Université de Msila
Département de Mathématiques et d'Informatique

1^{ier} Anné L.M.D.(M.I)
Module: Analyse 01
A. U: 2020/2021

Série N: 02
(Les nombres complèxes)

Remarque 1

قسم التعليم القَاعدي المشترك

Exercice 1

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants

1. $z_1 = (1+2i)^3$
2. $z_2 = \frac{3+6i}{3-4i}$
3. $z_3 = \frac{5-2i}{1+i}$
4. $z_4 = \left(\frac{1-2i}{2-i}\right)^2$.

Exercice 2

Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants

1. $z = (1-i)$
2. $z = (1-i)^3$
3. $z = \frac{5-2i}{1+i}$
4. $z = \left(\frac{2}{1-i}\right)^2$
5. $z = \left(\frac{i}{1+i}\right)^{2020}$.

Exercice 3

Chercher les racines n-ièmes de le nombre z pour l' entier n.

1. $z = 1$, $n = 3$ et $n = 4$.
2. $z = i + i$, $n = 2$ et $n = 5$.

Exercice 4

1. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que $|z| = 1$ si et seulement $z = \frac{1}{\bar{z}}$.
2. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $|a| = |b| = 1$. On pose $L = \frac{a+b}{1+ab}$, $K = \frac{a+b}{1-ab}$.
   Montrer L est réel, et K est imaginaire.

Exercice 5

1. Soientt $\theta \in [0, \pi[$, tel que $arg(z) = \theta$. Montrer que $arg(1+z) = \frac{\theta}{2}$.

2 Etudier le cas $\theta \in]-\pi, 0[$.

Exercice 6

Soient a et b deux réels, écrire sous forme trigonométrique le nombres complexe z dans les cas suinants

1 $z = e^{ia} + e^{ib}$ où pour a et b dans $[0, \pi]$.

2 $z = e^{ia} - e^{ib}$ où pour a et b dans $[0, 2\pi]$ anec $a \geq b$.

Exercice 7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suinants

1 $z^2 - (4+2i)z + 2 + 4i = 0$, $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$ et $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

2 $z^3 + (1-2i)z^2 - (1+2i)z + 2i = 0$ sachant qu'elle admet une racine imaginaire pure.

Exercice 8

Développer $\cos(4\theta)$, linéariser $\cos^4\theta$, calculer une primitive de $\theta \mapsto \cos^4\theta$.

Exercice 9

1 Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{C} : (z-1)(1+z+z^2+...+z^{n-1}) = z^n - 1\frac{z^n-1}{z-1}.$$

2 En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall z \in \mathbb{C} - \{1\} : 1 + z + z^2 + ... + z^{n-1} = \frac{z^n-1}{z-1}$.

3 Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R} : e^{ix} = 2ie^{i\frac{3\pi}{2}} \sin(\frac{\pi}{2})$.

4 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer: $1 + e^{ix} + e^{2ix} + ... + e^{(n-1)ix}$.

5 En déduire les sommes

$$1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos(n-1)x \quad \text{et} \quad \sin x + \sin 2x + ... + \sin(n-1)x.$$

$\star$ Bonne chance $\star$