriétés (A_1)–(A_9), en disant que $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif.

1.3.3 $\mathbb{R}$ est totalement ordonné.

D'après les exemples 1.1, l'ensemble $\mathbb{R}$ muni de la relation binaire $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ (autrement dit $(\mathbb{R},\leq)$ est un ensemble ordonné).
Si on remarque l'exemple 1.2 en disant que $\leq$ est une relation d'ordre total (ou encore que $(\mathbb{R},\leq)$ est totalement ordonné). Ensuite, nous concluons que $(\mathbb{R},+,\times,\leq)$ est un corps commutatif totalement ordonné.

1.4 Majorants, Minorants, Bornes supérieure et inférieure.

1.4.1 Majorants, Maximum et Bornes supérieure

Définition 1.7. Soient $(E,\leq)$ un ensemble ordonné, A une partie non vide de E et $M \in E$. On dit que :

1. M est un majorant de A (ou encore que M majore A) si
$$\forall x \in A:\ x \leq M.$$
2. M est le plus grand élément (ou le maximum) de A si $M \in A$ et M majore A, c'est-à-dire
$$M = \max A \Leftrightarrow \begin{cases} M \in A, \\ \forall x \in A: \quad x \leq M. \end{cases}$$
3. M est la borne supérieure de A si M est le plus petit des majorants de A, c'est-à-dire
$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ \forall x \in A:\ x \leq M, \\ (ii)\ \forall y \in E,\ (y < M) \Rightarrow \quad \exists x \in A : y < x \leq M. \end{cases}$$

1.4.2 Minorants, Minimum et Bornes inférieure

Définition 1.8. Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, A une partie non vide de E et $m \in E$. On dit que :

1. m est un minorant de A (ou encore que m minore A) si
$$\forall x \in A : \ m \leq x.$$
2. m est le plus petit élément (ou le minimum) de A si $m \in A$ et m minore A, c'est-à-dire
$$m = \min A \Leftrightarrow \begin{cases} m \in A, \\ \forall x \in A : \ m \leq x. \end{cases}$$
3. m est la borne inférieure de A si m est le plus grand des minorants de A, c'est-à-dire
$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ \forall x \in A : \ m \leq x, \\ (ii)\ \forall y \in E,\ (m < y) \Rightarrow \ \ \exists x \in A : m \leq x < y. \end{cases}$$
4. L'ensemble A est dit majoré (resp. minoré) s'il admet des majorants (resp. des minorants). A est dit borné s'il est à la fois majoré et minoré.

1.4.3 Caractérisation des bornes sup et inf

Proposition 1.3. *Toute partie A non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et on a :*
$$M = \sup A \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ \forall x \in A : \ x \leq M, \\ (ii)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A : \ \ M - \varepsilon < a \leq M. \end{cases}$$
Toute partie A non vide minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure et on a :
$$m = \inf A \Leftrightarrow \begin{cases} (i)\ \forall x \in A : \ m \leq x, \\ (ii)\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A : \ \ m \leq a < m + \varepsilon. \end{cases}$$

Proposition 1.4. *Le borne supérieure (inférieure) s'il existe est unique.*

Remarque 1.4. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$, alors,

1. Si M est un majorant de A et $M \in A$, on a $\sup A = M$.
2. Si m est un minorant de A et $m \in A$, on a $\inf A = m$.

Proposition 1.5. *Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Alons nous avons que*

1. $\sup(-A) = -\inf(A)$ *et* $\inf(-A) = -\sup(A)$.
2. *Si $A \subset B$, alors* $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq\leq \sup B$.
3. *Si $A \cap B \neq \emptyset$, alors $A \cap B$ est bornée et que*
$$\max\{\inf A, \inf B\} \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}.$$
4. $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ *et* $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

1.4.4 $\mathbb{R}$ est Archimédien.

Théorème 1.1. *$\mathbb{R}$ est Archimédien, c'est-à-dire que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N} : n > x. \tag{1.1}$$

Remarque 1.5. La propriété affichée dans l'équation (1.1) peut être s'écrit aussi comme suit :

$$\forall \ell > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : n\ell > x. \tag{1.2}$$

1.4.5 La droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.9. On appelle droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, i.e.,

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Corollaire 1.1. *Toute partie non vide de $\overline{\mathbb{R}}$ possède une borne supérieure et inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$.*

Exemple 1.4. Soit $A = \left\{\frac{n-1}{n+2} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$. On a, pour tout $n \geq 1$, $\frac{n-1}{n+2} \geq 0$. Comme $0 \in A$, on en déduit que $0 = \min A = \inf A$.
Maintenant, montrons que $\sup A = 1$. Comme $\forall n \geq 1 : n-1 < n+2$, alors $\frac{n-1}{n+2} < 1$, c'est-à-dire 1 majore A. Soit $\varepsilon > 0$. Alors nous avons que

$$1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n+2} \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < 1 - \frac{-3}{n+2} \Leftrightarrow n > \frac{3}{\varepsilon} - 2.$$

Un tel n existe par la propriété d'Archimède. Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_n = \frac{n-1}{n+2} \in A$ où $n > \frac{3}{\varepsilon} - 2$ tel que $1 - \varepsilon < a_n < 1$. Donc $\sup A = 1$.

1.4.6 $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.2. *Pour tous réels $x < y$, il existe un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ (et donc une infinité) tel que $x < r < y$.*

On exprime cette propriété en disant que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Démonstration - D'après le théorème 1.1, il existe un entier $q > 0$ tel que $\frac{1}{y-x} < q$ ainsi qu'un entier $n > 0$ tel que $qx < n$. L'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N}^* : qx < n\}$ est minorée par 1 et non vide. Admettons que tout ensemble non vide d'entiers, ici $A \subset \mathbb{N}$, possède un minimum. Notons $p = \min A$. On a donc $p - 1 \leq qx < p$ de sorte que $qx < p \leq qx + 1$ et $x < \frac{p}{q} \leq x + \frac{1}{q} < y$ par la première inégalité. ■

Lemme 1.1. *Pour tous nombres réels a, b $(a \leq b)$, il existe un nombre irrationnel x tel que $a < x < b$ et on dit $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dense dans $\mathbb{R}$.*

1.4.7 La partie entière.

Définition 1.10. Soit $x \in \mathbb{R}$, l'entier relative n qui vérifie $n \leq x < n+1$ est dite la partie entière de x, et on le note par $[x]$ (ou $E(x)$), c'est-à-dire $[x] \leq x < [x]+1$.

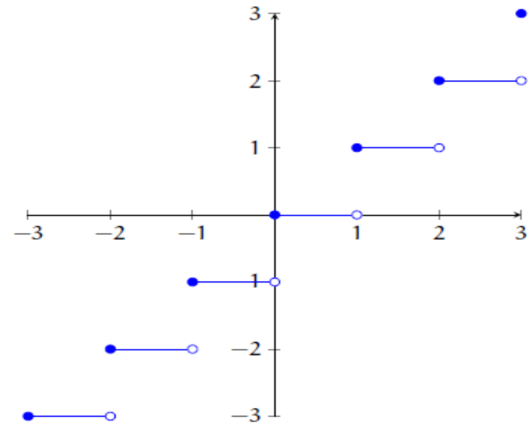


FIGURE 1.2 – Graphe de la fonction $x \mapsto E(x)$ dans l'intervalle $[-3,3]$.

1.4.8 Valeur absolue.

Définition 1.11. Soit x un nombre réel, on définit la valeur absolue de x par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } \ x \geq 0\,; \\ -x & \text{si } \ x < 0. \end{cases}$$

Proposition 1.6. *Soit $x,\ y \in \mathbb{R}$, la valeur absolue vérifie les propriétés suivantes*

1. $|x| \geq 0; \quad |-x| = |x|; \quad |x| > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0.$
2. $\sqrt{x^2} = |x|.$
3. $|x| = \max\{-x, x\}.$
4. $|xy| = |x||y|.$
5. $|x+y| \leq |x|+|y|$ *(inégalité triangulaire).*
6. $||x|-|y|| \leq |x \pm y| \leq |x|+|y|.$
7. *Soit $a > 0$, alors,* $\begin{cases} (i) & |x| < a \Longleftrightarrow -a < x < a, \\ (ii) & |x| > a \Longleftrightarrow x < -a \vee x > a. \end{cases}$

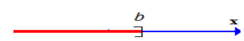
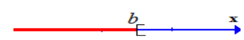
1.5 Les intervalles.

1.5.1 Propriété caractéristique.

Définition 1.12. Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si

$$\forall a \in I,\ \forall b \in I,\ \ \forall x \in \mathbb{R} : (a \leq x \leq b) \Rightarrow x \in I).$$

Soient deux réels a et b tels que $a \leq b$. Alors le tableau ci-dessous résume les types d'intervalles bornés ou non bornés.

Intervalle	Ensemble des réels x tels que...	Représentation graphique
$[a, b]$ fermé	$a \leq x \leq b$	
$[a, b[$ fermé à gauche, ouvert à droite	$a \leq x < b$	
$]a, b]$ ouvert à gauche, fermé à droite	$a < x \leq b$	
$]a, b[$ ouvert à gauche, ouvert à droite	$a < x < b$	
$[a, +\infty[$ fermé et non majoré	$x \geq a$	
$]a, +\infty[$ ouvert et non majoré	$x > a$	
$]-\infty, b]$ fermé et non minoré	$x \leq b$	
$]-\infty, b[$ ouvert et non minoré	$x < b$	

LES SUITES RÉELLES

Définition 2.1. Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ qui associé à tout entier $n \in \mathbb{N}$ un nombre réel $u(n)$, noté aussi u_n. On parle alors de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général u_n, appelé aussi terme de rang n de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Remarque 2.1.
1. On peut aussi que la suite est définie sur une partie infinie $I \subset \mathbb{N}$, et on parle dans ce cas de la suite $(u_n)_{n\in I}$ indexée par I.
2. On peut définir les suites de deux façons différentes.
   $a)$ Soit directement par une formule, en général une fonction f, et on a pour tout $n \in \mathbb{N}$
   $$u_n = f(n),$$
   ç'est ce qu'on appelle une formulation explicite de la suite.
   $b)$ Soit en exprimant u_{n+1} en fonction du terme précédent u_n et en définissant une valeur initiale, comme par exemple :
   $$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n), \\ u_0 = \alpha(\text{est un connu}), \end{cases}$$
   ç'est ce qu'on appelle une formulation par récurrence.

Exemples 2.1.
1. Soit la suite (u_n) de terme général $u_n = \frac{2}{n+1}$, donc, les termes premières sont $u_0 = 2, u_1 = 1, u_2 = \frac{2}{3}, \ldots$
2. Soit la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ telle que $v_n = (1 + \frac{1}{n})^n$, alors $v_1 = 2, v_2 = \frac{9}{4}, \ldots$
3. On définie par récurrence la suite (w_n) comme suit
   $$\begin{cases} w_{n+1} = w_n^2 + 3, \\ w_0 = 1, \end{cases}$$
   alors on calcule les termes par récurrence, donc $w_1 = w_0^2 + 3 = 4, w_2 = w_1^2 + 3 = 19, \ldots$

2.1 Suite majorée, minorée, bornée

Définition 2.2. Soit (u_n) une suite, alors

(i) (u_n) est majorée si $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq M$.

(ii) (u_n) est minorée si $\exists m \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : u_n \geq m$.

(iii) (u_n) est bornée si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire :
$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \forall n \in \mathbb{N} : |u_n| \leq M.$$

2.2 Sens de variation d'une suite

Définition 2.3. Soit (u_n) une suite, alors

1. (u_n) est constante si $u_n = u_0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
2. (u_n) est stationnaire s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = u_k$ pour tout $n \geq k$.
3. (u_n) est croissante si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$.
4. (u_n) est strictement croissante si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} > u_n$.
5. (u_n) est décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \leq u_n$.
6. (u_n) est strictement décroissante si $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} < u_n$.
7. (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.
8. (u_n) est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.

Exemples 2.2.

1. La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{N}^*$, car $u_{n+1} - u_n = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
2. La suite (n^2) est strictement croissante sur $\mathbb{N}$, car $u_{n+1} - u_n = 2n + 1 > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
3. mais la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geq 1}$ n'est ni croissante ni décroissante sur $\mathbb{N}^*$, (Disons qu'elle est alternée)

2.3 Deux suites classiques

Définition 2.4. (Suite arithmétique) On appelle suite arithmétique toute suite (u_n) pour laquelle il existe $r \in \mathbb{R}$ appelé raison de cette suite tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Définition 2.5. (Suite géométrique) On appelle suite géométrique toute suite (u_n) pour laquelle il existe $q \in \mathbb{R}$ appelé raison de cette suite tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

Il est possible de donner la formulation explicite de chacune de ces suites grâce à la proposition suivante.

2.3.1 Formulation explicite de suites arithmétiques et géométriques

Proposition 2.1.

1. *Le terme général d'une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 est*
$$u_n = u_0 + nr.$$
2. *Le terme général d'une suite géométrique (v_n) de raison q et de premier terme v_0 est*
$$v_n = v_0 \times q^n.$$
3. *Pour une suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0, on a*
$$\sum_{k=0}^{k=n-1} u_k = \frac{n}{2}(u_0 + u_n).$$
4. *Pour une suite géométrique (v_n) de raison q et de premier terme v_0, on a*
$$\sum_{k=0}^{k=n-1} v_k = v_0\Big(\frac{q^n - 1}{q - 1}\Big).$$

2.4 Limite de suites

2.4.1 Suites convergentes

Définition 2.6. On dit qu'une suite (u_n) est convergente vers le réel l (ou converge vers l, ou tend vers l lorsque n tend vers $+\infty$) si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon.$$

Le nombre l est appelé la limite de la suite (u_n), et on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

2.4.2 Suites divergentes

Définition 2.7. On dit qu'une suite (u_n) est divergente si tend vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$), i.e.,

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow u_n > A,$$

ou

$$\forall A > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N} : n \geq N \Rightarrow u_n < -A,$$

et on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (ou $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Remarque 2.2. une suite (u_n) est divergente si sa limite tend vers $\pm\infty$ ou elle n'admet pas de limite. Par exemple la suite $((-1)^n)_{n\geq 0}$ n'admet pas de limite, alors, elle est divergente.

2.4.3 Unicité de la limite

Proposition 2.2. *Si une suite est convergente, alors, sa limite est unique.*

Lemme 2.1.
1. *Toute suite convergente est une suite bornée.*
2. *Toute suite réelle tendant vers $+\infty$ est minorée.*
3. *Toute suite réelle tendant vers $-\infty$ est majorée.*

Remarque 2.3. Attention, la réciproque de la propriété précédente est fausse, il suffit de considérer la suite définie par $((-1)^n)_{n\geq 0}$ qui est bornée par 1 mais n'est pas convergente.

Proposition 2.3.
1. *La suite arithmétiques (u_n) converge si et seulement si sa raison r est nulle.*
2. *La suite géométrique (q^n) converge si et seulement si $|q| < 1$ ou bien $q = 1$.*

2.4.4 Opérations sur les limites

Théorème 2.1. *Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles convergentes de limites respectives l et l', et soit $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$. On a alors*

1. *$(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et sa limite est égale à $\lambda l + \mu l'$.*
2. *$(u_n \times v_n)$ est convergente et sa limite est égale à $l \times l'$.*
3. *Si $l' \neq 0$ alors il existe $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ soit définie, et converge vers $\frac{l}{l'}$.*
4. *La suite (u_n) est convergente et sa limite est égale à $|l|$.*

2.5 Suites de Cauchy

Définition 2.8. Une suite (u_n) est dite de Cauchy si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall p,q \in \mathbb{N}: \quad p,q \geq n_0 \Rightarrow |u_p - u_q| < \varepsilon.$$

Exemples 2.3. Les suites $\left(\frac{\sin(n)}{2^n}\right)$ et $(\cos(\frac{1}{n}))$ sont de Cauchy.

Lemme 2.2. *Toute suite de Cauchy est bornée.*

Théorème 2.2. *(Critère de de Cauchy) Une suite numérique est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Théorème 2.3. *(Théorème des gendarmes) Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles, et supposons que à partir d'un certain rang on a*

$$u_n \leq v_n \leq w_n.$$

1. *Si les suites (u_n) et (w_n) ont la même limite $l \in \mathbb{R}$, alors $\lim v_n = l$.*
2. *Si la suite (u_n) a pour limite $+\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.*
3. *Si la suite (w_n) a pour limite $-\infty$, alors $\lim v_n = -\infty$.*

Théorème 2.4. *(Théorème de la limite monotone) Toute suite monotone et bornée admet une limite. Plus précisement :*

1. *Toute suite (u_n) croissante majorée admet une limite finie, et $\lim u_n = \sup\{u_n :\ n \in \mathbb{N}\}$.*
2. *Toute suite (u_n) croissante non majorée tend vers $+\infty$.*
3. *Toute suite (u_n) décroissante minorée admet une limite finie, et $\lim u_n = \inf\{u_n :\ n \in \mathbb{N}\}$.*
4. *Toute suite (u_n) décroissante non minorée tend vers $-\infty$.*

2.5.1 Suites adjacentes

Définition 2.9. Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si

1. une des suites est croissante, l'autre décroissante.
2. et $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Théorème 2.5. *Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes et elles ont même limite.*

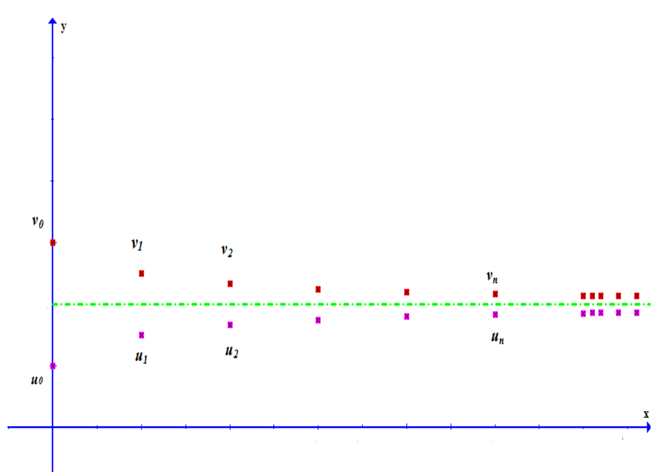


FIGURE 2.1 – Graphe des suites adjacentes.

Corollaire 2.1. *Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes, de limite commune l telles que (u_n) croissanteet (v_n) décroissante, alors, on a $\forall n \in \mathbb{N} : u_n \leq l \leq v_n$.*

Exemples 2.4. Les suites données par $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, $\quad v_n = 1 + \frac{1}{n}$, sont adjacentes. En effet la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante car : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n(n+1)} \geq 0$.
La suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est croissante car : $v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n(n+1)} \leq 0$.
De plus $u_n - v_n = \frac{-2}{n} \to 0$, quand $n \to +\infty$. Donc $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont adjacentes. On en déduit que $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ sont convergentes vers la même limite 1.

2.6 Suites extraites d'une suite

Définition 2.10. Étant donnée une suite (u_n), on dit que (v_n) est une suite extraite ou encore une sous-suite, s'il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, strictement croissante, telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ v_n = u_{\varphi(n)}.$$

Lemme 2.3. *Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\varphi(n) > n$. En particulier, la suite $(w_n) := \varphi(n)$ a pour limite $+\infty$.*

Remarque 2.4. Au lieu de suite extraite, on parle parfois de sous-suite.

Proposition 2.4. *Si (u_n) est une suite ayant pour limite $l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ alors toute sous-suite de (u_n) converge vers la même limite. En particulier, si une suite (u_n) admet des sous-suites ayant des limites différentes alors (u_n) n'admet pas de limite.*