Université de Msila
Département de Mathématiques et d'Informatique

Série N: 04
(Limite des fonctions)

1ier Anné L.M.D.(M.I)
Module: Analyse 01
A. U: 2020/2021

Exercice 1

Soit f la fonction définie de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, par $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

1. Montrer directement que f est strictement monotone.
2. En déduire que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Exercice 2

En utilisant la définition de la limite montrer que

1. $\lim\limits_{x\to 1}(5x+3)=8$
2. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{3}{5}$
3. $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{x-1}{x^2+1}=0$
4. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2}{(x-1)^2}=+\infty$
5. $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ >}}\frac{x+8}{x-4}=+\infty$.

Exercice 3

Soit $f:]-1,+\infty[\to\mathbb{R}$ la fonction definie par $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1+x}}$. Determiner les limites de f, si elle existent, en 0 et en $+\infty$.

Exercice 4

Déterminer les limites suivantes, en justifant vos calculs

1. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x+2}{x^2\ln x}$
2. $\lim\limits_{x\to 0^+}2x\ln(x+\sqrt{x})$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x^2}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+x^2}}{x^2}$
5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x-e^{x^2}}{x^2-x}$
6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-3}\right)^x$
7. $\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)^{\ln x}$
8. $\lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{5+x}-\sqrt{x-3})$
9. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-2|x|}{x}$
10. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$.
11. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x^n-1}$, $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$, $(a>0 \; et \; m,\; n\in\mathbb{N}^*)$.

Exercice 5

$E(x)$ désigne la partie entière de x. Calculer les limites suivantes:

1. 1) $\lim\limits_{x\to 0^+}xE\left(\frac{1}{x}\right)$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty}xE\left(\frac{1}{x}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{xE\left(\frac{1}{x}\right)+x}{xE\left(\frac{1}{x}\right)-x}$
4. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{x}E\left(\frac{1}{x}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to 0^+}xE\left(x-\frac{1}{x}\right)$.

Exercice 6

f est une fonction définie sur $]-5,+\infty[$ par $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$

1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et déduire $\lim_{x\to+\infty} f[f(x)]$
2. Trouver la forme algébrique de $f[f(x)]$ puis retrouver le résultat du (1).

Exercice 7

(Rappel de cours) Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative, alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1. La droite (d) de l'équation $y=ax+b$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$ ssi

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$$

2. La droite (d) de l'équation $y=ax+b$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$ ssi il existe une fonction φ telle que

$$f(x)=ax+b+\varphi(x) \text{ avec } \lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0.$$

1. **Partie (I)** : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}-\{-2\}$ par $f(x)=\frac{x^2-x-3}{x+2}$. On note (C_f) sa courbe.
   - a) Déterminer des réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\frac{c}{x+2}$.
   - b) En déduire que (C_f) admet une asymptote (d) en $+\infty$ et donner l'équation de cette asymptote,
   - c) Étudier les positions relatives de (C_f) et de (d).
2. **Partie (II)** : On donne la fonction f définie sur $]-\infty,0]\cup[4,+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x^2-4x}$. Montrer que la droite $(\triangle)$ d'équation $y=x-2$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$ et puis étudier les positions relatives entre eux.

Exercice 8

1. Montrer que $\frac{\ln x}{x^\alpha}<\frac{2}{x^{\frac{\alpha}{2}}}$ où $\alpha>0$.
2. En déduire que $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0,\ \alpha>0$.

⋆ Bonne chance ⋆